10. *Caccamo C.* // J. Chem. Phys. 1989. **91**. P. 4902.
11. *Metropolis N., Rosenbluth A.W., Rosenbluth M.N.* et. al. // J. Chem. Phys. 1953. **21**. P. 1087.
12. *Penfold R., Nordholm S., Jonsson B.* et. al. // J. Chem. Phys. 1991. **95**. P. 2048.
13. *Lado F.* // Mol. Phys. 1976. **31**. P. 1117.
14. *Anderson H.C., Chandler D.* // J. Chem. Phys. 1972. **57**. P. 1918.
15. *Verlet L., Weis J.J.* // Mol. Phys. 1974. **28**. P. 665.
16. *Levin Y., Barbosa M.C., Tamashiro M.N.* // Europhys. Lett. 1998. **41**, No. 2. P. 123.
17. *Brilliantov N.V.* // Contrib. Plasma Phys. 1998. **38**, No. 4. P. 489.
18. *Hubbard J., Schofield P.* // Phys. Lett. 1972. **A40**, No. 3. P. 245.
19. *Brilliantov N.V., Valleau J.P.* // J. Chem. Phys. 1998. **108**. P. 1123.
20. *Brilliantov N.V.* // Phys. Rev. 1998. **E58**. P. 2628.
21. *Kubo R.* // J. Phys. Soc. Japan. 1962. **17**. P. 1100.
22. *Gray C.G., Gubbins K.E.* Theory of Molecular Fluids. Clarendon, Oxford, 1984.
23. *Carnahan N.F., Starling K.E.* // J. Chem. Phys. 1969. **51**. P. 635.
24. *Wertheim M.S.* // Phys. Rev. Lett. 1963. **10**, No. 8. P. 321.
25. *Thiele E.* // J. Chem. Phys. 1963. **39**. P. 474.
26. *Brilliantov N.V., Malinine V.V.* In press.

Поступила в редакцию
06.10.00

УДК 517.958:519.632.4

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ФИЗИКИ ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ

А. О. Чикилев, П. А. Крутицкий

(*кафедра математики*)

E-mail: chikilev@afrodita.phys.msu.su

Рассматривается смешанная задача для уравнения Лапласа во внешней многосвязной области с границей, состоящей из простых замкнутых кривых. На некоторых кривых задается условие Дирихле, на остальных — условие с косой производной. Задача сведена к однозначно разрешимому интегральному уравнению Фредгольма второго рода в пространстве непрерывных функций. Доказано, что решение задачи существует и единственно.

1. Постановка задачи. Теорема единственности

Рассмотрим на плоскости $x = (x_1, x_2) \in R^2$ открытую связную внешнюю область $D^{\rm ext}$ с границей Γ. Считаем, что контур Γ состоит из простых гладких замкнутых кривых: $\Gamma_1^1, \ldots, \Gamma_{N_1}^1$; $\Gamma_1^2, \ldots, \Gamma_{N_2}^2$, не имеющих общих точек, где $N_1 \geqslant 1$ и $N_2 \geqslant 0$. Пусть $\mathbf{n}_x$ — вектор внутренней по отношению к области $D^{\rm ext}$ нормали к Γ в точке $x \in \Gamma$, а $\boldsymbol{\tau}_x$ — вектор касательной к Γ в той же точке, указывающий положительное направление обхода области $D^{\rm ext}$ по Γ, такое, чтобы при обходе область $D^{\rm ext}$ оставалась справа. Положим $\Gamma^1 = \bigcup\limits_{n=1}^{N_1} \Gamma_n^1$, $\Gamma^2 = \bigcup\limits_{n=1}^{N_2} \Gamma_n^2$. Тогда $\Gamma = \Gamma^1 \bigcup \Gamma^2$. Будем считать, что Γ^1 состоит из ляпуновских кривых, т.е. $\Gamma^1 \in C^{1,\lambda}$ для некоторого $\lambda \in (0,1]$, а $\Gamma^2 \in C^{2,0}$. Рассмотрим задачу в области $D^{\rm ext}$ для уравнения Лапласа.

Внешняя задача $S^{\rm ext}$. Найти гармоническую в $D^{\rm ext}$ функцию $u(x) \in C^2(D^{\rm ext}) \bigcap C^0(\overline{D^{\rm ext}})$, удовлетворяющую граничным условиям

$$u(x)|_{\Gamma^1} = f_1(x), \qquad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_x} \right|_{\Gamma^2} = f_2(x), \quad \beta = {\rm const}, \qquad (2)$$

и условиям на бесконечности

$$|u(x)| \leqslant C_1, \quad |\nabla u(x)| \leqslant C_2 |x|^{-2}, \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty, \qquad (3)$$

где C_1, C_2 — некоторые константы.

Поясним, в каком смысле понимается граничное условие (2). В задаче $S^{\rm ext}$ не требуется непрерывная продолжимость первых производных функции $u(x)$ на контур Γ^2, а требуется лишь существование на Γ^2 равномерного по $x \in \Gamma^2$ предела комбинации из производных $\partial u / \partial \mathbf{n}_x + \beta \partial u / \partial \boldsymbol{\tau}_x$ при стремлении по нормали к Γ^2 из области $D^{\rm ext}$. О функции $u(x)$, обладающей таким свойством, будем говорить, что она имеет правильную косую производную [1] на Γ^2. Задача $S^{\rm ext}$ описывает электрический ток в полупроводниковой пленке (пластинке), расположенной в постоянном однородном магнитном поле, когда на одной части ее границы (Γ^1) задается электрический потенциал, а на другой (Γ^2) — нормальная компонента плотности тока [1].

Внешняя задача Дирихле, рассмотренная в работах [2–5], является частным случаем задачи $S^{\rm ext}$ при $N_2 = 0$. Внешняя задача с косой производной ($N_1 = 0$) изучалась в работах [1, 6, 7] и в задаче $S^{\rm ext}$ исключается из рассмотрения.

Исследование единственности решения задачи $S^{\rm ext}$ проведем методом энергетических тождеств.

Чтобы вывести интегральные соотношения для гармонической функции $u(x)$, имеющей правильную косую производную на контуре Γ^2, введем вспомогательный контур $\Gamma^{2,d}$, эквидистантный к Γ^2 и расположенный в D^{ext}. Понятие и свойства эквидистантной (параллельной) кривой приведены и изучены, например, в работе [4]. Точки y^* эквидистантного контура $\Gamma^{2,d}$ получаются из точек $y \in \Gamma^2$ сносом по нормали $\mathbf{n}_y$, направленной внутрь области D^{ext} на достаточно малое расстояние $d > 0$ (в векторном виде $\mathbf{y}^* = \mathbf{y} + \mathbf{n}_y d$). Поскольку $\Gamma^2 \in C^2$, то эквидистантный контур $\Gamma^{2,d}$ состоит из простых гладких замкнутых кривых $\Gamma_1^{2,d}, \ldots, \Gamma_{N_2}^{2,d}$. Вектор нормали $\mathbf{n}_{y^*}$ (или касательной $\boldsymbol{\tau}_{y^*}$) к контуру $\Gamma^{2,d}$ в точке $\mathbf{y}^* = (\mathbf{y} + \mathbf{n}_y d) \in \Gamma^{2,d}$ совпадает с нормалью $\mathbf{n}_y$ (или касательной $\boldsymbol{\tau}_y$) к контуру Γ^2 в точке $y \in \Gamma^2$, т.е. $\mathbf{n}_y = \mathbf{n}_{y^*}$ и $\boldsymbol{\tau}_y = \boldsymbol{\tau}_{y^*}$.

Теорема 1. *Если решение задачи S^{ext} существует, то оно единственно.*

Доказательство. Покажем, что однородная задача S^{ext} (с $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0$) имеет только тривиальное решение. Пусть $u^0(x)$ — произвольное решение однородной задачи S^{ext}. Используя [8] (см. также лемму 6.18 из работы [9]), получим, что решение однородной задачи S^{ext} непрерывно продолжимо вместе со своим градиентом на контур Γ^1 из области D^{ext}: $u^0(x) \in C^{1,\lambda}(D^{\text{ext}} \bigcup \Gamma^1)$. Через D^d обозначим внешнюю открытую область, лежащую в D^{ext} и ограниченную контуром $\Gamma^d = \Gamma^{2,d} \bigcup \Gamma^1$. Пусть Γ_R — окружность достаточно большого радиуса R с центром в начале координат, лежащая в D^d. Через D_R^d обозначим открытую область, лежащую в D^{ext} и ограниченную контуром Γ^d и кривой Γ_R. Функция $u^0(x)$ гармоническая в D^{ext}, поэтому она непрерывно дифференцируема в $\overline{D_R^d} \subset D^{\text{ext}}$ и для нее справедлива первая формула Грина:

$$\|\nabla u^0\|^2_{L_2(D_R^d)} = \\ = -\int\limits_{\Gamma^1} u^0 \frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_y} dl_y - \int\limits_{\Gamma^{2,d}} u^0 \frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_{y^*}} dl_{y^*} + \int\limits_{\Gamma_R} u^0 \frac{\partial u^0}{\partial R} dl_y. \tag{4}$$

Первое слагаемое в правой части (4) равно нулю в силу однородного граничного условия (1). Из однозначности $u^0(x)$ следует тождество

$$\int\limits_{\Gamma^{2,d}} u^0 \frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{\tau}_{y^*}} dl_{y^*} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma^{2,d}} d(u^0)^2 = 0. \tag{5}$$

Комбинируя (4), (5) и учитывая, что $\mathbf{n}_y = \mathbf{n}_{y^*}$, $\boldsymbol{\tau}_y = \boldsymbol{\tau}_{y^*}$, получаем

$$\|\nabla u^0\|^2_{L_2(D_R^d)} = \\ = -\int\limits_{\Gamma^{2,d}} u^0 \left(\frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_y} + \beta \frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{\tau}_y} \right) dl_y + \int\limits_{\Gamma_R} u^0 \frac{\partial u^0}{\partial R} dl_y. \tag{6}$$

Переходя в (6) к пределу при $d \to +0$, получим в силу однородного граничного условия (2)

$$\|\nabla u^0\|^2_{L_2(D_R^0)} = \int\limits_{\Gamma_R} u^0 \frac{\partial u^0}{\partial R} dl_y = \int\limits_0^{2\pi} u^0 \frac{\partial u^0}{\partial R} R d\varphi, \tag{7}$$

а при $R \to \infty$ в (7) с учетом условия на бесконечности (3) приходим к равенству $\|\nabla u^0\|^2_{L_2(D^{\text{ext}})} = 0$. Отсюда вытекает, что любое решение однородной задачи S^{ext} — это константа. Из граничного условия (1) следует, что эта константа равна нулю и однородная задача S^{ext} имеет только тривиальное решение. В силу линейности неоднородная задача S^{ext} имеет не более одного решения, что и требовалось доказать.

2. Сведение внешней задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Теорема существования

Решение задачи S^{ext} будем строить в предположении, что $f_1(x) \in C^0(\Gamma^1)$ и $f_2(x) \in C^0(\Gamma^2)$. Рассмотрим открытые внутренние области $D_1^1, \ldots, D_{N_1}^1$ и $D_1^2, \ldots, D_{N_2}^2$, ограниченные кривыми $\Gamma_1^1, \ldots, \Gamma_{N_1}^1$ и $\Gamma_1^2, \ldots, \Gamma_{N_2}^2$ соответственно. Как и в работах [6, 7], выберем и зафиксируем точки $Y_1^1, \ldots, Y_{N_1}^1$ и $Y_1^2, \ldots, Y_{N_2}^2$, лежащие в областях $D_1^1, \ldots, D_{N_1}^1$ и $D_1^2, \ldots, D_{N_2}^2$ соответственно. Будем искать решение задачи S^{ext} в виде

$$\begin{aligned} u[\nu](x) = &-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^1} \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln|x-y| dl_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_1} \ln|x - Y_n^1| \int\limits_{\Gamma_n^1} \nu(y) dl_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^2} \nu(y) \ln|x-y| dl_y + \\ &+ \beta \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_n^2} \nu(y) \Big(\psi(x,y) - \psi(x, Y_n^2) \Big) dl_y - \\ &- \frac{1}{2\pi} \ln|x - Y_{N_1}^1| \int\limits_{\Gamma} \nu(y) dl_y + \int\limits_{\Gamma} \nu(y) dl_y, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\nu(y) \in C^0(\Gamma)$. Ядро углового потенциала $\psi(x,y)$, рассмотренное в работах [1, 6, 7, 10], может быть определено с точностью до $2\pi m$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ из формул $\cos\psi(x,y) = \frac{x_1 - y_1}{|x-y|}$, $\sin\psi(x,y) = \frac{x_2 - y_2}{|x-y|}$, где $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$. Очевидно, что $\psi(x,y)$ — многозначная гармоническая функция, связанная с функцией $\ln|x-y|$ соотношениями Коши–Римана

$$\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \mathbf{n}_\xi} = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial \boldsymbol{\tau}_\xi}; \quad \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \boldsymbol{\tau}_\xi} = -\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial \mathbf{n}_\xi}, \tag{9}$$

где $\xi \equiv x$ либо $\xi \equiv y$, $\boldsymbol{\tau}_\xi$ и $\mathbf{n}_\xi$ — векторы касательной и нормали к Γ в точке $\xi \in \Gamma$ (см. п. 1). Выберем ветви функции $\psi(x,y)$ при $y \in \overline{D_n^2}$ $(n=1,\ldots,N_2)$ и $x \in R^2 \backslash \overline{D_n^2}$. Ниже под $\psi(x,y)$ мы понимаем любую фиксированную ветвь этой функции, которая непрерывно меняется по y в $\overline{D_n^2}$ и по x в произвольной фиксированной односвязной области D, вложенной в $R^2 \backslash \overline{D_n^2}$. При таком выборе ветвей $\psi(x,y)$ четвертое слагаемое в (8) будет однозначной функцией в D^{ext} (см. [6, 7]).

Заметим, что первое слагаемое в (8) — потенциал двойного слоя на Γ^1; второе и пятое — сумма точечных источников в $Y_n^1 \notin D^{\text{ext}}$ $(n=1,\ldots,N_1)$; третье — логарифмический потенциал на Γ^2; четвертое слагаемое — сумма модифицированных угловых потенциалов на Γ_n^2 $(n=1,\ldots,N_2)$, которые были введены и изучены в работах [6, 7]. Найдем асимптотику $u[\nu](x)$ на бесконечности, используя асимптотики потенциалов простого и двойного слоя [4] и модифицированного углового потенциала [6, 7]:

$$u[\nu](x) = \int_\Gamma \nu(y)\,dl_y + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty. \tag{10}$$

Очевидно, что $u[\nu](x)$ удовлетворяет условию (3) на бесконечности. Отметим, что функция $u[\nu](x)$, определенная в (8), удовлетворяет всем условиям задачи S^{ext}, за исключением граничных условий (1) и (2). Действительно, поскольку $\Gamma^1 \in C^{1,\lambda}$ при $\lambda \in (0,1]$, $\Gamma^2 \in C^2$ и $\nu(x) \in C^0(\Gamma)$, то (8) — однозначная гармоническая функция в D^{ext}, непрерывно продолжимая на Γ из D^{ext}, что следует из свойств потенциала двойного слоя [4, 5], логарифмического потенциала [4, 5], углового потенциала [1, 6, 7] и модифицированного углового потенциала [6, 7]. Кроме того, применяя методику [1, 6, 7], можно показать, что $u[\nu](x)$ имеет на Γ^2 правильную косую производную. Подставим (8) в граничное условие (1) и, используя формулу для предельных значений потенциала двойного слоя [4], получим интегральное уравнение

$$\frac{\nu(x)}{2} + A[\nu](x) = f_1(x), \quad x \in \Gamma^1,$$

где

$$\begin{aligned} A[\nu](x) = &-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^1} \nu(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\ln|x-y|\,dl_y + \\ &+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_1} \ln|x-Y_n^1| \int_{\Gamma_n^1} \nu(y)\,dl_y + \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^2} \nu(y)\ln|x-y|\,dl_y + \\ &+\beta\sum_{n=1}^{N_2}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n^2}\nu(y)\Big(\psi(x,y)-\psi(x,Y_n^2)\Big)\,dl_y - \\ &-\frac{1}{2\pi}\ln|x-Y_{N_1}^1|\int_\Gamma \nu(y)\,dl_y + \int_\Gamma \nu(y)\,dl_y, \quad x \in \Gamma^1. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставим (8) в граничное условие (2) и, пользуясь свойствами потенциалов (см. [1, 6, 7]), получим интегральное уравнение

$$(1+\beta^2)\left(\frac{\nu(x)}{2} + A[\nu](x)\right) = f_2(x), \quad x \in \Gamma^2,$$

где

$$\begin{aligned} A[\nu](x) = &\frac{1}{2\pi(1+\beta^2)} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{N_1}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_x}\right)\ln|x-Y_n^1|\int_{\Gamma_n^1}\nu(y)\,dl_y - \\ &-\frac{1}{2\pi(1+\beta^2)}\left(\int_{\Gamma^1}\nu(y)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}\ln|x-y|\,dl_y + \right. \\ &\left. +\beta\int_{\Gamma^1}\nu(y)\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_x \partial \mathbf{n}_y}\ln|x-y|\,dl_y\right) + \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^2}\nu(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\ln|x-y|\,dl_y + \\ &+\frac{\beta}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_2}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_x} - \beta\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\right)\frac{\ln|x-Y_n^2|}{(1+\beta^2)}\int_{\Gamma_n^2}\nu(y)\,dl_y - \\ &-\frac{1}{2\pi(1+\beta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_x}\right)\ln|x-Y_{N_1}^1|\int_\Gamma \nu(y)\,dl_y, \\ &x \in \Gamma^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Итак, мы свели задачу S^{ext} к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно плотности $\nu(x) \in C^0(\Gamma)$:

$$\begin{gathered} \frac{\nu(x)}{2} + A[\nu](x) = f(x), \quad x \in \Gamma, \\ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \Gamma^1, \\ \dfrac{f_2(x)}{(1+\beta^2)}, & x \in \Gamma^2, \end{cases} \end{gathered} \tag{13}$$

где оператор $A[\nu](x)$ определен в (11) при $x \in \Gamma^1$ и в (12) при $x \in \Gamma^2$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f_1(x) \in C^0(\Gamma^1)$ и $f_2(x) \in C^0(\Gamma^2)$. Если $\nu(x) \in C^0(\Gamma)$ — решение уравнения (13), то функция $u[\nu](x)$, определенная в (8), является решением задачи S^{ext}.*

Изучим уравнение (13).

Лемма. *Уравнение (13) имеет единственное решение* $\nu(x) \in C^0(\Gamma)$ *для любой правой части* $f(x) \in C^0(\Gamma)$.

Доказательство. В силу альтернативы Фредгольма для доказательства леммы достаточно показать, что однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода (13) не имеет нетривиальных решений. Пусть $\nu^0(x) \in C^0(\Gamma)$ — решение однородного уравнения (13) (с $f(x) \equiv 0$). Подставим $\nu^0(x)$ в $u[\nu](x)$ и получим по теореме 2 функцию $u[\nu^0](x)$, которая будет решением однородной задачи $S^{\rm ext}$. В силу теоремы 1

$$u[\nu^0](x) \equiv 0, \quad x \in \overline{D^{\rm ext}}. \tag{14}$$

Отсюда при $|x| \to \infty$ из асимптотики (10) получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \nu^0(y)dl_y = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{gathered}u^*[\nu^0](x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1} \nu^0(y)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_y}\ln|x-y|dl_y + \\ +\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_1}\psi(x,Y_n^1)\int\limits_{\Gamma_n^1}\nu^0(y)dl_y - \\ -\frac{1}{2\pi}\psi(x,Y_{N_1}^1)\int\limits_{\Gamma}\nu^0(y)dl_y + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2}\nu^0(y)\psi(x,y)dl_y - \\ -\beta\sum_{n=1}^{N_2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_n^2}\nu^0(y)(\ln|x-y| - \ln|x-Y_n^2|)dl_y,\end{gathered}$$

которая является сопряженной к $u[\nu^0](x)$ в смысле соотношений Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u^*}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial u^*}{\partial x_1}. \tag{16}$$

(Это легко проверить, используя формулы (9).) Из (14) и (16) следует, что функция $u^*[\nu^0](x)$ в $D^{\rm ext}$ равняется некоторой константе:

$$u^*[\nu^0](x) \equiv C = {\rm const}, \quad x \in D^{\rm ext}. \tag{17}$$

С другой стороны, из явного вида функции $u^*[\nu^0](x)$ вытекает, что она многозначна в $D^{\rm ext}$, так как $\psi(x,y)$ и $\psi(x,Y_n^1)$ для $n = 1,\ldots,N_1$ — многолистные функции. Очевидно, функция $u^*[\nu^0](x)$ может равняться константе в $D^{\rm ext}$ только в том случае, если она будет однозначной. Из свойств функции $\psi(x,y)$ и явного вида $u^*[\nu^0](x)$ следует, что функция $u^*[\nu^0](x)$ может быть однозначной, если выполнены условия

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_n^1}\nu^0(y)dl_y = 0, \quad n = 1,\ldots,N_1-1; \\ \int\limits_{\Gamma_n^2}\nu^0(y)dl_y = 0, \quad n = 1,\ldots,N_2.\end{gathered} \tag{18}$$

В силу априорной однозначности функции $u^*[\nu_0](x)$ условия (18) выполняются. Из (15) и (18) следует, что выполнены условия

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_n^1}\nu^0(y)dl_y = 0, \quad n = 1,\ldots, N_1; \\ \int\limits_{\Gamma_n^2}\nu^0(y)dl_y = 0, \quad n = 1,\ldots, N_2.\end{gathered} \tag{19}$$

С учетом (19) функция $u^*[\nu^0](x)$ перепишется в виде

$$\begin{gathered}u^*[\nu^0](x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\nu^0(y)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}_y}\ln|x-y|dl_y + \\ +\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2}\nu^0(y)\psi(x,y)dl_y - \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2}\nu^0(y)\ln|x-y|dl_y.\end{gathered} \tag{20}$$

Первое слагаемое в (20) — видоизмененный потенциал простого слоя [5, § 12] на Γ^1. Из уравнения (13) следует, что при $x \in \Gamma^1$

$$\nu^0(x) = -2A[\nu^0](x), \quad x \in \Gamma^1, \tag{21}$$

где $A[\nu^0](x)$ — оператор, определяемый в (11). Поскольку $\Gamma^1 \in C^{1,\lambda}$, где $\lambda \in (0,1]$, то, используя [5, § 51] и учитывая (21), можно показать, что $\nu^0(x) \in C^{0,\frac{\lambda}{4}}(\Gamma^1)$. При этом в соответствии с результатами [5] функция $u^*[\nu^0](x)$ является непрерывной в $R^2\backslash\Gamma^2$ и гармонической в $R^2\backslash\Gamma$. Учитывая (17), получим, что $u^*[\nu^0](x)$ удовлетворяет в области D_n^1 $(n = 1,\ldots,N_1)$ внутренней задаче Дирихле:

$$\Delta u^* = 0, \quad x \in D_n^1; \quad u^*|_{\Gamma_n^1} = C = {\rm const}. \tag{22}$$

Из единственности решения задачи (22) следует, что $u^*[\nu^0](x) \equiv C$ в $\overline{D_n^1}$ $(n = 1,\ldots,N_1)$. Функция $u[\nu^0](x)$ связана с $u^*[\nu^0](x)$ соотношениями Коши–Римана (16) в $R^2\backslash\Gamma$, поэтому $u[\nu^0](x) \equiv C_n^1$ — некотороя константа в D_n^1 $(n = 1,\ldots,N_1)$. Учтем условия (19) и запишем (8) в виде

$$\begin{gathered}u[\nu^0](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^1}\nu^0(y)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_y}\ln|x-y|dl_y + \\ +\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2}\nu^0(y)\ln|x-y|dl_y + \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^2}\nu^0(y)\psi(x,y)dl_y.\end{gathered}$$

Здесь первое слагаемое — потенциал двойного слоя на Γ^1. По теореме о скачке потенциала двойного слоя [4, 5] с учетом (14) получим, что $\nu^0(x) \equiv -C_n^1$

при $x \in \Gamma_n^1$ $(n = 1, \ldots, N_1)$. Согласно условиям (19) $C_n^1 = 0$ при $n = 1, \ldots, N_1$, а значит, мы доказали, что $\nu^0(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma^1$.

Учтем условия (19) и запишем однородное уравнение (13) при $x \in \Gamma^2$ в виде

$$\frac{\nu^0(x)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^2} \nu^0(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \ln|x-y| dl_y = 0, \quad x \in \Gamma^2. \tag{23}$$

Уравнение (23) получается при решении внешней однородной задачи Неймана в $R^2 \Big\backslash \left(\bigcup\limits_{n=1}^{N_2} \overline{D_n^2} \right)$ для уравнения Лапласа с помощью потенциала простого слоя. Как показано в лемме 5 из работы [11], уравнение (23) имеет только тривиальное решение. Следовательно, $\nu^0(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma$. В результате у однородного уравнения (13) нет нетривиальных решений и, по альтернативе Фредгольма, уравнение (13) является однозначно разрешимым для любой функции $f(x) \in C^0(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

Поскольку в соответствии с леммой уравнение (13) однозначно разрешимо, то из теоремы 2 вытекает разрешимость задачи S^{ext}.

Теорема 3. *Если $f_1(x) \in C^0(\Gamma^1)$ и $f_2(x) \in C^0(\Gamma^2)$, то решение задачи S^{ext} существует и дается формулой (8), где $\nu(x) \in C^0(\Gamma)$ — решение однозначно разрешимого уравнения (13).*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 99-01-01063).

Литература

1. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1991. **31**, № 1. С. 109.
2. *Крутицкий П.А.* // Дифф. уравнения. 1998. **34**, № 12. С. 1624.
3. *Krutitskii P.A.* // Z. Anal. Anw. 1998. **16**, No. 2. P. 361.
4. *Владимиров B.C.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
6. *Чикилев А.О., Крутицкий П.А.* // Препр. Ин-та прикл. матем. им. М.В. Келдыша РАН. 1999, № 60.
7. *Крутицкий П.А., Чикилев А.О.* // Дифф. уравнения. 2000. **36**, № 9. С. 1196.
8. *Gilbarg D., Hörmander L.* // Arch. Rat. Mech. Anal. 1980. **74**, No. 4. P. 297.
9. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
10. *Габов С.А.* // Матем. сб. 1977. **103(145)**, № 4. С. 490.
11. *Крутицкий П.А.* // Матем. заметки. 1996. **60**, № 1. С. 40.

Поступила в редакцию
10.11.00

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 535.34, 535.37: 547.832.1

СПЕКТРОСКОПИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АГРЕГАЦИИ БИСЦИАНИНОВЫХ КРАСИТЕЛЕЙ В РАСТВОРАХ

К. Г. Блинова, А. А. Ищенко, И. Л. Мушкало,
С. В. Пацаева, А. В. Пехота, В. И. Южаков

(*кафедра общей физики*)

E-mail: xenia@mailru.com

Исследованы спектрально-люминесцентные свойства четырех бисцианиновых красителей, являющихся химически связанными димерами, а также соответствующего мономерного красителя. Измерены электронные спектры поглощения и люминесценции водных и этанольных растворов красителей. Изучены процессы ассоциации мономерных и димерных красителей при повышении концентрации растворов.

Органические соединения с двумя сопряженными хромофорами представляют большой интерес для решения различных прикладных задач, связанных с преобразованием световой энергии, так как могут эффективно переизлучать ее с большим «красным» сдвигом [1, 2]. К числу таких соединений относятся бисцианиновые красители (бисцианины), которые являются уникальными объектами для изучения взаимодействия хромофоров, поскольку их полосы поглощения четко разрешены и обладают большой интенсивностью и селективностью. К настоящему времени установлены основные связи между характеристиками полос поглощения этих красителей с расстоянием и углом между их хромофорами [3]. В спектрах люминесценции, однако, подобные закономерности практически не выяснены. Кроме того, не исследовано влияние ассоциации молекул бисцианинов в так называемые физические агрегаты при увеличении концентрации раствора на их спектрально-люминесцентные свойства. В настоящей работе представлены результаты исследования люминесцентных свойств растворов бисцианинов и процессов агрегации их молекул при высоких концентрациях.