УДК 530.145; 539.12

О СПИНОВЫХ КОРРЕЛЯЦИЯХ В СИНХРОТРОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ

А. В. Борисов, В. А. Вшивцев, А. И. Тернов*)

(кафедра теоретической физики)

В мощность синхротронного излучения продольно поляризованного электрона вносит вклад корреляция между его спином и круговой поляризацией излученного фотона. В статье дана квазиклассическая интерпретация этой корреляции как интерференции полей излучения заряда и спинового магнитного момента электрона.

1. Квантовая теория синхротронного излучения (СИ), построенная А. А. Соколовым и И. М. Терновым с сотрудниками [1, 2], прекрасно согласуется с экспериментом (ссылки на оригинальные работы см. в [3, 4]): обнаружены и используются эффекты квантовых флуктуаций орбиты электрона [5] и радиационной поляризации электронов [6] вследствие СИ, наблюдена спиновая зависимость мощности СИ поляризованного пучка электронов, теоретически впервые исследованная в работе [7].

Квантовая теория СИ основана на строгих методах квантовой электродинамики с использованием точных решений уравнения Дирака для электрона в магнитном поле [2]. Естественно возникла потребность в наглядной квазиклассической интерпретации главных квантовых эффектов (в условиях ускорителей и накопителей они дают малые поправки к классической теории). Детальный анализ структуры квантовых поправок к классической мощности СИ был выполнен в работах И. М. Тернова с сотрудниками (их обзор дан в работе [8]). В частности, было показано, что квантовая поправка первого порядка по постоянной Планка $\hbar$, пропорциональная спиновому квантовому числу (нормированной проекции спина на направление магнитного поля $\mathbf{H}$) $\zeta = \pm 1$ поперечно поляризованного электрона, обусловлена интерференцией полей излучения заряда и спинового магнитного момента электрона.

В настоящей работе, следуя высказанному ранее предложению И. М. Тернова, мы даем аналогичную интерпретацию корреляции спина продольно поляризованного электрона и круговой поляризации фотона СИ.

2. Рассмотрим классическую частицу с зарядом e и дипольными магнитным и электрическим моментами $\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{d}$, которая движется по закону $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e(t)$. Соответствующая плотность электромагнитного тока имеет вид (см., напр., [9])

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e) + \nabla \times [\boldsymbol{\mu}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e)] + \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{d}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e)], \tag{1}$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_e(t)$ — скорость частицы; используется система единиц $c = 1$.

В случае периодического движения частицы с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ угловое распределение мощности излучения ν-й гармоники (частоты $\omega_\nu = \nu\omega_0$) с поляризацией λ определяется выражением [10]

$$\frac{dW_\nu^{(\lambda)}}{d\Omega} = \frac{\omega_\nu^2}{2\pi}|\mathbf{e}_\lambda^* \cdot \mathbf{j}_\nu|^2, \tag{2}$$

где фурье-компонента тока (1)

$$\mathbf{j}_\nu = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int d^3x \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \exp[i\omega_\nu(t - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r})], \tag{3}$$

$d\Omega$ — элемент телесного угла в направлении излучения $\mathbf{n}$ ($|\mathbf{n}| = 1$); $\mathbf{e}_\lambda$ ($\lambda = 1, 2$) — комплексные (в общем случае) векторы поляризации, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\lambda = 0, \qquad \mathbf{e}_{\lambda'}^* \cdot \mathbf{e}_\lambda = \delta_{\lambda'\lambda}.$$

Применим (1)–(3) к электрону, полагая, что в системе покоя частицы (собственный) магнитный момент

$$\boldsymbol{\mu}_0 = -\mu_B\boldsymbol{\zeta}, \tag{4}$$

где $\mu_B = e_0\hbar/2m$ — магнетон Бора (заряд электрона $e = -e_0 < 0$), а дипольный электрический момент $\mathbf{d}_0 = 0$ (вследствие CP-инвариантности квантовой электродинамики [11]). В (4) единичный вектор $\boldsymbol{\zeta}$ задает направление спина, эволюция которого во внешнем поле описывается известным квазиклассическим уравнением Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ) [2, 11]. В лабораторной системе отсчета, где электрон движется со скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{l}$ ($|\mathbf{l}| = 1$), его магнитный и электрический моменты, входящие в (1), связаны с (4) преобразованием Лоренца [9]:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 - (1-\gamma^{-1})(\boldsymbol{\mu}_0\cdot\mathbf{l})\mathbf{l}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{v}\times\boldsymbol{\mu}_0, \tag{5}$$

$\gamma = (1-v^2)^{-1/2} = E/m$ — лоренц-фактор, E — энергия электрона.

*) Московский физико-технический институт.

Пусть электрон поляризован продольно: $\boldsymbol{\mu}||\mathbf{l}$. Тогда из (4) и (5) следует

$$\boldsymbol{\mu} = -\zeta\gamma^{-1}\mu_B\mathbf{l}, \quad \mathbf{d} = 0, \tag{6}$$

где $\zeta = +1$ (-1) соответствует ориентации спина вдоль (против) направления импульса электрона $\mathbf{p} = E\mathbf{v}$. Подчеркнем, что из уравнения БМТ в пренебрежении аномальным магнитным моментом электрона, когда гиромагнитное отношение $g = 2$, следует, что $\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{l}$ — интеграл движения [2]. Это и обеспечивает выполнение (6) в любой момент времени.

С учетом (1) и (6) представим (3) в виде

$$\mathbf{j}_\nu = \mathbf{j}_{\nu(e)} + \mathbf{j}_{\nu(\mu)}, \tag{7}$$

где вклады заряда (e) и магнитного момента (μ) связаны соотношением

$$\mathbf{j}_{\nu(\mu)} = i\eta\omega_\nu\mathbf{n}\times\mathbf{j}_{\nu(e)}, \quad \eta = \zeta\mu_B/(\gamma e_0 v) = \zeta\hbar/2p. \tag{8}$$

Рассмотрим излучение электрона, движущегося в постоянном магнитном поле $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ по круговой орбите

$$\mathbf{r}_e(t) = R[\mathbf{e}_x\cos\omega_0 t + \mathbf{e}_y\sin\omega_0 t] \tag{9}$$

радиусом

$$R = v/\omega_0 = p/e_0H. \tag{10}$$

Введем орты σ- и π-компонент линейной поляризации СИ [2]:

$$\mathbf{e}_\sigma = \mathbf{H}\times\mathbf{n}/|\mathbf{H}\times\mathbf{n}|, \quad \mathbf{e}_\pi = \mathbf{n}\times\mathbf{e}_\sigma. \tag{11}$$

Из (1), (3), (9)–(11) следуют известные выражения [10] для компонент $j^{(s)}_{\nu(e)} = \mathbf{e}_s\cdot\mathbf{j}_{\nu(e)}$ $(s = \sigma, \pi)$ зарядового вклада в (3):

$$\left(j^{(\sigma)}_{\nu(e)}, j^{(\pi)}_{\nu(e)}\right) = -e_0\,\mathrm{e}^{-i\nu\alpha}(ivJ'_\nu(x), -\operatorname{ctg}\theta J_\nu(x)). \tag{12}$$

Здесь $\alpha = \pi/2 - \varphi$, φ — азимутальный угол вектора $\mathbf{n}$; аргумент функции Бесселя $J_\nu(x)$ и ее производной $J'_\nu(x) = dJ_\nu(x)/dx$ равен

$$x = \nu v\sin\theta, \tag{13}$$

θ — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{H}$.

Учитывая (12), (8) и (11), находим соответствующие компоненты вклада магнитного момента в (3):

$$(j^{(\sigma)}_{\nu(\mu)}, (j^{(\pi)}_{\nu(\mu)}) = i\eta\omega_\nu\left(-j^{(\pi)}_{\nu(e)}, j^{(\sigma)}_{\nu(e)}\right). \tag{14}$$

Определив орты круговой поляризации СИ в виде [2]

$$\mathbf{e}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\sigma + i\lambda\mathbf{e}_\pi), \tag{15}$$

где $\lambda = +1$ (-1) отвечает правой (левой) поляризации, из (12), (14), (15) и (7) получаем

$$j^{(\lambda)}_\nu = \mathbf{e}^*_\lambda\cdot\mathbf{j}_\nu = -\frac{ie_0}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\nu\alpha}(vJ'_\nu + \lambda\operatorname{ctg}\theta J_\nu)(1+\lambda\eta\omega_\nu). \tag{16}$$

Отсюда находим вклад корреляции ($\sim\lambda\eta$) заряда и магнитного момента в мощность излучения (2):

$$\frac{dW^{(\lambda)}_\nu(e\mu)}{d\Omega} = \lambda\eta\frac{e_0^2\omega_\nu^3}{2\pi}\left[vJ'_\nu(x) + \lambda\operatorname{ctg}\theta J_\nu(x)\right]^2. \tag{17}$$

В интересующем нас случае ультрарелятивистского электрона ($\gamma \gg 1$) основной вклад в полную мощность СИ дают, как известно [2], высокие гармоники $\nu\sim\gamma^3$, и поэтому применима асимптотика функций Бесселя в (17) через функцию Макдональда:

$$J_\nu(x) \simeq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi\sqrt{3}}K_{1/3}(z). \tag{18}$$

Здесь $\varepsilon = 1 - v^2\sin^2\theta$, аргумент $z = (1/2)y\gamma^3\varepsilon^{3/2}$, где введена спектральная переменная

$$y = \omega/\omega_c = (2/3)\gamma^{-3}\nu, \tag{19}$$

$\omega_c = (3/2)\gamma^3\omega_0$. Подставим (18) в (17) и перейдем от дискретного по ν спектра к непрерывному распределению по y (19). В результате с учетом (8) получим выражение

$$\begin{gathered}\frac{dW^{(\lambda)}(e\mu)}{dy} = \frac{9}{32\pi^3}\frac{e_0^2}{R^2}\gamma^9\cdot\lambda\zeta\xi y^3\times\\ \times[\cos\theta\sqrt{\varepsilon}K_{1/3}(z) + \lambda\varepsilon K_{2/3}(z)]^2,\end{gathered} \tag{20}$$

где

$$\xi = \frac{3}{2}\gamma\frac{H}{H_0} = \frac{3}{2}\gamma^2\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R} \tag{21}$$

— характерный квантовый параметр [1], $H_0 = m^2/e_0\hbar$ — швингеровское магнитное поле, $\lambda\!\!\!^{-} = \hbar/m$ — комптоновская длина волны электрона.

Результат (20) совпадает с соответствующим выражением (в первом порядке по $\xi\sim\hbar$) для корреляционного вклада ($\sim\lambda\zeta$) в спектрально-угловое распределение мощности СИ продольно поляризованного электрона, полученным на основе квантовой электродинамики [1]. Аналогично, используя (1), можно рассмотреть случай поперечно поляризованного электрона, когда, как следует из (5), вклад, пропорциональный $\zeta\xi$, в мощность СИ вносят как магнитный момент $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0||\mathbf{H}$, так и индуцированный электрический момент $\mathbf{d} = \mathbf{v}\times\boldsymbol{\mu}_0$.

3. Покажем теперь, что та же ($e\mu$)-интерпретация ($\lambda\zeta$)-корреляции следует непосредственно из точного матричного элемента СИ, если выделить там вклад магнитного момента с помощью обобщения известного тождества Гордона для тока свободного дираковского электрона [12].

В квантовой теории для мощности излучения вместо (2) получаем выражение [10]

$$\frac{dW^{(\lambda)}_{fi}}{d\Omega} = \frac{\omega_{fi}^2}{2\pi}|\mathbf{e}^*_\lambda\cdot\mathbf{j}_{fi}|^2. \tag{22}$$

Здесь матричный элемент оператора электромагнитного тока, отвечающий переходу $i \to f$, имеет вид

$$\mathbf{j}_{fi} = -e_0 \int d^3x \psi_f^+(\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha}\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r}), \qquad (23)$$

ψ_i (ψ_f) — волновая функция электрона в начальном (конечном) состоянии с энергией E_i (E_f), $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ — матрицы Дирака, $\hbar\mathbf{k} = \hbar\omega\mathbf{n}$ — импульс излученного в направлении $\mathbf{n}$ фотона частоты $\omega = \omega_{fi} = (E_i - -E_f)/\hbar$. Функции $\Psi_n(x) = \exp(-\frac{i}{\hbar}E_n t)\psi_n(\mathbf{r})$ являются решениями уравнения Дирака для электрона в заданном стационарном внешнем поле, описываемом 4-потенциалом $A^\mu(x)$:

$$[\gamma^\mu(p_\mu - eA_\mu) - m]\Psi_n(x) = 0, \qquad (24)$$

где $p^\mu = i\hbar\partial/\partial x_\mu = (i\hbar\partial/\partial t, -i\hbar\nabla)$ — оператор канонического 4-импульса. Здесь и ниже используется псевдоевклидова метрика с сигнатурой $(+---)$, матрицы $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$.

Используя (24), методом, аналогичным примененному в [12] для свободного электрона, получаем следующее тождество для 4-тока перехода J^μ_{fi}:

$$e^*_\lambda \cdot J_{fi} = J^{(\lambda)}_{fi} = -e_0 \int d^4x \overline{\Psi}_f \gamma_\mu e^{*\mu}_\lambda\, \mathrm{e}^{ik\cdot x}\, \Psi_i =$$
$$= -e_0 \int d^4x\, \mathrm{e}^{ik\cdot x}\, e^{*\mu}_\lambda \overline{\Psi}_f (P_\mu/m - i\hbar\sigma_{\mu\nu}k^\nu/2m)\Psi_i, \qquad (25)$$

где $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, e^μ_λ — 4-вектор поляризации, $k_\mu e^\mu_\lambda = = 0$, $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, $P^\mu = p^\mu - eA^\mu$ — оператор кинетического импульса. Выбирая трехмерно-поперечную калибровку $e^\mu_\lambda = (0, \mathbf{e}_\lambda)$, находим связь матричных элементов (25) и (23):

$$J^{(\lambda)}_{fi} = -2\pi\delta(\omega - \omega_{fi}) j^{(\lambda)}_{fi},$$
$$j^{(\lambda)}_{fi} = \mathbf{e}^*_\lambda \cdot \mathbf{j}_{fi} = -e_0 \int d^3x\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \times$$
$$\times \overline{\psi}_f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}^*_\lambda \cdot [\mathbf{P}/m - \hbar(i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Sigma} + \omega\boldsymbol{\alpha})/2m]\psi_i(\mathbf{r}). \qquad (26)$$

Используя волновые функции электрона в постоянном магнитном поле [2], легко показать, что в квазиклассическом пределе (26) переходит в (16) с точностью до множителя, обращающегося в единицу при суммировании по квантовым числам конечного электрона, кроме главного квантового числа n_f, которое определяет в этом пределе номер гармоники: $\nu = n_i - n_f$.

При этом первое слагаемое в (26), включающее оператор импульса $\mathbf{P}$, отвечает вкладу заряда, а остальные два — вкладу спинового магнитного момента. Результат согласуется, как и должно быть, с принципом соответствия между квазиклассическими матричными элементами и фурье-компонентами классических величин [10, 11] (ср. (26) и (1), (3), (8)).

Заметим, что не зависящая от спинового числа ζ поправка $W^{\mathrm{rec}} \sim \xi \sim \hbar$ (см. (21)) к классической мощности СИ W^{cl} определяется эффектом отдачи при излучении фотона [8], который методом, основанным на классическом токе (1), учесть нельзя. Это нетрудно сделать с помощью (26), получив известный результат [1–4, 8]: $W^{\mathrm{rec}}/W^{\mathrm{cl}} = -(55\sqrt{3}/24)\xi$, который справедлив также для скалярных и векторных частиц [13].

Предложенный нами метод расчета вклада $(\lambda\zeta)$-корреляции в мощность СИ представляет собой обобщение метода вычисления аналогичного корреляционного вклада в мощность черенковского излучения [14].

Авторы благодарят участников семинара проф. В.Ч. Жуковского за полезное обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке программы «Университеты России» (грант № 12-96ф).

Литература

1. *Sokolov A.A., Ternov I.M.* Synchrotron Radiation. Berlin; New York, 1968.
2. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. М., 1983. (*Sokolov A.A., Ternov I.M.* Radiation from Relativistic Electrons. N.Y., 1986.)
3. *Тернов И.М., Михайлин В.В.* Синхротронное излучение. Теория и эксперимент. М., 1986.
4. *Тернов И.М.* // УФН. 1995. **165**. №4. С. 429.
5. *Соколов А.А., Тернов И.М.* // ЖЭТФ. 1953. **25**. С. 698.
6. *Соколов А.А., Тернов И.М.* // ДАН СССР. 1963. **153**. С. 1052.
7. *Тернов И.М.* Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М., 1961.
8. *Бордовицын В.А., Тернов И.М., Багров В.Г.* //УФН. 1995. **165**, № 9. С. 1083.
9. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по классической электродинамике. М., 1970.
10. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Квантовая электродинамика. М., 1983.
11. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М., 1989.
12. *Бьёркен Дж.Д., Дрелл С.Д.* Релятивистская квантовая теория. Т.1. Релятивистская квантовая механика. М., 1978.
13. *Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С.* Излучение релятивистских электронов. М., 1973.
14. *Тернов И.М., Борисов А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 9 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 3).

Поступила в редакцию
30.06.97