

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ.  
МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ2. Мера необходимости: определение, свойства,  
интегрирование по возможности и по необходимости

Ю. П. Пытьев

(кафедра компьютерных методов физики)

Рассмотрены понятия возможности и необходимости события, в том числе нечеткого, понятия интегралов по возможности и по необходимости.

## Введение

В 1965 г. Л. Заде предложил новый подход к формализации нечеткости, основанный на понятии нечеткого множества [1]. Как известно, любое подмножество  $A$  множества  $X$  можно задать с помощью его характеристической функции (х.ф.)  $\chi_A(\cdot) : X \rightarrow \{0, 1\}$ , определив  $\chi_A(x) = 1$  для  $x \in A$  и  $\chi_A(x) = 0$  для  $x \in X \setminus A$ ,  $x \in X$ . Нечеткое (под)множество  $A$  также определяется его х.ф.  $\mu_A(\cdot) : X \rightarrow [0, 1]$ , значение которой  $\mu_A(x) \in [0, 1]$  интерпретируется как «степень включения»  $x \in X$  в  $A$ . Тот факт, что любой элемент  $x \in X$  может принадлежать нечеткому множеству  $A$  лишь «отчасти», позволяет моделировать сложные объекты в терминах характеристик, значения которых свойственны им лишь «до некоторой степени», «частично».

Теоретико-множественные операции над нечеткими множествами определяются согласно следующим правилам:

$$\begin{aligned} \text{а) } A = B &: \mu_A(x) = \mu_B(x), \\ \text{б) } A \subset B &: \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \\ \text{в) } \mu_{A \cup B}(x) &= \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \\ \text{г) } \mu_{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}(x) &= \sup_{\alpha} \mu_{A_{\alpha}}(x), \\ \text{д) } \mu_{A \cap B}(x) &= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \\ \text{е) } \mu_{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}}(x) &= \inf_{\alpha} \mu_{A_{\alpha}}(x). \end{aligned} \quad x \in X. \quad (1)$$

Здесь  $A, B$  — нечеткие (под)множества  $X$ , и обозначения теоретико-множественных операций, введенные в левом столбце, расшифровываются в правом. Заметим, что, заменив в определениях (1)  $\mu(\cdot)$  на «обычную» х.ф.  $\chi(\cdot)$ , получим соответствующие операции над «обычными», «четкими», множествами, согласно которым  $\max(\chi_A, \chi_B)$  и  $\min(\chi_A, \chi_B)$  — х.ф. объединения  $A \cup B$  и пересечения  $A \cap B$  соответственно, условие  $\chi_A \leq \chi_B$  эквивалентно включению  $A \subset B$  и т.д.

Нечеткость может быть охарактеризована в терминах возможности, если значение  $\mu_A(x)$  интерпретировать как величину «возможности включения» элемента  $x \in X$  в  $A$ . Другая точка зрения на нечеткость, также позволяющая охарактеризовать ее в терминах возможности, опирается на понятие нечеткого элемента, ана-

логичное понятию случайного элемента в теории вероятностей. Нечеткий элемент  $\xi$ , принимающий значения в  $X$ , может быть задан распределением возможностей (его значений) — функцией  $\mu^{\xi}(\cdot) : X \rightarrow [0, 1]$ , значение  $\mu^{\xi}(x)$  которой для каждого  $x \in X$  определяет возможность равенства  $\xi = x$ .

Обе эти точки зрения можно согласованно представить в теории возможностей. Если  $A$  — «четкое» подмножество  $X$ ,  $\chi_A(\cdot)$  — его х.ф., то возможность включения  $\xi \in A$  определяется величиной  $\sup_{x \in A} \mu^{\xi}(x) = \sup_{x \in X} \min(\mu^{\xi}(x), \chi_A(x))$ . Соответственно значение  $\sup_{x \in X} \min(\mu^{\xi}(x), \mu_A(x))$  определит возможность включения  $\xi$  в нечеткое подмножество  $A \subset X$  (значение  $\min$  равно возможности того, что  $\xi = x$  и  $x \in A$ , величина  $\sup$  определяет возможность включения  $\xi \in A$ ). Если, однако, нечеткий элемент  $\xi$  таков, что  $y \in X$  — единственное «возможное» его значение, т.е. если  $\mu^{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$ ,  $x \in X$ , то  $\xi$ , по существу, «четкий» элемент  $y \in X$ , и возможность его включения в  $A$ , равная  $\sup_{x \in X} \min(\mu^{\xi}(x), \mu_A(x)) = \mu_A(y)$ , совпадает с возможностью включения элемента  $y \in X$  в нечеткое множество  $A$ .

На связь теории нечетких множеств с теорией возможностей впервые указал Л. Заде в работе [2].

В настоящей работе рассмотрены понятия возможности и необходимости события, в том числе и нечеткого, а также понятия интеграла по возможности и по необходимости. При ссылке на работу [3] используется двойная нумерация: (3.1) — формула (1) из [3], теорема 3.1 — теорема 1 из [3] и т.д.

## О возможности нечеткого события

Свойства возможности нечетких событий (см. определение 3.2) по существу отражены в теореме 3.1. Следует лишь оформить их в терминах операций над нечеткими событиями, определяемых ниже (ср. с (1)).

Пусть  $f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$  — х.ф. нечетких событий. Их объединение и пересечение задаются х.ф.  $(f \uparrow g)(\cdot)$  и  $(f \bullet g)(\cdot)$  соответственно<sup>\*</sup>). При этом для возможности объединения и пересечения получим

$$\begin{aligned} p((f \uparrow g)(\cdot)) &= \max(p(f(\cdot)), p(g(\cdot))) \\ &= p(f(\cdot)) \uparrow p(g(\cdot)), \\ p((f \bullet g)(\cdot)) &\leq \min(p(f(\cdot)), p(g(\cdot))) \\ &= p(f(\cdot)) \bullet p(g(\cdot)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если  $f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots$  — последовательность х.ф., отвечающая последовательности нечетких событий, то последняя называется сходящейся, если сходится последовательность  $f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots$ ; ее предел  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_N \inf_{n \geq N} f_n(x) = \inf_N \sup_{n \geq N} f_n(x)$ ,  $x \in X$ , называется х.ф. предела последовательности нечетких событий. При этом согласно теореме 3.1  $p(f(\cdot)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} p(f_n(\cdot)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} p(f_n(\cdot))$ . Для любой последовательности нечетких событий с х.ф.  $f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots$   $\liminf_{n \rightarrow \infty} p(f_n(\cdot)) \geq p(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(\cdot))$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} p(f_n(\cdot)) \geq p(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(\cdot))$ , но  $p(\sup_n f_n(\cdot)) = \sup p(f_n(\cdot))$ . Если же  $f_1(\cdot) \leq f_2(\cdot) \leq \dots$ , и  $f(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\cdot)$ , то  $p(f(\cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(f_n(\cdot))$ .

Отметим, наконец, что если  $f_n(x) \rightarrow 1 \equiv 1(x)$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $x \in X$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(f_n(\cdot))$  существует и равен  $p(1(\cdot)) = 1$ , в то время как из сходимости  $f_n(x) \rightarrow 0 \equiv 0(x)$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $x \in X$ , следует лишь, что  $p(0(\cdot)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} p(f_n(\cdot))$ , и вообще  $p(0(\cdot)) \leq p(f(\cdot))$ ,  $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ ; если не оговорено противное, считается, что  $p(0(\cdot)) = 0$ .

Далее будет показано, что возможность любого нечеткого события, заданного х.ф.  $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ , может быть определена формулой (3.12)  $p(f(\cdot)) = p_\varphi(f(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(f(x), \varphi(x))$ , в которой  $\varphi(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$  — распределение возможности  $P(\cdot)$ .

### Мера необходимости: определение и свойства

Рассмотрим полукольцо  $\mathcal{R}_{(n)}$ , двойственное  $\mathcal{R}_{(p)}$ , с операцией сложения « $\uparrow$ », определенной как « $\min$ », и операцией умножения « $\bullet$ », определенной как « $\max$ », с нейтральными элементами  $\mathbf{0} = 1$  и  $\mathbf{1} = 0$  и порядком (согласованным с операциями « $\uparrow$ » и « $\bullet$ »), обратным естественному (ибо иначе  $\mathbf{0} > \mathbf{1}$ ). При таком определении выполнены как все свойства операций « $\uparrow$ » и « $\bullet$ » и нейтральных элементов (3.1), (3.2), (3.3), так и условия (3.4). Класс  $\mathcal{M}(X)$  функций на  $X$  со значениями в  $\mathcal{R}_{(n)}$  определим аналогично тому, как в [3] определен класс  $\mathcal{L}(X)$ , но, сохраняя обозначения  $\max$ ,  $\min$ ,  $\sup$  и  $\inf$ , отвечающие естественному порядку на  $[0,1]$ , вместо условий (3.5) будем считать, что  $(f \uparrow g)(x) = f(x) \uparrow g(x) = \min(f(x), g(x))$ ;

$(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x) = \max(f(x), g(x))$ ,  $x \in X$ , и соответственно вместо (3.6)  $\biguparrow_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \inf_n f_n(x) \in \mathcal{M}(X)$ ,  $\bigdownarrow_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x) \in \mathcal{M}(X)$ ,  $x \in X$ , если  $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{M}(X)$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Определим меру  $n(\cdot)$  как линейную счетно-аддитивную функцию на  $\mathcal{M}(X)$ , принимающую значения в  $\mathcal{R}_{(n)}$ , т.е. такую, что

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathcal{R}_{(n)}, \forall f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{M}(X) \\ n((a \bullet f(\cdot)) + (b \bullet g(\cdot))) &= (a \bullet n(f(\cdot))) + (b \bullet n(g(\cdot))), \\ \forall \{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{M}(X) \quad (2) \\ n(\inf_n f_n(\cdot)) &= n(\biguparrow_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot)) = \\ &= \biguparrow_{n=1}^{\infty} n(f(\cdot)) = \inf_n n(f_n(\cdot)). \end{aligned}$$

Значение  $N(A) = n(\chi_A(\cdot))$  назовем мерой необходимости события  $A \in \mathcal{A}$ , или, короче, необходимостью  $A$ ; в общем случае  $n(f(\cdot))$  назовем необходимостью нечеткого события с х.ф.  $f(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$ .

**Т е о р е м а 1.** Мера  $n(\cdot)$ :

1. монотонно не убывает на  $\mathcal{M}(X)$ : если<sup>\*\*</sup>)  $f(\cdot) \geq g(\cdot)$ , то  $n(f(\cdot)) \geq n(g(\cdot))$ ;
2. непрерывна относительно сходимости монотонно невозрастающей последовательности:  $f_{t+1}(\cdot) \leq f_t(\cdot)$ ,  $t = 1, 2, \dots \Rightarrow n(\lim_{t \rightarrow \infty} f_t(\cdot)) = \lim_{t \rightarrow \infty} n(f_t(\cdot))$ ;
3. полунепрерывна сверху:  $n(\lim_{t \rightarrow \infty} f_t(\cdot)) \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} n(f_t(\cdot))$ .

Доказательство следует из определения 1 и теоремы 3.1. ■

**Т е о р е м а 2.** Имеют место следующие свойства  $N(\cdot)$ .

1.  $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$ ,  
 $N(A \cup B) \geq \max(N(A), N(B))$ ;  
 $A \subset B \Rightarrow N(A) \leq N(B)$ ,  $A, B \in \mathcal{A}$ ;  
 $N(X) = N((X \setminus A) \cup A) \geq \max(N(X \setminus A), N(A))$ .
2. Необходимость  $N(\cdot)$  счетно аддитивна:  
 $N(\biguparrow_{n=1}^{\infty} A_n) = N(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \inf_n N(A_n) = \biguparrow_{n=1}^{\infty} N(A_n)$ .

Если  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  и  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ , то из счетной аддитивности и монотонности  $N(\cdot)$  следует непрерывность  $N(\cdot)$  относительно такой сходимости:  $N(A) = \inf_n N(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} N(A_n)$ .

3. В общем случае, если  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ , то

$$N(A) \geq \inf_N \sup_{n \geq N} N(A_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} N(A_n), \quad (3)$$

т.е.  $N(\cdot)$  — полунепрерывна сверху. Поэтому значение  $N(X)$  можно определить любым числом из  $[\sup_{A \in \mathcal{A}} N(A), 1]$ .

<sup>\*</sup>) Определение операций « $\uparrow$ » и « $\bullet$ » и класса  $\mathcal{L}(X)$  см. в работе [3].

<sup>\*\*</sup>) Неравенство  $\geq$  здесь и далее понимается как отвечающее естественному порядку на  $[0,1]$ , условие  $f(\cdot) \geq g(\cdot)$  означает, что  $f(x) \geq g(x)$ ,  $x \in X$ .

Доказательство следует из определения 1 и теоремы 3.2. ■

В то же время, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$ , то, с одной стороны, согласно (3)  $N(\emptyset) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} N(A_n)$ , а с другой,  $N(\emptyset) \leq N(A_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и тем самым  $N(\emptyset) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} N(A_n)$ . Следовательно, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$ , то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} N(A_n) = N(\emptyset)$ . Естественно определить  $N(\emptyset) = 0$ . (Очевидно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} N(A_n)$  не зависит от последовательности  $A_1, A_2, \dots \rightarrow \emptyset$ .)

Заметим, что мера  $n(\cdot)$ , определенная как двойственная  $p(\cdot)$ ,  $n(f(\cdot)) = \neg p(\neg f(\cdot))$ ,  $f(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$ , удовлетворяет условиям (2), если  $p(\cdot)$  удовлетворяет условиям (3.7), (3.8). Соответственно  $N(A) = \neg P(X \setminus A)$  — необходимость  $A$ , если  $P(A)$  — возможность  $A \in \mathcal{A}$ . Эти замечания позволяют рассматривать теоремы 1 и 2 как двойственные теоремам 3.1 и 3.2 соответственно.

Следующие соображения логического характера лежат в основе определения меры необходимости. Если  $P(A)$  оценивает возможность того, что  $A \in \mathcal{A}$  истинно, то «остаток»  $D(A) = 1 - P(A)$  естественно считать мерой сомнения в истинности  $A$ , а меру сомнения в истинности  $X \setminus A$  — мерой необходимости  $A$ :  $N(A) = D(X \setminus A) = \neg P(X \setminus A)$ .

**Пример 1.** Мера  $n(f) = n_\psi(f(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max(f(x), \psi(x))$ , где  $\psi(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$  — фиксированная функция, удовлетворяет условиям определения 1. ■

Если, в частности,  $p(f(\cdot)) = p_\varphi(f(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(f(x), \varphi(x))$ , то

$$n(f(\cdot)) = n_{\neg\varphi}(f(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max(f(x), \neg\varphi(x)), \quad (4)$$

причем, если  $\sup_{x \in X} \varphi(x) = 1$ , то  $n_{\neg\varphi}(f(\cdot)) = \neg p_\varphi(\neg f(\cdot)) \leq p_\varphi(f(\cdot))$ ,  $f(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$ . Действительно, так как

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} \min(f(x), \varphi(x)) + \sup_{x \in X} \min(\neg f(x), \varphi(x)) &\geq \\ &\geq \sup_{x \in X} (\min(f(x), \varphi(x)) + \min(\neg f(x), \varphi(x))) \geq \\ &\geq \sup_{x \in X} \min(f(x) + \neg f(x), \varphi(x)) = \sup_{x \in X} \varphi(x), \end{aligned}$$

то для любой функции  $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$   $p_\varphi(f(\cdot)) + p_\varphi(\neg f(\cdot)) \geq 1$ , если  $\sup_{x \in X} \varphi(x) = 1$  (здесь «+» — символ «обычного» сложения). ■

Если  $P(A) = P_\varphi(A) = \sup_{x \in A} \varphi(x)$ , то  $N(A) = N_{\neg\varphi}(A) = \inf_{x \in X \setminus A} \neg\varphi(x)$ .

Далее возможность и необходимость, если не оговорено противное, предполагаются связанными условиями двойственности\*)

$$n(f(\cdot)) = \neg p(\neg f(\cdot)), \quad f(\cdot) \in \mathcal{M}(X) = \mathcal{L}(X),$$

$$N(A) = \neg P(X \setminus A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Отметим, что поскольку

$$\max(P(A), P(X \setminus A)) = P(X) = 1, \quad A \in \mathcal{A}, \quad (5)$$

то сумма  $(P(A) + P(X \setminus A)) \geq 1$ . Следовательно,  $N(A) = \neg P(X \setminus A) \leq P(A)$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Кроме того,  $\min(N(A), N(X \setminus A)) = \min(\neg P(X \setminus A), \neg P(A)) = \neg \max(P(X \setminus A), P(A)) = 0$ .

Заметим, наконец, что поскольку согласно условию (5) сумма  $(N(A) + P(X \setminus A))$  равна единице,  $A \in \mathcal{A}$ , то, учитывая (5), для любого  $A \in \mathcal{A}$  найдем:  $N(A) > 0 \Leftrightarrow P(X \setminus A) < 1 \Rightarrow P(A) = 1$ ;  $P(A) < 1 \Rightarrow \Rightarrow P(X \setminus A) = 1 \Leftrightarrow N(A) = 0$ .

### Интегрирование по возможности и по необходимости

Выражение (3.12)  $p_\varphi(f(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(f(x), \varphi(x))$  можно понимать как «интеграл» функции  $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$  по возможности  $P(\cdot)$ , заданной распределением  $\varphi(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ . Понятие интеграла по возможности  $P(\cdot)$  можно ввести и в общем случае, причем в полной аналогии с понятием интеграла Лебега. Для этого заметим, что согласно равенствам (3.14) для  $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ :  $\bigoplus_{k=1}^n (\alpha_k^{(n)} \bullet \chi_{A_k^{(n)}}(x)) = \underline{f}_n(x) \leq f(x) \leq \overline{f}_n(x) = \bigoplus_{k=1}^n (\alpha_{k-1}^{(n)} \bullet \chi_{A_k^{(n)}}(x))$ ,  $x \in X$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и вследствие линейности  $p(\cdot)$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} \min(\alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)})) &= \\ = p(\underline{f}_n(\cdot)) \leq p(f(\cdot)) \leq p(\overline{f}_n(\cdot)) &= \\ = \max_{1 \leq k \leq n} \min(\alpha_{k-1}^{(n)}, P(A_k^{(n)})), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

**Определение 2.** Функцию  $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$  назовем *интегрируемой по возможности*  $P(\cdot)$  ( $P$ -интегрируемой), если для любой последовательности разбиений  $[0, 1] \ 1 = \alpha_0^{(n)} \geq \alpha_1^{(n)} \geq \dots \geq \alpha_n^{(n)} = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , такой, что  $\varepsilon^{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} (\alpha_{k-1}^{(n)} - \alpha_k^{(n)}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , левая и правая части (6) стремятся к одному пределу. Этот предел назовем интегралом  $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$  по возможности  $P(\cdot)$  ( $P$ -интегралом), последний, разумеется, равен  $p(f(\cdot))$ .

Интеграл  $p_Q(f(\cdot))$  ( $P$ -интеграл) по подмножеству  $Q \subset X$ ,  $Q \in \mathcal{A}$ , определим равенством  $p_Q(f(\cdot)) = p(\chi_Q \bullet f(\cdot))$ . Если  $Q$  — нечеткое (под)множество  $X$ ,  $\varphi_Q(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$  — его х.ф., то  $p_Q(f(\cdot)) = p(\varphi_Q \bullet f(\cdot))$  — интеграл  $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$  ( $P$ -интеграл) по нечеткому множеству  $Q$ .

**Теорема 3.** Любая функция  $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$   $P$ -интегрируема.

\*) Имеет место тождество  $\neg(\neg f \oplus \neg g)(\cdot) = (f \bullet g)(\cdot)$ , верное при определении операций  $\oplus$  и  $\bullet$  как  $\max$  и  $\min$  или как  $\min$  и  $\max$  соответственно, т. е. как в  $\mathcal{R}_{(p)}$ , так и в  $\mathcal{R}_{(n)}$ .

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \min(\alpha_{k-1}^{(n)}, P(A_k^{(n)})) - \\ &\quad - \max_{1 \leq k \leq n} \min(\alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)})) \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \min(\alpha_{k-1}^{(n)} - \alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)})) \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} (\alpha_{k-1}^{(n)} - \alpha_k^{(n)}) = \varepsilon^{(n)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (7)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Дело в том, что для любых  $x, y, z \in [0, 1]$   $\min(x + y, z) \leq \min(x, z) + \min(y, z)$ , поэтому  $\min(\alpha_{k-1}^{(n)}, P(A_k^{(n)})) \leq \min(\alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)})) + \min(\alpha_{k-1}^{(n)} - \alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)}))$  и тем более  $\max_{1 \leq k \leq n} \min(\alpha_{k-1}^{(n)}, P(A_k^{(n)})) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \min(\alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)})) + \max_{1 \leq k \leq n} \min(\alpha_{k-1}^{(n)} - \alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)}))$ , что и записано в (7); в формулах, следующих за (7), «+» и «-» символизируют «обычные» операции сложения и вычитания. ■

Таким образом, между  $p(f(\cdot))$ ,  $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ , и  $P(A)$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , установлено взаимно однозначное соответствие:  $p(f(\cdot))$  есть интеграл  $f(\cdot)$  по  $P(\cdot)$ ,  $P(A) = p(\chi_A(\cdot))$ ,  $\chi_A(\cdot)$  — х.ф.  $A \in \mathcal{A}$ .

Что касается свойств интеграла  $p(f(\cdot))$ , то они наследуются как свойства меры  $p(\cdot)$ . Это линейность:

$$p((a \bullet f(\cdot)) \dagger (b \bullet g(\cdot))) = (a \bullet p(f(\cdot))) \dagger (b \bullet p(g(\cdot))),$$

$$a, b \in [0, 1], f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{L}(X),$$

и счетная аддитивность:

$$p\left(\dagger_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot)\right) = \dagger_{n=1}^{\infty} p(f_n(\cdot)), \quad f_n(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \quad n = 1, 2, \dots$$

(см. определение 3.1). Отметим также, что  $\forall f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$  интеграл  $p_Q(f(\cdot))$  есть счетно-аддитивная функция множества  $Q \in \mathcal{A}$ :

$$p \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n (f(\cdot)) = \dagger_{n=1}^{\infty} p_{Q_n}(f(\cdot)).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} p \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n (f(\cdot)) &= p\left(\left(\dagger_{n=1}^{\infty} \chi_n\right) \bullet f(\cdot)\right) = \\ &= p\left(\dagger_{n=1}^{\infty} (\chi_n \bullet f)(\cdot)\right) = \dagger_{n=1}^{\infty} p((\chi_n \bullet f)(\cdot)) = \dagger_{n=1}^{\infty} p_{Q_n}(f(\cdot)), \end{aligned}$$

где  $\chi_n(\cdot)$  — х.ф. множества  $Q_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Очевидно, счетная аддитивность  $p_Q(f(\cdot))$  сохраняется и для нечеткого множества  $Q$ . Для доказательства достаточно  $\chi_n(\cdot)$  заменить на х.ф.  $\varphi_n(\cdot)$  нечеткого множества  $Q_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Согласно теореме 3.1 и свойству (3.7) линейности  $p(\cdot)$  для любых  $f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$  можно определить их скалярное произведение  $(f, g)$  как интеграл  $(f \bullet g)(\cdot)$ :  $(f, g) = p((f \bullet g)(\cdot))$ . При этом, естественно,  $\|f\| = \|f\| \bullet \|f\| = (f, f) = p((f \bullet f)(\cdot)) = p(f(\cdot))$  и аналогично  $\|g\| = p(g(\cdot))$ . Поэтому имеет место аналог

неравенства Коши–Буняковского  $(f, g) \bullet (f, g) = (f, g) = p((f \bullet g)(\cdot)) \leq p(f(\cdot)) \bullet p(g(\cdot)) = \|f\| \bullet \|g\|$ .

Другое понятие интеграла введено и исследовано в работах [4, 5].

Определим теперь понятие интеграла по необходимости  $N(\cdot)$ , двойственное понятию интеграла по возможности. Для любой функции  $g(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$  последовательности

$$\begin{aligned} \underline{g}_n(x) &= \dagger_{k=1}^n (\beta_{k-1}^{(n)} \bullet \chi_{B_k^{(n)}}(x)) = \min_{1 \leq k \leq n} \max(\beta_{k-1}^{(n)}, \chi_{B_k^{(n)}}(x)), \\ \bar{g}_n(x) &= \dagger_{k=1}^n (\beta_k^{(n)} \bullet \chi_{B_k^{(n)}}(x)) = \min_{1 \leq k \leq n} \max(\beta_k^{(n)}, \chi_{B_k^{(n)}}(x)), \\ &\quad x \in X, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

в которых  $0 = \beta_0^{(n)} \leq \beta_1^{(n)} \leq \dots \leq \beta_{n-1}^{(n)} \leq \beta_n^{(n)} = 1$ ,  $B_k^{(n)} = \{x \in X, g(x) \leq \beta_{k-1}^{(n)}\} \cup \{x \in X, g(x) > \beta_k^{(n)}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , удовлетворяют условию  $\underline{g}_n(x) \leq g(x) \leq \bar{g}_n(x)$ ,  $x \in X$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и при  $n \rightarrow \infty$  равномерно сходятся к  $g(\cdot)$ , монотонно возрастая и соответственно монотонно убывая, если  $\max_{1 \leq k \leq n} (\beta_k^{(n)} - \beta_{k-1}^{(n)}) = \varepsilon^{(n)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Определение интеграла по необходимости  $N(\cdot)$  основано на соотношениях

$$\begin{aligned} \dagger_{k=1}^n (\beta_{k-1}^{(n)} \bullet N(B_k^{(n)})) &= n(\underline{g}_n(\cdot)) \leq n(g(\cdot)) \leq n(\bar{g}_n(\cdot)) = \\ &= \dagger_{k=1}^n (\beta_k^{(n)} \bullet N(B_k^{(n)})), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

вытекающих из свойств необходимости  $n(\cdot)$ , отмеченных в теореме 1.

О п р е д е л е н и е 2'. Функцию  $g(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$  назовем интегрируемой по необходимости  $N(\cdot)$  ( $N$ -интегрируемой), если для любой последовательности разбиений  $[0, 1]$   $0 = \beta_0^{(n)} \leq \beta_1^{(n)} \leq \dots \leq \beta_{n-1}^{(n)} \leq \beta_n^{(n)} = 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , такой, что  $\varepsilon^{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} (\beta_k^{(n)} - \beta_{k-1}^{(n)}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , левая и правая части (8) стремятся к одному пределу. Этот предел, равный, очевидно,  $n(g(\cdot))$ , назовем интегралом  $g(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$  по необходимости  $N(\cdot)$  ( $N$ -интегралом).

Интегралом  $g(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$  по подмножеству  $Q \subset X$ ,  $Q \in \mathcal{A}$  назовем  $n_Q(g(\cdot)) = n(\chi_{X \setminus Q} \bullet g(\cdot))$ . Если  $Q$  — нечеткое подмножество  $X$ ,  $\varphi_Q(\cdot)$  — его х.ф., то  $n_Q(g(\cdot)) = n(\neg \varphi_Q \bullet g(\cdot))$  — интеграл по нечеткому множеству  $Q$ .

Т е о р е м а 3'. Любая функция  $g(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$   $N$ -интегрируема.

Доказательство этой теоремы, двойственной теореме 3, сводится к доказательству последней путем следующих переобозначений:  $g(\cdot) = \neg f(\cdot)$ ,  $\beta_k^{(n)} = \neg \alpha_k^{(n)}$ ,  $B_k^{(n)} = X \setminus A_k^{(n)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $n(g(\cdot)) = \neg p(\neg f(\cdot))$ .

З а м е ч а н и е. В рассматриваемой теории в силу определения операций сложения « $\dagger$ » как  $\max(\min)$  и умножения « $\bullet$ » как  $\min(\max)$  конкретные значения  $x, y \in \mathcal{R}_{(p)}$  ( $\mathcal{R}_{(n)}$ ) не важны. В частности, при сравнении

$x$  и  $y$  имеют смысл лишь отношения порядка  $>$ ,  $=$  или  $<$ . Иначе говоря, все конструкции рассматриваемой теории возможностей должны быть инвариантны относительно любого сохраняющего порядок отображения  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке и технологии (отдел В. В. Бойко).

УДК 519.6:616

## ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИММУНОЛОГИИ

О. С. Васильев, В. Б. Гласко, Ю. В. Гласко, В. М. Земсков, С. В. Родионов

(кафедра математики)

Предложена математическая модель для процесса активации иммунокомпетентных клеток. Поставлена обратная задача идентификации модели с объектом на основе показаний проточного цитометра и установлена ее корректность. Проведен математический эксперимент.

1. Современная качественная теория защитной реакции организма на проникновение чужеродных микрорезультатов (антигенов), учитывающая сложные взаимодействия формируемых организмом «иммунокомпетентных» клеток и молекул (антител) разработана в работе [1].

В работах [2–3] на этой основе развита возможная математическая модель механизма иммунной защиты, описываемая задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящей от 10 числовых параметров. Сформулирована обратная задача идентификации модели по указанным параметрам с состоянием конкретного организма. Численные эксперименты по решению такой задачи с учетом ее математической некорректности [4] выполнены в работе [2] и в более общей постановке — в [5]. Показано, что идентификация позволяет изучать с помощью ЭВМ влияние на ход болезни различных химических препаратов.

Однако для решения этой задачи идентификации требуется экспериментальная информация о кинетике концентрации по крайней мере четырех агентов иммунного отклика, которая не всегда доступна в клинических условиях. В этой связи представляет интерес извлечение максимально возможной информации из данных, получаемых на действующих приборах.

О состоянии системы иммунной защиты организма можно судить, в частности, анализируя начальную стадию иммунной реакции — фазу «активации»: появление на мембране иммунокомпетентных клеток (например,  $T$ -лимфоцитов) синтезируемых клеткой молекул («экспрессия»). Анализ распределения  $T$ -клеток по уровню активации — количеству экспрессированных молекул на мембране клетки — дает информацию об изменении состояния иммунной системы пациента [6] по отношению к нормальному. Этим путем может быть решена и более общая задача профилактики, обозна-

### Литература

1. Zadeh L. A. // Information and Control. 1965. 8. P. 335.
2. Zadeh L. A. // Fuzzy Sets and Systems. 1978. 1. P. 3.
3. Пытнев Ю. П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. N 3).
4. Sugeno M. // Trans. S.I.C.E. 1972. 8, N 2. P. 95.
5. Sugeno M. // Trans. S.I.C.E. 1975. 11, N 1. P. 32.

Поступила в редакцию  
16.10.96

ченная в работе [2]: определение «иммунного статуса» населения конкретного региона.

Первичные сведения такого рода могут быть получены путем экспериментального анализа состава крови с помощью «проточного цитометра» (ПЦ). Если соответствующие клетки крови «пометить» некоторым химическим способом, то ПЦ, управляющий лазерным лучом, подсчитывает число клеток, соответствующих некоторому заданному диапазону активации. Эти данные отражаются в «гистограммах» — графиках ступенчатых функций.

На рис. 1 представлен полученный по ПЦ фрагмент гистограммы, соответствующей нормальному состоянию организма. Для этого состояния, как и для начальной стадии заболевания, характерно монотонное убывание числа активированных клеток с возрастанием активности. Видимые колебания естественно отнести на счет погрешности эксперимента.

Погрешность гистограмм, не позволяющая раскрыть тонкую структуру детерминированного распределения  $T$ -клеток, и дороговизна эксперимента делают актуальной разработку биологически адекватной модели активации.

В настоящей работе делается первая попытка создания простейшей модели такого рода и ее идентификации с показаниями проточного цитометра.

2. Ввиду однородности состава крови в организме пациента отнесем наши рассуждения к произвольному элементарному ее объему и процесс активации, развивающийся во времени, будем характеризовать двумя величинами:  $A = A(t)$  — количеством молекул активации на мембране клетки, и  $n = n(A(t), t)$  — количеством иммунокомпетентных клеток, активированных на уровне  $A$ .