ПРИГЛАШЕННЫЙ ОБЗОР

УДК 517.9; 519.2; 531

ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ
I. ХАОС

А. Ю. Лоскутов

(*кафедра физики полимеров и кристаллов*)

E-mail: loskutov@moldyn.phys.msu.su

Работа представляет собой первую часть обзора, посвященного некоторым современным проблемам нелинейной динамики: хаотичности динамических систем и управлению такими системами. Приведены основные сведения по теории бифуркаций и ряд результатов, относящихся к развитию хаоса в таких системах. Изложены некоторые важные свойства хаотических динамических систем, рассмотрены методы их описания и некоторые положения эргодической теории.

Содержание

Введение

Говоря о таком широко распространенном явлении, как хаос, в настоящее время имеют в виду не только принципиальные и фундаментальные вопросы статистической физики, но и всевозможные приложения и конкретные задачи механики, астрофизики, физики плазмы, оптики, биологии и др. Появление хаотичности в той или иной системе не связано с действием каких-либо априори случайных сил. Природа хаотического поведения полностью детерминированных систем кроется в свойстве приобретать при определенных значениях параметров экспоненциальную неустойчивость траекторий. Фундаментальное значение исследований в этой области состоит в том, что они выявляют природу случайного, дополняя гипотезу молекулярного хаоса гипотезой динамической стохастичности.

Впервые на связь между статистикой и неустойчивостью обратил внимание еще А. Пуанкаре [1]. В то же время статистический подход к описанию систем со многими степенями свободы был предложен Л. Больцманом [2]. Он выдвинул предположение, что движение частиц в разреженном газе следует рассматривать как случайное и каждой частице доступна вся энергетически разрешенная область фазового пространства. Такое представление о системах многих частиц известно как эргодическая гипотеза [2–4], которая стала основой классической статистической механики. Однако ее строгое обоснование долгое время не находило подтверждения. Некоторое продвижение в этом направлении было достигнуто благодаря исследованиям П. Эренфеста [5, 6] (см. также [7, 8]), которые позволяли, в частности, установить рамки применимости законов статистической механики. Однако известная работа Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама [9] (более подробно см. [10, 11]), где впервые была предпринята попытка проверки

За цикл работ «Управление динамическими системами, подавление хаоса и их приложения» А. Ю. Лоскутову в 1998 г. присуждена премия им. И. И. Шувалова 1-й степени.

эргодической гипотезы, вновь выдвинула проблему обоснования статистической физики на первый план.

Частичное разрешение этой проблемы можно получить, опираясь на работы А. Пуанкаре (см. [12]), в которых он показал, что в окрестности неустойчивых неподвижных точек движение имеет чрезвычайно сложный характер. Это явилось первым указанием на то, что нелинейные динамические системы могут проявлять хаотические свойства. Впоследствии Д. Биркгоф [13] показал, что при рациональном отношении частот (резонанс) всегда существуют устойчивые и неустойчивые неподвижные точки. Резонансы более высокого порядка последовательно изменяют топологию фазовых траекторий и приводят к образованию цепи островов в фазовом пространстве. Теория возмущений, как оказалось, такие резонансы не описывает, поскольку регулярные решения вблизи них сильно возмущены, а это влечет появление малых знаменателей и расходимость рядов.

Первое глубокое исследование природы статистических законов было проведено Н.С. Крыловым [14]. Он показал, что в их основе лежит свойство перемешивания и связанная с ним локальная неустойчивость почти всех траекторий соответствующих динамических систем. В этой же связи М. Борн [15] (см. также [16]) высказывал предположение о непредсказуемости поведения систем классической механики. Позднее динамика систем, вызванная такого рода неустойчивостью, стала называться динамической стохастичностью или детерминированным (динамическим) хаосом.

Физически осмысленное понятие детерминированного описания заключается в том, что начальное состояние процесса задается в силу неизбежных флуктуаций некоторым вероятностным распределением. Задача состоит в том, чтобы на основании известного начального распределения предсказать его эволюцию. Если малые возмущения начального условия с течением времени не нарастают (т. е. имеет место устойчивость), то поведение такой системы предсказуемо. В противном случае процесс может быть описан только вероятностным образом. По существу, именно эти соображения легли в основу современного представления о динамическом хаосе.

Новый этап в развитии понимания хаотичности и ее зарождения в детерминированных системах возник после работ А.Н. Колмогорова и Я.Г. Синая [17–19], где для динамических систем было введено понятие энтропии. Эти работы положили начало созданию теории стохастических динамических систем.

Большую роль в развитии теории детерминированного хаоса сыграли разного рода абстрактные математические конструкции. Так, чтобы опровергнуть гипотезу о плотности систем типа Морса–Смейла в пространстве C^r-диффеоморфизмов, был построен пример («подкова Смейла») [20], показывающий, что если g — диффеоморфизм плоскости, обладающий трансверсальной гомоклинической траекторией, то он должен иметь инвариантное множество типа подковы. В свою очередь, из существования подковы вытекает, что отображение g должно иметь как бесконечное число периодических точек различного периода, так и несчетное число апериодических траекторий [20, 21]. Вслед за «подковой Смейла» появились $\mathcal{Y}$-системы Аносова [22, 23], которые характеризуются наиболее выраженными свойствами перемешивания. Обобщение таких систем — введение «аксиомы А» Смейла [21] (см. также [24–26] и цитируемую там литературу) и гиперболических множеств [21, 25–27] — выделило важный класс динамических систем, обладающих свойством экспоненциальной неустойчивости траекторий.

Примерно в то же время стали появляться математические работы, где на основе изучения бильярдных систем были предприняты попытки обоснования статистической механики [28, 29]. Бильярды впервые появились как упрощенные модели, на которых можно изучать ряд задач статистической физики [13] (см. также ссылки в [30, 31]). С использованием таких систем впервые была решена задача Н.С. Крылова о перемешивании в системе упругих шариков [14]. Более того, было показано, что системы, отвечающие бильярдам с рассеивающими границами, имеют много общего с геодезическими потоками в пространствах отрицательной кривизны, т. е. потоками Аносова. Немного позже класс бильярдных систем, которые способны проявлять хаотические свойства, был значительно расширен (см. [31–33], а также цитированную там литературу). Посредством обобщения таких систем — модификации двумерного газа Лоренца — было доказано, что движение в чисто детерминированных системах может быть подобно броуновскому [30, 31]. Этот результат явился первым строгим подтверждением проявления хаотичности динамическими (т. е. без какого-либо случайного механизма) системами.

Дальнейшие как теоретические, так и экспериментальные исследования нелинейных систем показали, насколько типичным и всеобщим явлением оказывается хаотическое поведение в системах с небольшим числом степеней свободы. Стало очевидным, что хаотические свойства могут проявлять самые разнообразные нелинейные системы, и если хаос не обнаруживается, то, возможно, лишь потому, что он возникает либо в очень малых областях параметрического пространства, либо при нефизических значениях параметров.

Как же возникает хаотическое движение? Казалось бы, путей его возникновения должно быть очень много. Однако выяснилось, что число сценариев процесса хаотизации совсем невелико. Более того, некоторые из них подчиняются универсальным закономерностям и не зависят от природы системы. Одни и те же пути развития хаоса присущи самым разнообразным объектам. Универсальное поведение напоминает обычные фазовые переходы второго рода, а введение ренормгрупповых и скейлинговых методов, известных в статистической механике, открывает новые перспективы в изучении хаотической динамики.

Настоящая работа представляет собой первую часть обзора, посвященного теории хаотических динамических систем и проблеме управления такими системами. Первый раздел обзора содержит основные сведения по теории бифуркаций. Во втором разделе изложены некоторые важные свойства хаотических динамических систем, рассмотрены методы их описания и некоторые положения эргодической теории.

1. Бифуркации и развитие хаоса в динамических системах

Установление в динамической системе хаотического поведения в результате той или иной последовательности бифуркаций принято называть *картиной* или *сценарием* развития хаоса. В данной части рассматриваются наиболее типичные из таких сценариев.

1.1. Общие положения

Пусть M — метрическое пространство с определенным расстоянием между точками и $\{T^t\}$ — множество однопараметрических преобразований пространства M в себя такое, что $T^{t_1+t_2} = T^{t_1} \circ \circ T^{t_2} = T^{t_2} \circ T^{t_1}$ для любых t_1, t_2. Тогда T^t, M и $\{T^t\}$ называются отображением сдвига, фазовым пространством и динамической системой соответственно. В метрической теории динамических систем рассматривается также *пространство с мерой*, т.е. тройка $\{M, \mathcal{S}, \mu\}$, где $\mathcal{S}$ — σ-алгебра подмножеств M и μ — мера, определенная тем или иным образом на $\mathcal{S}$. При этом мера μ называется инвариантной мерой относительно преобразования T, если $\mu(C) = \mu(T^{-1}C)$ для любого $C \in \mathcal{S}$. Когда $\{t\}$ имеет дискретный ряд значений, $t \in \mathbf{Z}$, $t \equiv k$, то $\{T^k\}$ называется динамической системой с дискретным временем или *отображением*. Известным примером такой системы является преобразование интервала I в себя: $T_a\colon\ I \to I$, $I = [\alpha, \beta]$, $T_a = f(x, a)$, где a — некоторый параметр и $[\alpha, \beta] = M$. Тогда траектория отображения T_a^k определится как $T_a^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ раз}}$ для каждого k. В общем случае задание закона преобразования $T_a = \mathbf{f}(\mathbf{x}, a)$ определяет *траекторию* точки $\mathbf{x}$ из M по отношению к $\mathbf{f}$ как подмножество $\{T_a^k |\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Если множество $\{t\}$ принимает непрерывный ряд значений, то преобразование $\{T^t\}$ называется динамической системой с непрерывным временем или *потоком*. В этом случае рассматривается преобразование $T\colon\ \mathbf{R} \to \mathrm{Diff}(M)$, $t \mapsto T^t$. Поток $T^t\colon\ M \to M$ определяет на M касательное векторное поле, т.е. для любого $\mathbf{x} \in M$ равенство $(dT^t(\mathbf{x})/dt)|_{t=0} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a)$ определяет касательный вектор $\mathbf{v}(\mathbf{x}, a) \in \Sigma_{\mathbf{x}}(M)$ в точке $\mathbf{x} \in M$, где $\Sigma_{\mathbf{x}}(M)$ — касательное к M пространство. Следовательно, динамическая система с непрерывным временем задает систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно записать в более привычном виде как

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a), \qquad (1)$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $a \in \mathbf{R}$, с начальными условиями $\mathbf{x}(t_0) \equiv \mathbf{x}_0$. Для такой системы действие отображения сдвига T^t заключается в том, что любая точка $\mathbf{x}_0 \in M$ под действием T^t преобразуется в точку $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$, которая, очевидно, является решением системы (1). Таким образом, $T^t\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$.

Важным понятием теории диссипативных динамических систем является аттрактор. В настоящее время имеется несколько определений аттрактора, которые, по-видимому, не сводятся друг к другу (обзор по этому вопросу можно найти в публикациях [34–37]). Следуя [37], будем опираться в определении аттрактора на понятие поглощающей области. Область $U \subset M$ называется поглощающей, если $T^t\bar{U} \subset U$ для $t > 0$, где $\bar{U}$ — замыкание U. При этом множество $\bigcap\limits_{t>0} T^tU$ называется *максимальным аттрактором* в поглощающей области U. Множество $\mathcal{A}$ называется *аттрактором*, если существует поглощающая область U, в которой $\mathcal{A}$ — максимальный аттрактор. Область $B(\mathcal{A})$ называется *областью притяжения* аттрактора $\mathcal{A}$, если она состоит из таких точек, через которые проходят положительные полутраектории, стремящиеся к $\mathcal{A}$. Согласно этому определению, очевидно, устойчивые положения равновесия, устойчивые предельные циклы и устойчивые торы являются аттракторами системы (1).

Широко известным типом бифуркации являются бифуркации устойчивых стационарных точек (т.е. положений устойчивого равновесия динамических систем). Среди них наиболее распространенная — бифуркация Андронова–Хопфа (см., напр., [36–42]), возникающая при потере устойчивости стационарной точки типа фокус. Допустим, что поле $\mathbf{v}$ имеет стационарную точку $\mathbf{x}_0(a)$ для $a = a_0$, т.е. $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0(a_0)) = 0$. Определим оператор линеаризации как непрерывное отображение касательного к M пространства в себя: $d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)\colon \Sigma_{\mathbf{x}_0}M \to \Sigma_{\mathbf{x}_0}M$, где $d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0) = (\partial v_i/\partial x_j)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$. При этом линеаризованное уравнение будет иметь вид $\dot{\boldsymbol{\xi}} = d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma_{\mathbf{x}_0}M$ и отображение $d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)$ координатно независимо. Ответ на вопрос об устойчивости точки $\mathbf{x}_0$ дает известная теорема Ляпунова (см., напр., [37, 39, 42, 43]). Согласно этой теореме, если совокупность собственных значений (спектр) $\vartheta = \{\lambda_i\}$ оператора $d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)$ принадлежит левой полуплоскости, $\vartheta(d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)) \subset \{z \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}\, z < 0\}$, то точка $\mathbf{x}_0$ устойчива; если существует $\lambda \in \vartheta(d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0))$, для которого найдется $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, то точка $\mathbf{x}_0$ неустойчива. Наконец, возможно, что $\vartheta(d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)) \subset \{z \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}\, z \leqslant 0\}$ и существует $\lambda \in \vartheta(d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0))$ с $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. Такая ситуация является нетипичной, и устойчивость точки $\mathbf{x}_0$ не определяется по спектру собственных значений оператора $d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)$. В этом случае необходимо использовать дополнительные методы исследования (см., напр., [43–45]).

Допустим, что стационарная точка $\mathbf{x}_0$ поля $\mathbf{v}$ устойчива для значения $a < a_0$ и неустойчива для $a > a_0$. Тогда при $a = a_0$ некоторые из собственных значений $\{\lambda_i\}$ перейдут в правую полуплоскость. В этом случае имеет место бифуркация потери устойчивости точки $\mathbf{x}_0$, и основной вопрос состоит в исследовании поведения системы при $a > a_0$. Бифуркационная теорема Андронова–Хопфа утверждает, что если два комплексно сопряженных ненулевых собственных значения (λ, λ^*) удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda(a)|_{a<a_0} < 0$, $\operatorname{Re}\lambda(a)|_{a=a_0} = 0$, $\operatorname{Re}\lambda(a)|_{a>a_0} > 0$, $[d(\operatorname{Re}\lambda(a))/da]|_{a=a_0} > 0$, а остальная часть спектра остается в левой полуплоскости, то происходит рождение предельного цикла с периодом $\tau_0 = 2\pi/|\lambda(a_0)|$ и радиусом, растущим, как $\sqrt{a - a_0}$. Вопрос об устойчивости рождающегося при этом цикла решается путем определения знака первой ляпуновской величины L_1, процедура вычисления которой достаточно сложна и подробно описана в работах [38, 39, 46]. Если $L_1 < 0$, то цикл устойчив. Если же $L_1 > 0$, то рождающийся цикл неустойчив. В случае, когда $L_1 = 0$, при выполнении условия $[d(\operatorname{Re}\lambda(a))/da]|_{a=a_0} > 0$ имеет место локальная единственность рождающегося цикла, устойчивость которого определяется знаком второй ляпуновской величины L_2 [37, 38, 46]. Если же $L_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, то при $a = a_0$ существует семейство неизолированных циклов [38, 47].

С физической точки зрения интерес представляют лишь устойчивые предельные циклы, поскольку неустойчивые циклы обычно ненаблюдаемы. Поэтому будем полагать, что в результате бифуркации Андронова–Хопфа родился устойчивый предельный цикл. Бифуркации фазовых портретов динамических систем в окрестности устойчивого цикла полностью описываются бифуркациями соответствующего преобразования трансверсальной циклу площадки в себя. Такое преобразование часто называют отображением Пуанкаре. Для его построения рассмотрим устойчивый цикл $\gamma(a)$ потока, порождаемого векторным полем $\mathbf{v}(\mathbf{x}, a)$. Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \gamma(a)$ и некоторую трансверсальную секущую S, проходящую через $\mathbf{x}_0$. Отображение Пуанкаре P_a переводит любую точку $\mathbf{x}$ из малой окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in S$ в ту точку, где поток T_a^t пересекает S. Цикл $\gamma(a)$ потока T_a^t является устойчивым, если $\vartheta(dP_a(\mathbf{x}_0)) \subset \{z \in \mathbf{C} |\ |z| < 1\}$, и неустойчивым, если найдется $\lambda \in \vartheta(dP_a(\mathbf{x}_0))$ такое, что $|\lambda| > 1$. Стало быть, последующая эволюция динамической системы определяется характером собственных значений (мультипликаторов) преобразования dP_a цикла в себя. Здесь возможны три основных случая: когда на единичную окружность выходят либо один мультипликатор, равный $+1$ или -1, либо два комплексно сопряженных мультипликатора. В первом случае в отображении имеет место рождение или исчезновение пары неподвижных точек, устойчивой и седловой, что в пространстве M соответствует появлению или исчезновению устойчивого и седлового предельных циклов. С бифуркацией рождения (исчезновения) предельного цикла с мультипликатором $+1$ связано рождение хаоса через перемежаемость (см. ниже).

При появлении мультипликатора, равного -1, реализуются два качественно различных случая. Если первоначально в границу области притяжения исходного цикла периода τ_0 входил седловой цикл приблизительно удвоенного периода $2\tau_0$, то с прохождением мультипликатора через -1 эти циклы сливаются. При этом в рассматриваемой области не остается устойчивых траекторий, а исходный цикл становится седловым. В отображении dP_a этот процесс выглядит как слияние устойчивой и двух седловых точек в одну седловую. В другом случае от теряющего устойчивость цикла периода τ_0 ответвляется цикл приблизительно удвоенного периода, $\tau_1 = 2\tau_0$, который является устойчивым. Дальнейшее увеличение управляющего параметра может привести к ситуации, когда на конечном интервале изменения параметра произойдет бесконечное число бифуркаций удвоения периода устойчивого предельного цикла. Этот каскад бифуркаций имеет место в типичном семействе и приводит систему от устойчивого периодического режима к хаосу (см. ниже).

Допустим, что при $a = a_1$ единичную окружность пересекают два комплексно сопряженных мультипликатора отображения dP_a, причем $d|\lambda(a)|/da|_{a=a_1} > 0$, а остальная часть спектра $\vartheta(dP_a)$ остается внутри единичной окружности. Тогда при $a > a_1$ в отображении dP_a из теряющей устойчивость неподвижной точки рождается инвариантная относительно отображения окружность. Тем самым в исходной системе рождается инвариантный тор с плотной обмоткой. При изменении параметра, вообще говоря, число вращения на торе меняется, он испытывает резонансы, что приводит к появлению и исчезновению бесконечного количества предельных циклов, расположенных на торе. С дальнейшим ростом параметра тор теряет гладкость и может превратиться в странный аттрактор, соответствующий хаотическому поведению динамической системы.

Таким образом, бифуркации даже такого достаточно простого объекта, как предельный цикл, приводят к рождению нетривиальных множеств (например, инвариантных торов, состоящих из бесконечного множества траекторий). При изменении управляющего параметра исследование возможных бифуркаций таких множеств сильно разветвляется (см. об этом в работе [37]). Однако нас интересуют в основном бифуркации, приводящие к возникновению *хаотического* поведения динамических систем.

1.2. Удвоение периода

Прежде всего остановимся на бифуркации удвоения периода [36, 37, 41, 48–50]. Эта бифуркация имеет место при прохождении мультипликатора $\lambda(a_0)$ цикла $\gamma(a_0)$ периода τ_0 через -1: с достижением значения $a = a_1$ цикл $\gamma(a_0)$ становится неустойчивым и от него ответвляется новое устойчивое периодическое решение $\gamma'(a_1)$ периода $\tau_1 = 2\tau_0$. С дальнейшим увеличением параметра, $a > a_1$, значение $\lambda'(a)$ меняется, но при $a = a_2$ мультипликатор $\lambda'(a_2) = -1$ и появляется цикл периода $\tau_2 = 2\tau_1 = 4\tau_0$. И так далее. Последовательность бифуркационных значений удовлетворяет масштабному соотношению $a_n = a_\infty - \mathrm{const} \cdot \delta^{-m}$ (где $\delta = 4.6692016091\ldots$ — первая постоянная Фейгенбаума) и имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a_\infty$. При этом бифурцирующие циклы сходятся к инвариантному множеству (аттрактору Фейгенбаума), структура которого является канторовской и не зависит от рассматриваемого семейства уравнений. При переходе через предельное значение ($a > a_\infty$) в любой полуокрестности этого параметрического интервала имеются значения параметра a, для которых существует абсолютно непрерывная инвариантная мера, т. е. динамика системы является хаотической.

Универсальность бифуркаций удвоения периода объясняется при помощи ренормгруппового (РГ) подхода [51–53]. Рассмотрим четное унимодальное отображение интервала I в себя, определяемое семейством $f(a,x)$. Допустим, что в диапазоне изменения параметров от a_k до a_{k+1} производная $\left(df^{(2^k)}(x,a)/dx\right)\Big|_{x=x_a^{(1)}}$ монотонно убывает от 1 до -1, где $x_a^{(1)}$ — одна из точек периодической траектории периода 2^k. Следовательно, в интервале (a_k, a_{k+1}) найдется $\tilde{a}_k$ такое, что $\left(df^{(2^k)}(x,\tilde{a}_k)/dx\right)\Big|_{x=x_{\tilde{a}_k}^{(1)}} = 0$. Это параметрическое значение характеризуется тем, что точки периодической траектории являются сверхустойчивыми. Поэтому в окрестности $x = x_{\tilde{a}_{k-1}}^{(1)}$ график функции $f^{(2^{k-1})}(x,\tilde{a}_k)$ асимптотически выглядит так же, как и график для $f^{(2^k)}(x,\tilde{a}_{k+1})$ при $k\to\infty$ после соответствующего масштабного преобразования. Фактически, однако, совпадают целые семейства: $f^{(2^{k-1})}(x,a)$ в $\tilde{a}_n \leqslant a \leqslant \tilde{a}_{n+1}$ и $f^{(2^k)}(x,a)$ в $\tilde{a}_{n+1} \leqslant a \leqslant \tilde{a}_{n+2}$.

Таким образом, последовательно удваивая семейство отображений и производя масштабные преобразования, получим в пределе семейство отображений, инвариантное относительно произведенных операций и не зависящее от выбора начального отображения. Это универсальное отображение может быть определено через преобразование удвоения $\mathcal{T}$. Пусть $x = 0$ — точка максимума f. Введем обозначение: $\alpha = \alpha(f) = -f(0)/f(f(0))$. Тогда интервал $[-\alpha^{-1}, \alpha^{-1}]$ под действием $\mathcal{T}$ перейдет в $[f(\alpha^{-1}), f(0)]$. В свою очередь, этот интервал отобразится на интервал $[f(f(0)), f(f(\alpha^{-1}))]$. Пусть $\alpha > 0$, $f(f(\alpha^{-1})) < \alpha^{-1}$, $\alpha^{-1} < f(\alpha^{-1})$, $f(0) > 0$. В этом случае $[f(f(0)), f(f(\alpha^{-1}))] \subset [-\alpha^{-1}, \alpha^{-1}]$, и $[f(\alpha^{-1}), f(0)] \bigcap [-\alpha^{-1}, \alpha^{-1}] = \varnothing$. Таким образом, функция $h(x) = -\alpha f(f(\alpha^{-1}x))$ будет вновь функцией, которая порождает унимодальное отображение интервала I в себя. Преобразование удвоения $\mathcal{T}$ определяется следующим образом: $(\mathcal{T}f)(x) = -\alpha f(f(-\alpha^{-1}x))$, $\alpha = -f(0)/f(f(0))$. Оно имеет неподвижную точку $g(x)$, и спектр линеаризованного преобразования в этой точке, $\mathrm{D}\mathcal{T}(g)$, лежит внутри единичного круга за исключением одного собственного значения, равного первой постоянной Фейгенбаума δ.

Рассмотрим множество $\mathcal{U}$, состоящее из четных унимодальных отображений интервала. Допустим, что $f'(0) = 0$; $f(0) = 1$; $f(1) = -\alpha < 0$; $b = f(\alpha) > \alpha$; $f(b) = f^2(\alpha) < \alpha$. Пусть $\mathcal{H}$ обозначает банахово пространство четных функций $f(z)$, а $\mathcal{H}_0$ — его подпространство, состоящее из функций f, удовлетворяющих соотношениям $f(0) = f'(0) = 0$; $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 + 1$. Тогда можно показать [52–54], что существует четная аналитическая функция $g(x)$, представимая как $g(x) = 1 - 1.52763x^2 + 0.104815x^4 - 0.0267057x^6 + \ldots$ и инвариантная относительно преобразования удвоения $\mathcal{T}$. При этом $\alpha = \alpha(g) = 2.5029078750\ldots$ — вторая универсальная постоянная Фейгенбаума. Более того, существует окрестность V_g точки g в пространстве $\mathcal{H}_1$ такая, что преобразование удвоения $\mathcal{T}$ отображает V_g в $\mathcal{H}_1$. Линеаризованное преобразование удвоения, $\mathrm{D}\mathcal{T}(g)$, имеет растягивающееся одномерное подпространство и сжимающееся подпространство коразмерности 1. В растягивающемся подпространстве собственное значение оператора $\mathrm{D}\mathcal{T}(g)$ равно δ. Этими свойствами объясняется универсальность удвоения.

Большое число экспериментальных и численных исследований (см., напр., [55–60] и цитированную там литературу) показало, что универсальные свойства бифуркаций удвоения встречаются в динамических системах, не имеющих связи с отображениями интервала. Этот факт указывает на то, что многомерные отображения устроены так, что по одному направлению они качественно описываются семейством определенных одномерных отображений, а по остальным направлениям имеет место сильное сжатие. Точная формулировка описанного свойства дана в работах [52, 61].

Универсальность можно представить и иным способом [62–64], используя понятие спектральной плотности. Такой подход является не столь абстрактным и может быть подтвержден экспериментально. Обозначим цикл периода $\tau_{m+1} = 2^{m+1}\tau_1$ как $y_{m+1}(t)$, где t — время, выраженное в терминах исходного цикла $y_1(t)$ периода τ_1, $t/\tau_1 = 1, 2, \ldots, 2^{m+1}$. Цикл $y_{m+1}(t)$ ответвляется от цикла $y_m(t)$ в результате бифуркации удвоения, когда параметр a достигает значения a_{m+1}. Он устойчив в интервале $a \in [a_{m+1}, a_{m+2})$. На плоскости Пуанкаре расстояние между точками такого цикла определим как

$$\Delta_{m+1}(t) = y_{m+1}(t) - y_{m+1}(t + \tau_m), \qquad (2)$$

где $\tau_m = 2^m\tau_1 = \tau_{m+1}/2$. Рассмотрим скейлинговую функцию [65], определяющую локальное изменение масштаба (скейлинг) вблизи m-го цикла при каждом удвоении периода:

$$\sigma_m(t) = \frac{\Delta_{m+1}(t)}{\Delta_m(t)}.$$

Поскольку $\Delta_{m+1}(t+\tau_m) = -\Delta_{m+1}(t)$, то $\sigma_m(t+\tau_m) = -\sigma(t)$. Теперь можно сделать заключение об амплитудах гармоник в частотном спектре, когда период удваивается. Спектр цикла $y_m(t)$ периода τ_m можно выразить через фурье-компоненты b_l^m:

$$y_m(t) = \sum_l b_l^m \exp\left(\frac{2\pi i l t}{\tau_m}\right).$$

В результате $(m+1)$-й бифуркации в таком спектре в дополнение к частотам $l\omega_m$, $l = 1, 2, \ldots$, появившимся к m-й бифуркации, на частотах $k\omega_m/2, k = 1, 3, 5, \ldots$ возникает 2^m новых субгармоник. Представим цикл $y_{m+1}(t)$ следующим образом: $y_{m+1}(t) = (1/2)[\Delta_{m+1}(t) + \eta_{m+1}(t)]$, где $\Delta_{m+1}(t)$ определяется из (2). Тогда $\eta_{m+1}(t) = y_{m+1}(t) + y_{m+1}(t+\tau_m)$. Очевидно, $\eta_{m+1}(t+\tau_m) = \eta_{m+1}(t)$. Спектральное разложение функции $\eta_{m+1}(t)$ будет содержать только частоты $l\omega_m$, поскольку

$$\begin{aligned} b_k^{m+1} &= \frac{1}{\tau_{m+1}} \int\limits_0^{\tau_{m+1}} dt\, \eta_{m+1}(t) \exp\left(-\frac{2\pi i k t}{\tau_{m+1}}\right) = \\ &= \frac{1}{2\tau_m} \int\limits_0^{2\tau_m} dt\, \eta_{m+1}(t) \exp\left(-\frac{\pi i k t}{\tau_m}\right) = \\ &= \frac{1}{2\tau_m} \int\limits_0^{\tau_m} dt \left[\eta_{m+1}(t) + (-1)^k \eta_{m+1}(t+\tau_m)\right] \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\pi i k t}{\tau_m}\right) = 0. \end{aligned}$$

В то же время амплитуда колебаний с частотами $l\omega_m$ останется той же, так как

$$b_l^m = \frac{1}{\tau_m} \int\limits_0^{\tau_m} dt \exp\left(-\frac{2\pi i l t}{\tau_m}\right) y_m(t).$$

После удвоения периода ($\tau_{m+1} = 2\tau_m$) найдем, что

$$b_l^{m+1} = \frac{1}{2\tau_m} \int\limits_0^{\tau_m} dt \left[y_{m+1}(t) + (-1)^l y_{m+1}(t+\tau_m)\right] \times \exp\left(-\frac{\pi i l t}{\tau_m}\right). \quad (3)$$

Если l — четное, то подынтегральная функция в (3) равна $\eta_{m+1}(t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} b_{2l}^{m+1} &= \frac{1}{2\tau_m} \int\limits_0^{\tau_m} dt\, \eta_{m+1}(t) \exp\left(-\frac{2\pi i l t}{\tau_m}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{\tau_m} \int\limits_0^{\tau_m} dt\, y_{m+1}(t) \exp\left(-\frac{2\pi i l t}{\tau_m}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{\tau_m} \int\limits_0^{\tau_m} dt\, y_m(t) \exp\left(-\frac{2\pi i l t}{\tau_m}\right) = b_m^l. \end{aligned}$$

В противоположность функции $\eta_{m+1}(t)$ спектральная плотность функции $\Delta_{m+1}(t)$ содержит только субгармоники $k\omega_m/2$. Суммарная интенсивность этих спектральных компонент дается интегралом $I_{m+1} = (1/\tau_{m+1}) \int\limits_0^{\tau_{m+1}} \Delta_{m+1}^2(t)dt$. Поэтому, используя величину $\sigma_m(t)$, найдем

$$I_{m+1} = \frac{1}{2\tau_m} \int\limits_0^{2\tau_m} \sigma_m^2(t)\Delta_m^2(t)dt = \frac{1}{\tau_m} \int\limits_0^{\tau_m} \sigma_m^2(t)\Delta_m^2(t)dt.$$

Как известно [65], при больших m масштабная функция $\sigma_m(t)$ хорошо аппроксимируется соотношением

$$\sigma_m(t) = \begin{cases} 1/\alpha, & 0 < t < \tau_m/2, \\ 1/\alpha^2, & \tau_m/2 \leqslant t < \tau_m, \end{cases}$$

где α — вторая постоянная Фейгенбаума. Значит, можно оценить интенсивность спектральных компонент как

$$\begin{aligned} I_{m+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}\right) \frac{1}{\tau_m} \int\limits_0^{\tau_m} \Delta_m^2(t)dt = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}\right) I_m. \end{aligned}$$

Или, окончательно,

$$\frac{I_m}{I_{m+1}} = 2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}\right)^{-1}.$$

Таким образом, интенсивность новых спектральных субгармоник, появляющихся в результате бифуркации удвоения, всегда в *постоянное* число раз меньше, чем интенсивность субгармоник, возникших к предыдущей бифуркации, и не зависит от номера бифуркации. Если в системе имеется внешний шум, то для того чтобы следующая бифуркация удвоения была наблюдаема, его дисперсия, по оценкам, данным в работах [66–68], должна быть в 6.619... раз меньше, чем амплитуда субгармоник.

1.3. Перемежаемость

Другой путь к хаосу реализуется через перемежаемость. Строгий подход к этому явлению менее развит, поскольку невозможно точно определить, при каких параметрических значениях достигается хаотический режим.

Впервые переход к хаосу через перемежаемость исследован на примере системы Лоренца [69–71], однако несколько ранее возможность появления касательной бифуркации была подробно описана и строго обоснована в работах [72, 73]. Перемежаемость свидетельствует о рождении хаотического аттрактора вследствие исчезновения полуустойчивого предельного цикла. Это происходит, когда $a = a_1$ и мультипликатор цикла имеет действительное собственное значение $+1$. В этот момент происходит слияние устойчивого и неустойчивого циклов в полуустойчивый. В отображении Пуанкаре такая бифуркация выглядит как слияние устойчивой и неустойчивой неподвижных точек. С переходом через критическое значение a_1 $(a > a_1)$ полуустойчивый цикл исчезает. Типичное поведение системы вблизи значений $a > a_1$, $a \simeq a_1$, будет почти периодическим, но прерывающимся короткими хаотическими всплесками. С увеличением параметра число хаотических пульсаций увеличивается и постепенно наступает развитый хаос.

Отображение Пуанкаре по траекториям, проходящим в окрестности полуустойчивого цикла в некоторых координатах (x, y), $x \in \mathbf{R}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n-1}$, записывается в виде [48] $x_{k+1} = f(x_k, \varepsilon) = x_k + x_k^2 + bx_k^3 + \varepsilon$, $\mathbf{y}_{k+1} = A(x_k, \varepsilon)\mathbf{y}_k + q(x_k, \mathbf{y}_k, \varepsilon)$, где q — нелинейная функция, $|\lambda_i| < 1$, $\lambda_i \in \vartheta(A(0,0))$, $\varepsilon = c(a - a_1) + \ldots$, $c > 0$. Первое соотношение описывает динамику отображения на центральном многообразии. Рассмотрим его подробнее. При $\varepsilon < 0$ почти все траектории притягиваются к единственной устойчивой неподвижной точке отображения. При $\varepsilon \to 0$ к ней приближается неустойчивая неподвижная точка. В момент $\varepsilon = 0$ в начале координат $x = 0$ происходит слияние устойчивой и неустойчивой точек в одну полуустойчивую. С превышением бифуркационного значения $(\varepsilon > 0)$ эта точка исчезает. Допустим, что одномерное отображение имеет участок, порождающий сложную динамику. Тогда при $a \approx a_1$ (но при $\varepsilon > 0$) диаграмма Ламерея такого отображения будет представлять собой длинный периодический участок, соответствующий проходу в достаточно малой окрестности U начала координат, и хаотический всплеск, который завершается при новом попадании в U. И так далее. Поведение, возникающее в системах при обратной касательной бифуркации, называется перемежаемостью *I рода*.

Перемежаемость может возникать и в других случаях [63, 71, 74]. В частности, если отображение Пуанкаре на центральном многообразии (в полярных координатах) имеет вид $r_{n+1} = (1+\varepsilon)r_n + br_n^3$; $\theta_{n+1} = \theta_n + c$, то система проявляет перемежаемость *II рода*. Основное отличие от перемежаемости I рода состоит в том, что в результате слияния устойчивой и неустойчивой неподвижных точек они не исчезают, но происходит передача неустойчивости от неустойчивой точки к устойчивой. Перемежаемость *III рода* возникает, если отображение Пуанкаре запишется как $x_{n+1} = -(1+\varepsilon)x_n - bx_n^3$. В этом случае изображающая точка подходит по спирали к единственной устойчивой неподвижной точке, а перемежаемость появляется вследствие потери устойчивости: лестница Ламерея представляет собой медленно раскручивающуюся спираль.

Перемежаемость также поддается описанию в рамках ренормализационного подхода. В отличие от сценария удвоения периода этот подход допускает точное решение функционального ренормгруппового уравнения [75, 76]. Обобщим функцию, описывающую динамику отображения на центральном многообразии так, чтобы при $x \to 0$ она имела вид $f(x) = x + b|x|^z$. Тогда на единичном интервале, $I = [0,1]$, вторая итерация, т.е. функция $f(f(x))$, после соответствующего масштабного преобразования будет демонстрировать то же поведение, что и исходная функция $f(x)$. Следовательно, можно записать соотношение универсальности через оператор удвоения, применяемый к неподвижной точке $g(x)$, как $\mathcal{T}g(x) = \alpha f(f(\alpha^{-1}x))$, $\mathcal{T}g(x) = g(x)$. Граничные условия в этом случае определяются следующим образом: $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Представим отображение $x' = f(x)$ в неявном виде, $F(x') = F(x) - a$, т.е. $x'(x) = F^{-1}(F(x) - a) = f(x)$, где a — параметр. Тогда $\alpha x''(x) = x'(\alpha x)$. Поэтому $F(\alpha x'') = F(x'(\alpha x)) = F(\alpha x) - a$. Таким образом, $(1/2)F(x'') = (1/2)F(x) - a$. Для того чтобы F соответствовало уравнению удвоения, необходимо выполнение равенства $(1/2)F^*(x) = F^*(\alpha x)$. Оно автоматически будет выполнено, если выбрать $F^*(x) = |x|^{-(z-1)}$, $\alpha = 2^{1/(z-1)}$. Следовательно, $g(x) = F^{*-1}(F^*(x) - a) = (|x|^{-(z-1)} - a)^{-1/(z-1)}$. При $a = b(z-1)$ функция $g(x)$ будет удовлетворять заданным граничным условиям. Таким образом, для перемежаемости отображение неподвижной точки связано с трансляцией $F(x') = F(x) - a$. РГ-уравнение для малого возмущения неподвижной точки также допускает точное решение [77].

Большое значение исследование ренормализационных уравнений перемежаемости приобрело после того, как было показано, что с их помощью можно универсальным образом объяснить происхождение фликкер-шума в нелинейных системах [63, 78, 79].

1.4. Разрушение тора

Бифуркации двумерного тора, родившегося в результате перехода пары комплексно сопряженных собственных значений цикла через единичную окружность, также могут привести к появлению хаоса в динамических системах. При этом плоскость параметров динамической системы разбивается на резонансные языки, отвечающие наличию у векторного поля предельных циклов, расположенных на торе. Тор является объединением неустойчивых многообразий седловых циклов с устойчивыми циклами. Прежде чем в такой системе произойдет переход к хаотическим колебаниям, тор должен потерять гладкость: существуют такие значения параметров, при которых неустойчивое многообразие седлового цикла начинает «гофрироваться», либо у седлового цикла возникает негрубая гомоклиническая кривая, либо устойчивый и неустойчивый циклы на торе сливаются и исчезают на негладком торе. Этот результат известен как теорема о *разрушении* тора. При выполнении некоторых дополнительных условий разрушение тора приводит к рождению хаоса [37, 48, 59, 60, 63, 71, 80, 81].

Нарушение гладкости тора удобно рассмотреть на примере отображения кольца в себя, которое при определенных значениях параметров имеет гладкую инвариантную кривую. При этом конкретный вид отображения не играет роли [37, 48]. Перестройки фазовых портретов в таком кольце имеют место и в общей ситуации [82–84], поэтому достаточно рассмотреть модельное отображение. Пусть $\Phi_{a,b}$: $x_{n+1} = \mathrm{e}^{-a}(x_n + b\sin\theta_n)$, $\theta_{n+1} = (\theta_n + a + x_n + b\sin\theta_n)$, $\mod 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$. Это отображение является диффеоморфизмом и переводит кольцо $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $|x| \leqslant x_0$, $x_0 > b\,\mathrm{e}^{-a}/(1-\mathrm{e}^{-a})$ в себя. Если $a \gg 1$, то из отображения кольца получим отображение окружности, $\varphi_{a,b}$: $\theta_{n+1} = \theta_n + a + b\sin\theta_k$, $\mod 2\pi$, которое достаточно интенсивно изучалось (см., напр., [85–88] и цитированную там литературу). В частности, его пространство параметров содержит бифуркационную кривую, при пересечении которой динамика определяется величиной b. Если $b < 1$, то при иррациональном числе вращения все траектории отображения окружности квазипериодические. При рациональном значении числа вращения в отображении окружности имеется равное число устойчивых и неустойчивых периодических точек одинакового периода. Когда $b > 1$, возникает хаотическое множество [86–88].

Динамика отображения кольца во многом аналогична динамике отображения окружности. При $b + \mathrm{e}^{-a} < 1$ это отображение имеет инвариантную замкнутую кривую, включающую неподвижные точки, одна из которых устойчивая, а другая седловая, причем ее неустойчивые сепаратрисы замыкаются на устойчивую точку (и образуют тем самым замкнутую кривую). В пространстве параметров (a, b) такая ситуация соответствует определенной области, ограниченной бифуркационными кривыми. При пересечении этих кривых поведение отображения кольца изменяется следующим образом [80]: *а*) возникает бесконечное множество траекторий со счетным числом неустойчивых седловых циклов, при этом изображающая точка остается в малой окрестности неподвижной точки; *б*) происходит бифуркация удвоения периода; *в*) седло и узел сливаются, появляется седло-узел, причем инвариантную кривую в этот момент образует его неустойчивая сепаратриса; если эта кривая гладкая, то после исчезновения седло-узла рождается гладкая замкнутая кривая, к которой притягиваются все точки в кольце; *г*) если в случае (*в*) в момент слияния седла и узла сепаратриса негладкая, то возникает инвариантное множество типа подковы Смейла, т. е. хаотическая динамика. Последние два случая (*в* и *г*) реализуются в зависимости от значения параметра b.

Количественные закономерности перехода от режима двухчастотных колебаний к хаосу устанавливаются при помощи РГ-подхода [89, 90]. Пусть $f(r,\theta)$: $S^1 \to S^1$ — гладкое взаимно однозначное отображение окружности, имеющее точку перегиба p. Для перехода от квазипериодичности к хаосу необходимо изменять два параметра, чтобы сохранять число вращения $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}(f^n(x_0) - x_0)/n$ равным заданному иррациональному числу. Используя в качестве числа вращения значение золотого среднего, $\rho = \rho^* = (\sqrt{5}-1)/2 = 0.618034\ldots$, можно обнаружить универсальные закономерности при переходе к хаосу.

Число $-\rho^*$ есть собственное значение матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

с собственным вектором $(-\rho^*, 1)^T$. Кроме того, T^n — это матрица

$$\begin{pmatrix} \phi_{n+1} & \phi_n \\ \phi_n & \phi_{n-1} \end{pmatrix},$$

где ϕ_i — i-е число Фибоначчи $(\phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1)$. Таким образом, $\phi_{n-1} - \phi_n\rho^* = (-\rho^*)^n$. Следовательно, можно записать:

$$(R_{\rho^*})^{\phi_n}(\theta) - \theta = \phi_n\rho^*, \quad \mod 1,$$

где R_{ρ^*} обозначает оборот вдоль окружности с числом ρ^*. В силу этого получим $|(R_{\rho^*})^{\phi_n}(\theta) - -\theta| = (\rho^*)^n$. Далее, используя рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи, найдем, что величина $(R_{\rho^*})^{\phi_n}$ порождается последовательностью композиций $(R_{\rho^*})^{\phi_{n+1}} = (R_{\rho^*})^{\phi_n} \circ (R_{\rho^*})^{\phi_{n-1}}$.

Для поиска фиксированной точки ренормализационного оператора необходимо рассмотреть так называемое поднятие $\tilde{f}$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ функции f, удовлетворяющее соотношению $\exp\Big(2\pi i\tilde{f}(\theta)\Big) = f\Big(\exp(2\pi i\theta)\Big)$. Тогда оператор ренормализации определится как

$$T_1 \begin{bmatrix} u(\theta) \\ v(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u(\alpha v(\alpha^{-2}\theta)) \\ u(\theta) \end{bmatrix}$$

или

$$T_2 \begin{bmatrix} u(\theta) \\ v(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 v(\alpha^{-1}u(\alpha^{-1}\theta)) \\ u(\theta) \end{bmatrix},$$

что соответствует переходу от функций $(\tilde{f}^{\phi_n}, \tilde{f}^{\phi_{n-1}})$ к функциям $(\tilde{f}^{\phi_{n+1}}, \tilde{f}^{\phi_n})$ с масштабным множителем α. Линеаризация каждого оператора T_i в соответствующей неподвижной точке g имеет неустойчивое собственное значение, которое отвечает скейлинговому поведению с таким свойством, что $f(\theta)+\varepsilon_n$ имеет число вращения ϕ_{n-1}/ϕ_n. При этом масштабные постоянные равны $\delta=-2.83362\ldots$, $\alpha=-1.28857\ldots$.

1.5. Гомоклинические структуры

Помимо перечисленных путей развития хаоса, в динамических системах возможен переход к хаотическому поведению через гомоклинические бифуркации. Пусть $T_a\colon\ M\to M$ — некоторое преобразование множества M в себя. Точка $p\in M$ называется гиперболической неподвижной точкой отображения T_a, если $T_a p=p$ и $\mathrm{D}T_a|_p$ не имеет собственного значения, равного единице. При этом устойчивое и неустойчивое многообразия точки p определяются соответственно следующим образом: $W^s(p)=\{\mathbf{x}\in M|\ T_a^t\mathbf{x}\to p,\ \ t\to+\infty\}$ и $W^u(p)=\{\mathbf{x}\in M|\ T_a^t\mathbf{x}\to p,\ t\to-\infty\}$. Предположим, что p — гиперболическая неподвижная точка отображения T_a. Точка q называется *гомоклинической* по отношению к точке p, если $p\neq q\in W^s(p)\bigcap W^u(p)$. Это означает, что $\lim\limits_{t\to\pm\infty}T^tq=p$.

Одномерное отображение имеет гомоклинические точки, если оно обладает периодической орбитой, период которой отличен от 2^i, $i=0,1,2,\ldots$ [91–93]. В свою очередь, наличие гомоклинических точек гарантирует положительность энтропии [93], т. е. существование хаотичности. Более того, недавно были получены достаточно общие утверждения, касающиеся сложного поведения *двумерных* отображений [94–96]. Основной их смысл кратко сводится к следующему. Однопараметрическое семейство диффеоморфизмов поверхности, имеющее гомоклиническую структуру, на множестве значений параметра положительной меры порождает странные аттракторы. Пусть T_a — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов класса C^∞, заданных на поверхности. Предположим, что T_0 имеет гомоклиническое касание в некоторой периодической точке p_0. Тогда при достаточно общих предположениях существует *положительная* лебегова мера множества A_c параметрических значений, близких к $a=0$, таких, что для $a\in A_c$ диффеоморфизм T_a проявляет *хаотическое* поведение, обусловленное наличием странного аттрактора.

Следствие из этого важного утверждения справедливо для одномерных каскадов достаточно общего вида [96]: пусть T_a — гладкое отображение интервала I или отображение окружности S^1 и точка p_0 — гиперболическая периодическая точка для T_0. Допустим, что отрицательная орбита точки p_0 пересекает неустойчивое множество невырожденной критической точки отображения T_0. Тогда если такая гомоклиническая структура имеет место в случае общего положения, то *мера* множества параметрических значений a, близких к $a=0$, для которых T_a проявляет хаотическое поведение, *положительна.*

Другой важный результат был получен Ньюхаузом [97, 98], который показал, что семейство двумерных диффеоморфизмов, имеющее гомоклиническое касание устойчивых и неустойчивых сепаратрис, обладает чрезвычайно сложным поведением. Такая динамика действительно была обнаружена на примере уравнения Дюффинга [36, 99, 100] посредством обобщенной теории Мельникова [101]. Более того, формирование гомоклинических траекторий всегда сопровождается глубокими перестройками динамики, которые включают появление подков Смейла [21], каскадов удвоения периода [102], седло-узловых циклов [103], неограниченного количества сосуществующих периодических аттракторов [97, 104].

Обобщение этих результатов на семейство диффеоморфизмов произвольной размерности было описано в работах [103, 105–107]. Основное утверждение, полученное в этом направлении, сводится к следующему. Пусть T_a — семейство диффеоморфизмов многообразия M, $\dim M\geqslant 2$, имеющее гомоклиническое касание при $a=\tilde a$. Тогда существует множество $A_c\subset\mathbf{R}$ такое, что T_a *обладает* странным аттрактором для каждого $a\in A_c$ и $A_c\bigcap[\tilde a-\varepsilon,\tilde a+\varepsilon]$ имеет *положительную* меру Лебега для всех $\varepsilon>0$.

Если рассматривать вместо отображений *потоки*, то можно получить новые интересные утверждения, касающиеся развития хаотической динамики. Один из первых результатов в этом направлении был получен Л.П. Шильниковым [108]. Пусть поток T^t в пространстве $\mathbf{R}^3$ имеет равновесную точку в начале координат с действительным положительным собственным значением λ_1 и пару комплексно сопряженных собственных значений $\lambda_{2,3}$ с отрицательными действительными частями. Тогда, используя теорему об устойчивом многообразии [36], можно ввести координаты так, что ось z будет содержать локально неустойчивое многообразие, а плоскость (x,y) — локально устойчивое многообразие. Допустим, что траектория γ является гомоклинической (по отношению к точке 0) типа седло-фокуса, т. е. при $\gamma\in W^u(0)$ она имеет выходящую из нуля неустойчивую сепаратрису, которая при $t\to\infty$ по спирали стремится к нулю в плоскости (x,y). Тогда справедлив следующий точный результат [36, 108]. Если $|\operatorname{Re}\lambda_{2,3}|<\lambda_1$, то существует возмущение потока T^t такое, что возмущенный поток T_1^t будет иметь гомоклиническую орбиту γ_1 вблизи γ, а отображение, порождаемое потоком T_1^t, — *счетное множество подков.* Обобщение этого результата привело к существенному углублению понимания бифуркаций в динамических системах, имеющих гомоклинические структуры, и путей развития в них хаотического поведения (см., напр., [36, 37, 95, 99, 109] и приведенную там литературу).

Таким образом, имеются достаточно мощные аналитические методы исследования развития хаотического поведения динамических систем. Однако кроме сценариев рождения хаоса в тех или иных системах немаловажным является вопрос о свойствах хаотических динамических систем и способах их изучения.

2. Некоторые свойства хаотических динамических систем

Свойства хаотических систем даются такими инвариантами, как характеристические показатели Ляпунова, размерность странного аттрактора, энтропия динамической системы (см., напр., [25, 27, 31, 51, 55, 60, 63, 64, 110–115] и приводимые там ссылки), и рядом других. Кроме того, важными характеристиками динамических систем являются эргодичность и перемешивание [25, 31, 42, 51, 74, 116, 117], K-свойство [31, 51, 114, 116, 118], бернуллиевость [31, 114, 116, 118–120], удовлетворение центральной предельной теореме теории вероятностей [117, 120, 121], экспоненциальное убывание корреляций [74, 117, 120, 122]. Установление последних свойств в динамической системе положено в основу современного представления о детерминированном хаосе. Описание хаотических динамических систем возможно также с помощью исследования характеристик их хаотических аттракторов или путем рассмотрения поведения типичных фазовых траекторий.

2.1. Показатели Ляпунова и энтропия динамических систем

Пусть $\mathbf{x}(t)$ — типичная фазовая траектория системы (1) и $\mathbf{x}_1(t)$ — близкая к ней траектория, $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\xi}(t)$. Рассмотрим функцию

$$\Xi(\boldsymbol{\xi}(0)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\boldsymbol{\xi}(t)|}{|\boldsymbol{\xi}(0)|},$$

которая определена на векторах начального смещения $\boldsymbol{\xi}(0)$ таких, что $|\boldsymbol{\xi}(0)| = \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$. Тогда в зависимости от направления вектора $\boldsymbol{\xi}(0)$ функция $\Xi(\boldsymbol{\xi}(0))$ будет принимать конечный ряд значений $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, которые называются *характеристическими показателями Ляпунова* (см., напр., [42, 55, 64, 74, 111–113] и данные там ссылки).

Характеристические показатели Ляпунова служат мерой хаотичности динамических систем. В частности, если имеются положительные показатели, то поведение системы будет хаотическим.

Строгое обоснование теория характеристических показателей Ляпунова получила после доказательства известной мультипликативной эргодической теоремы [123–125], которая устанавливает существование так называемых правильных по Ляпунову траекторий в фазовом пространстве. Рассмотрим измеримый мультипликативный коцикл относительно преобразования T, т.е. измеримую функцию $\psi(m, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in M$, со значениями в пространстве квадратных матриц порядка $j \geqslant 1$ такую, что выполняется равенство $\psi(m+k, \mathbf{x}) = \psi(m, T^k\mathbf{x})\psi(k, \mathbf{x})$. Тогда величина $\lambda^+(\mathbf{x}, q) = \varlimsup_{n\to\infty} (1/n) \ln ||\psi(m, \mathbf{x})q||$, $q \in \pi^{-1}(\mathbf{x})$, где $\pi^{-1}(\mathbf{x})$ — слой над $\mathbf{x} \in M$, называется *характеристическим показателем Ляпунова* преобразования T с коциклом $\psi(m, \mathbf{x})$. Теперь если для некоторого нормального базиса $\{\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\}$ имеет место равенство $\sum\limits_i \lambda^+(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i(\mathbf{x})) = \varliminf_{m\to\infty} \ln|\det\psi(m, \mathbf{x})|$, то точка $\mathbf{x} \in M$ называется *правильной вперед*.

Соответствующий характеристический показатель λ^- получается заменой верхнего предела при $n \to +\infty$ на верхний предел при $n \to -\infty$. Точка $\mathbf{x}$ называется правильной назад, если она является правильной вперед для показателя λ^-. Двусторонние траектории динамических систем (1) (т.е. траектории, существующие для $t > 0$ и $t < 0$) приводят к понятию (при некоторых дополнительных условиях [126]) *правильных точек* по Ляпунову с согласованными значениями показателей λ^+ и λ^-. Далее, можно показать, что если $\mathbf{x}$ — правильная по Ляпунову точка, то $T^k\mathbf{x}$ будет правильной по Ляпунову *траекторией*. Пусть $X_0 \subset M$ — множество правильных по Ляпунову траекторий. Мультипликативная эргодическая теорема утверждает, что X_0 имеет *полную* меру. Таким образом, определяется существование показателей Ляпунова, которые могут быть введены для почти всякого $\mathbf{x} \in M$.

Для одномерных отображений, порождаемых функцией f, имеется единственный показатель Ляпунова, который можно записать как

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln\left|\frac{df}{dx_i}\right|.$$

Другими важными характеристиками служат энтропия [111, 114–116], которая определяет обратную величину среднего времени предсказуемости поведения хаотической системы и характеризует ее сложность [42, 64, 122, 127], и размерность инвариантного множества динамической системы [63, 111, 115, 128].

Формально *энтропия* h динамической системы $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$ вводится как верхняя грань по всем конечным измеримым разбиениям η: $h(T) = \sup\{h(T, \eta)\}$. Таким образом, энтропия представляет собой наибольшую возможную скорость создания информации преобразованием T с помощью конечных разбиений пространства состояний динамической системы. Поскольку энтропия — количественная характеристика, с помощью которой можно (дополнительно к прочим важным инвариантам) описать отдельные стороны хаотичности, она оказывается тесно связанной с другими характеристиками поведения динамических систем. В частности, энтропия выражается через показатели Ляпунова следующим образом [125]:

$$h(T) = \int\limits_M \sum_{\lambda_i \geqslant 0} \lambda_i(\mathbf{x}) d\mu.$$

Это соотношение может быть в ряде случаев упрощено. Именно: если T — дифференцируемое отображение конечномерного многообразия и μ — эргодическая вероятностная мера для динамической системы $(M, \mathcal{S})$, то $h \leqslant \sum\limits_{\lambda_i > 0} \lambda_i$ [111, 125]. Равенство в этом выражении имеет место, если рассматривать одну хаотическую компоненту движения, т.е. если мера

μ — мера Синая–Рюэля–Боуэна [111]. Величина энтропии h не зависит от способа разбиения фазового пространства. Кроме того, если две динамические системы имеют равные энтропии, то их статистические законы движения одинаковы [118, 129].

Размерностные характеристики инвариантных множеств динамических систем могут вводиться по-разному (см., напр., [63, 112, 130–133] и приведенные там ссылки). Однако основные математические результаты получены только для некоторых из них [128, 134–137]. Пусть M — компактное пространство и $A \subset M$. Допустим, что $N(\varepsilon)$ — минимальное число шаров радиуса ε, необходимых для покрытия множества A. Тогда пределы $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \ln N(\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon) \equiv \overline{C}(A)$ и $\underline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \ln N(\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon) \equiv \underline{C}(A)$ называются соответственно *верхней* и *нижней емкостью* множества A. Если их значения совпадают, $\overline{C}(A) = \underline{C}(A) \equiv C(A)$, то величина $C(A)$ называется *емкостью* [128] или *фрактальной размерностью* [115, 138, 139] множества A.

Характеристические показатели Ляпунова, энтропия и размерность дают возможность посредством изучения наблюдаемых (т.е. сигнала или определенной реализации, по которым судят о характере процесса в исследуемой физической системе) определить количество независимых переменных, однозначно описывающих состояние системы, и тем самым установить конечномерность рассматриваемого явления. Большинство результатов в этом направлении основаны на теории Такенса [140, 141] (см. также [115] и приведенные там ссылки) и используют тот факт, что свойства аттрактора можно определить из временно́й последовательности одной составляющей. Именно: если составить векторную функцию $\hat{y} = \{x_i(t), x_i(t+\tau), \ldots, x_i(t+2n\tau)\}$, где $x_i(t)$ — произвольная составляющая переменной $\mathbf{x}$, то метрические свойства исходного n-мерного и построенного $(2n+1)$-мерного пространств будут одинаковы.

Опираясь на теорию Такенса, в принципе можно отличить *динамический* процесс от *чисто случайного*, т.е. недетерминированного. Наблюдаемая $\hat{y} = \{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ называется *детерминированно порожденной*, если выполнены следующие условия [115, 140, 141]: существуют конечномерная динамическая система $\{T\}$, точка x_0 и липшиц-непрерывная функция ϕ такие, что выполняется соотношение $\phi(T^i(x_0)) = y_i$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$, причем $\operatorname{dist}(T^t x, T^t x') \leqslant \mathrm{const} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \operatorname{dist}(x, x')$, т.е. максимальный ляпуновский показатель для $\{T\}$ является ограниченным. Введем пространство B всех наблюдаемых как множество последовательностей $\hat{y} = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |y_i|/2^i < \infty$. Тогда при соответствующем введении нормы пространство B будет полным нормированным линейным пространством. Зададим в B динамическую систему посредством определения отображения сдвига $\hat{y} \mapsto T\hat{y}$, где $T\hat{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$. Таким образом, получим универсальную динамическую систему, порождающую любую ограниченную наблюдаемую. Рассмотрим предельное множество $A(\hat{y})$ и предельную емкость (т.е. размерность) $C(A)$ наблюдаемой. Эти инварианты легко ввести, если рассмотреть произвольную наблюдаемую $\hat{y}$ как начальное состояние универсальной динамической системы в пространстве B. Тогда $A(\hat{y}) = \operatorname{clos}\left(\{T^k\hat{y}\}_{k=0}^{\infty}\right)$, где $\{T^k\hat{y}\}_{k=0}^{\infty}$ — полутраектория, задаваемая отображением T. Если $C(A) < \infty$, то данной наблюдаемой соответствует конечномерная динамическая система. При выполнении дополнительного условия об ограниченности максимального ляпуновского показателя наблюдаемая будет детерминированно порожденной. Следовательно, определенная обработка наблюдаемого сигнала может дать ответ на принципиальный вопрос о конечномерности исследуемого процесса. Некоторые алгоритмы обработки наблюдаемых приведены в работах [42, 63, 84, 112, 115, 130–132].

2.2. Характеристики хаотичности

Опишем теперь иерархию важных свойств динамических систем, которые можно рассматривать как последовательно усиливающие друг друга свойства хаотичности [142].

1. *Существование инвариантной меры* [25, 27, 51, 120, 143]. Множество с введенной на нем мерой может быть рассмотрено как пространство элементарных событий. В этом случае каждая функция, тем или иным образом определенная на этом множестве, является случайной переменной, а последовательность ее итераций, получаемых через некоторое преобразование $\{T\}$, можно представить как последовательность случайных величин. Поэтому существование инвариантной меры для конкретного семейства динамических систем имеет следствием его хаотическое поведение.

2. *Перемешивание* [25, 51, 63, 64, 74, 116, 117, 122]. Если автокорреляционная функция $b(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$ для любой функции $\mathbf{f}$, $\int |\mathbf{f}|^2 d\bar{P} < \infty$, где $\bar{P}$ — инвариантное распределение, то в системе имеет место перемешивание. Существование перемешивания имеет следствием необратимость и непредсказуемость динамики.

3. *K-свойство* [27, 51, 114, 126, 144]. Если динамическая система является K-системой, то она обладает свойством перемешивания всех степеней и имеет положительную энтропию. K-свойство означает, что детерминированную динамическую систему можно закодировать в регулярный стационарный процесс теории вероятностей.

4. *Бернуллиевость* [27, 116, 120, 144]. Поведение динамической системы тем случайнее, чем ближе ее кодировка к последовательности независимых случайных величин. Если кодировка динамической системы в регулярный стационарный процесс представляет собой такую последовательность, то динамическая система называется бернуллиевской.

5. *Выполнение условий центральной предельной теоремы* [24, 120, 145]. Для любой функции $\mathbf{f}$, опи-

сывающей тот или иной динамический процесс, найдется такая дисперсия $\sigma=\sigma(\mathbf{f})$, что

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left\{\mathbf{x}\colon\sqrt{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{f}(T^k(\mathbf{x}))-\overline{\mathbf{f}}\right]<a\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int\limits_{-\infty}^{a}\mathrm{e}^{-u^2/2\sigma}\,d\mu,\qquad \overline{\mathbf{f}}=\int\mathbf{f}d\mu.$$

Смысл выполнения центральной предельной теоремы состоит в том, что распределение мер таких областей $\mathbf{x}$, временные флуктуации которых не превышают определенного числа a, является гауссовским.

6. *Скорость убывания корреляций* [120, 145]. Если для функции $\mathbf{f}$ ее среднее $\overline{\mathbf{f}}=0$, то найдутся такие $p>0$, $0<q<1$, что

$$\left|\int\mathbf{f}(T^k(\mathbf{x}))\mathbf{f}(\mathbf{x})d\mu\right|\leqslant pq^{|k|}.$$

В этом случае имеет место экспоненциальное убывание корреляций, что для гладких функций $\mathbf{f}$ отвечает близости системы к конечной цепи Маркова.

Хаотические диссипативные динамические системы можно изучать путем исследования свойств и структуры странных аттракторов, являющихся математическим образом хаотических колебаний.

2.3. Хаотические аттракторы

Аттрактор динамической системы называется *странным*, если он отличен от конечного объединения гладких подмногообразий пространства M [37, 146]. Часто подчеркивается, что динамика системы является хаотической благодаря наличию в ее фазовом пространстве странного аттрактора. В этих случаях понятие «странный аттрактор» имеет собирательный смысл, и его иногда заменяют словосочетанием «*хаотический* аттрактор». Под хаотическим аттрактором может подразумеваться несколько типов аттракторов, однако гиперболические, стохастические (или квазигиперболические), перемешивающие и квазистохастические аттракторы (или квазиаттракторы) являются наиболее распространенными.

Множество $\mathcal{A}$ называется *гиперболическим* аттрактором, если оно является аттрактором и одновременно гиперболическим множеством динамической системы, т. е. ее касательное пространство разлагается на два подпространства, E^s и E^u, которые определяются тем фактом, что бесконечно близкие траектории, соответствующие пространству E^s, экспоненциально сходятся друг к другу при $t\to\infty$, а в пространстве E^u экспоненциально сходятся при $t\to-\infty$. Более точно, следуя [51] (см. также [31, 35–37, 143, 145, 147] и цитируемую там литературу), определим гиперболическую траекторию $T^n\mathbf{x}\equiv\mathbf{x}_n$ динамической системы следующим образом. Пусть каждая итерация T^n является гладкой в окрестности $\mathbf{x}\in M$. Тогда найдется дифференциал $\partial T_{\mathbf{x}_n}$ отображений касательного пространства $\Sigma_{\mathbf{x}_n}$ в касательное пространство $\Sigma_{T\mathbf{x}_n}$. Траектория $\mathbf{x}_n$ называется *гиперболической*, если существуют подпространства $E^s_{T^k\mathbf{x}}$ и $E^u_{T^k\mathbf{x}}$ касательного пространства $\Sigma_{T^k\mathbf{x}}$, $0\leqslant k<\infty$, такие, что $\Sigma_{T^k\mathbf{x}}=E^s_{T^k\mathbf{x}}+E^u_{T^k\mathbf{x}}$ и $\partial T_{T^k\mathbf{x}}(E^s_{T^k\mathbf{x}})=E^s_{T^{k+1}\mathbf{x}}$, $\partial T_{T^k\mathbf{x}}(E^u_{T^k\mathbf{x}})=E^u_{T^{k+1}\mathbf{x}}$, $||\partial T_{T^k\mathbf{x}}\mathbf{e}||\leqslant c||\mathbf{e}||$, $\mathbf{e}\in E^s_{T^k\mathbf{x}}$, $||\partial T_{T^k\mathbf{x}}\mathbf{e}||\geqslant c^{-1}||\mathbf{e}||$, $\mathbf{e}\in E^u_{T^k\mathbf{x}}$, $\mathrm{dist}(E^s_{T^k\mathbf{x}},E^u_{T^k\mathbf{x}})\geqslant\mathrm{const}$, $0<k<\infty$, где c — некоторая постоянная. Множество Λ называется *гиперболическим множеством*, если оно замкнуто и состоит из траекторий, удовлетворяющих условиям гиперболичности. Множество Λ называется *гиперболическим аттрактором* динамической системы $\{T^t\}$, ($t\in\mathbf{R}$ или $t\in\mathbf{Z}$), если Λ — замкнутое топологически транзитивное (т.е. для $U,V\in\Lambda$ выполняется соотношение $T^tU\bigcap V\neq\varnothing$) гиперболическое множество и существует такая окрестность $U\supset\Lambda$, что $\Lambda=\bigcap\limits_{t\geqslant0}T^t(U)$. Таким образом, гиперболический аттрактор Λ — замкнутое притягивающее множество, инвариантное относительно динамической системы $\{T^t\}$.

Гиперболический аттрактор является структурно устойчивым множеством. Системы с гиперболическим аттрактором имеют наиболее выраженные хаотические свойства. Малые возмущения таких систем не могут привести к качественным перестройкам как самого аттрактора, так и поведения систем в целом. Динамические системы с гиперболическим типом аттрактора являются моделями структурно устойчивых систем со строго хаотическими свойствами [35, 117]. Однако в настоящее время гиперболических аттракторов построено немного. Это известный соленоид Смейла—Вильямса (см., напр., [21, 25, 26, 31, 35, 42, 55]), аттрактор Лози [35, 51, 143, 148–150], аттрактор Плыкина [25, 35, 36, 147, 151] и аттрактор Белых [143, 152, 153].

Аттрактор $\mathcal{A}$ является *стохастическим*, если для любой абсолютно непрерывной инвариантной меры μ в U ее смещение $\mu_t(\mathcal{C})=\mu(T^t\mathcal{C})$ при $t\to\infty$ сходится (слабо) к предельной инвариантной мере ν, которая не зависит от μ, и динамическая система $(\mathcal{A},\nu,\{T^t\})$ обладает свойством перемешивания [117, 143, 145]. Стохастический аттрактор является математическим образом наблюдаемого развитого хаотического поведения физической системы. Известный пример стохастического аттрактора — аттрактор Лоренца при $b=8/3$, $\sigma=10$, $r=28$ [153–155]. Малые возмущения систем со стохастическим аттрактором могут приводить к модификациям такого аттрактора, но в то же время динамика системы будет оставаться хаотической. Всякое гиперболическое предельное множество является стохастическим аттрактором. В то же время стохастические аттракторы необязательно являются странными (см. [34, 35, 37, 143, 153]).

Подавляющее большинство аттракторов хаотических динамических систем принадлежат к квазистохастическому типу (т. е. являются квазиаттракторами) [156, 157]. Квазистохастические аттракторы содержат в себе, помимо седловых предельных циклов, еще и устойчивые предельные циклы, период которых достаточно велик, а область притяжения мала. По этой причине для большинства систем их области хаотичности всегда содержат достаточно малые подобласти с регулярной (периодической) динамикой. Слабые возмущения систем с квазистохастическим аттрактором ведут к сложным качественным перестройкам как в динамике системы, так и в структуре самого аттрактора. В приложениях, однако, эти обстоятельства не играют существенной роли, поскольку устойчивые предельные циклы, содержащиеся в квазистохастическом аттракторе, не выявляются численно. Динамика системы с квазистохастическим аттрактором также хаотическая. Например, аналитические результаты теории бифуркаций показывают, что в системе Лоренца с параметрами, бесконечно близкими к значениям $b = 8/3$, $\sigma = 10.2$, $r = 30.2$, существуют устойчивые предельные циклы [158, 159]. Но никакие численные методы до настоящего времени не выявили этих циклов.

Параллельно с изучением особенностей и типов аттракторов хаотические свойства динамических систем можно исследовать посредством анализа фазовых траекторий. В этом отношении наиболее развитой является теория одномерных отображений.

2.4. Одномерные отображения

Одномерные отображения позволяют аналитически получить ряд важных свойств, которые могут быть обобщены на системы бо́льших размерностей. С другой стороны, многомерные динамические системы часто сводятся к одномерным. Так, характерные особенности известного соленоидального диффеоморфизма Смейла–Вильямса $D^2 \times S^1$ полностью описываются отображением окружности степени 2. Геодезические потоки на гиперболической поверхности имеют много общего с одномерными динамическими системами. Наконец, бифуркационная структура многомерных систем достаточно хорошо описывается посредством качественных перестроек, встречающихся в одномерных отображениях. По этим причинам одномерные отображения интенсивно исследуются и в настоящее время представляют собой ответвившийся и быстро развивающийся раздел теории динамических систем.

Одним из самых замечательных результатов теории одномерных отображений является теорема А.Н. Шарковского о сосуществовании циклов [160]. Эта теорема указывает, циклы каких периодов имеет отображение, если оно обладает циклом периода $k \geqslant 1$.

Для пояснения результата Шарковского расположим натуральные числа следующим образом:

$$1 \lhd 2^1 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \cdots \lhd 2^n \lhd \cdots$$
$$\cdots \lhd 2^3 \cdot 9 \lhd 2^3 \cdot 7 \lhd 2^3 \cdot 5 \lhd 2^3 \cdot 3 \lhd \cdots$$
$$\cdots \lhd 2^2 \cdot 9 \lhd 2^2 \cdot 7 \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \cdots$$
$$\cdots \lhd 2 \cdot 9 \lhd 2 \cdot 7 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \cdots \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3.$$

Такое расположение называется *порядком Шарковского*. Терема Шарковского утверждает, что если непрерывное отображение интервала имеет цикл периода k, то оно имеет также циклы каждого периода k' такого, что $k' \lhd k$ в смысле порядка Шарковского. В частности, если отображение имеет цикл периода 3, то оно имеет также циклы всех периодов. Это последнее утверждение, доказанное в работе Т. Ли и Дж. Йорка [161] много позже А.Н. Шарковского, стало известно как **период три подразумевает хаос**.

Для определения хаотического поведения одномерных отображений используются свойства топологической транзитивности, плотности периодических траекторий (циклов) или свойство перемешивания, которые легко переносятся на одномерный случай. Пусть Λ — компактное инвариантное множество относительно T. Тогда это множество Λ называется *топологически транзитивным*, если для любых двух открытых множеств Ω_1, Ω_2 найдется число t такое, что $T^t(\Omega_1) \bigcap \Omega_2 \neq \varnothing$. Говорят, что отображение T^t имеет *чувствительную зависимость от начальных условий* на Λ, если существует $\epsilon > 0$ такое, что $x \in \Lambda$ и в любой окрестности U точки x существует $y \in U$ и $t > 0$, для которых $|T^t x - T^t y| > \epsilon$. Свойство плотности периодических траекторий означает, что в любой окрестности любой точки в Λ существует по крайней мере одна периодическая траектория.

Отображение T называется *хаотическим*, если выполняются следующие условия [162]:

а) T является топологически транзитивным на Λ;

б) циклы отображения T являются плотными в Λ;

в) T имеет чувствительную зависимость от начальных условий.

Таким образом, хаотическое отображение должно обладать тремя важными свойствами: непредсказуемостью, неразложимостью и элементом регулярности. Однако не так давно было обнаружено [163], что в данном определении хаотичности условие чувствительной зависимости от начальных условий является избыточным. Иными словами, если отображение T: $\Lambda \to \Lambda$ непрерывно и транзитивно, а циклы плотны в Λ, то T обладает чувствительной зависимостью от начальных условий.

Немного позже было показано [164], что в определении хаотичности ни транзитивность, ни плотность циклов не следует из оставшихся двух условий. Более того, транзитивность и чувствительная зависимость устойчивы по отношению к замыканию, а также к ограничению на плотные инвариантные подмножества [165]. Таким образом, по-видимому, отображение, заданное на компактном множестве, может быть определено как хаотическое, если оно обладает чувствительной зависимостью от начальных условий и имеет плотные циклы.

С другой стороны, одномерные динамические системы проявляют хаотическую динамику, если обладают свойством перемешивания. Дадим строгое определение. Множество Λ называется *перемешиваю-*

щим множеством, если для открытого подмножества U в Λ и любого конечного покрытия $\Sigma = \{\sigma_j\}$ множества Λ существуют $m = m(U, \Sigma)$ и $r \geqslant 1$, зависящее только от Λ, такие, что $T^m\Bigl(\bigcup\limits_{i=0}^{r-1} T^i U\Bigr)\sigma_j \neq \varnothing$ для всех j. Если динамическая система является перемешивающей и она имеет аттрактор, то аттрактор такого типа называется перемешивающим. Более точно, множество Λ называется *перемешивающим аттрактором*, если Λ является аттрактором (т.е. имеется $V \supset \Lambda$ такое, что $V \neq \Lambda$, $TV \subset \Lambda$ и $\bigcap\limits_{t>0} TV = \Lambda$) и одновременно перемешивающим множеством для T.

Свойство перемешивания на определенном притягивающем множестве Λ имеет следствием топологическую транзитивность. В свою очередь, топологическая транзитивность эквивалентна тому, что в Λ имеется всюду плотная траектория. Более того, имеет место следующее утверждение [93]: если $f \in C^0(I, I)$ и I — интервал, то перемешивающий аттрактор состоит из нескольких подынтервалов, которые циклически отображаются друг в друга, и периодические точки плотны на нем.

Рассмотрим отображение интервала I в общей форме: $T_a\colon I \to I$, $I = [\alpha, \beta]$,

$$T_a\colon x \longmapsto f(a, x), \tag{4}$$

где a — управляющий параметр. Отображение T интервала $[\alpha, \beta]$ *хаотично*, если оно имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру μ, по отношению к которой σ-алгебра $\bigwedge\limits_t T^{-t}(\mathcal{S})$ состоит из конечного числа атомов, где $\mathcal{S}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств интервала $[\alpha, \beta]$ и $T^{-t}(\mathcal{S})$ — σ-алгебра подмножеств, имеющих вид $T^{-t}\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{S}$ [51, 52].

Остановимся немного подробнее на этом определении [52]. Как известно, эндоморфизм T пространства M в себя называется *точным*, если $\bigcap\limits_n \mathcal{M}_n = \mathcal{S}_0$, где $\mathcal{S}_0$ — σ-алгебра подмножеств M, которые имеют меру 0 или 1. Допустим, что в приведенном определении σ-алгебра состоит из r атомов. Тогда существует r подмножеств $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_r$, которые должны удовлетворять следующим условиям: $\mathcal{C}_i \bigcap \mathcal{C}_j = \varnothing$ для $i \neq j$, $\mathcal{C}_{i+1} = T\mathcal{C}_i$, $i < r$, и $T\mathcal{C}_r \subseteq \mathcal{C}_1$. При этом эргодическими компонентами отображения T^r являются множества $\mathcal{C}_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$. В свою очередь, отображение $T^r|_{\mathcal{C}_i}$ будет точным эндоморфизмом и, таким образом, будет проявлять свойство перемешивания (см. [116]).

Известный пример отображения с хаотическим поведением — квадратичное отображение при $a = 4$, $T : x \mapsto 4x(1 - x)$. Это отображение имеет инвариантную меру, которая непрерывна по отношению к мере Лебега, $\mu(dx) = dx/\Bigl(\pi\sqrt{x(1-x)}\Bigr)$. Однако в общем случае инвариантную меру в явном виде найти не удается, и ее построение для произвольных динамических систем является достаточно сложной задачей.

В теории одномерных отображений важную роль играет производная Шварца Sf функции f: $Sf = f'''/f' - 3(f''/f')^2/2$. В частности, унимодальное отображение T_a с условием $Sf < 0$ может иметь не более чем один устойчивый цикл [166]. Более того, отображение с отрицательной производной Шварца имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру, если траектория его критической точки x_c попадает на отталкивающее канторово множество или, начиная с некоторой итерации, совпадает с неустойчивым циклом конечного периода. Более точно [167, 168], пусть отображение (4) является унимодальным отображением интервала I в себя, а функция f имеет отрицательную производную Шварца. Предположим, что

$$T_a^l T_a^m x_c = T_a^m x_c,$$

$$\left| T_a' T_a^m x_c \cdot T_a' T_a^{m+1} x_c \cdot \ldots \cdot T_a' T_a^{m+l+1} x_c \right| > 1,$$

где $T_a' x_c = 0$ и $m, l > 0$ — некоторые целые числа. Тогда на интервале I существует абсолютно непрерывная инвариантная мера. Этот результат известен как *теорема Огнева–Мисюревича*.

Необходимо отметить, что если унимодальное отображение с хаотическим поведением имеет отрицательную производную Шварца, то оно *не может иметь* устойчивые циклы.

Обозначим множество параметрических значений a, соответствующих хаотическому поведению отображения T_a, через A_c. Для некоторых семейств отображений, определенных на интервале, мера таких параметрических значений положительна (см. [51, 52, 169–171]). В частности, был получен замечательный результат, состоящий в том, что множество значений параметра a, для которых квадратичное отображение $T_a\colon x \mapsto ax(1 - x)$ имеет положительный показатель Ляпунова, обладает положительной мерой Лебега (см. [169–171]).

Следствием из этого утверждения является важная теорема Якобсона [172]: пусть F — одномерное отображение, близкое в C^3-норме к отображению $x \mapsto x(1-x)$, и a_0 — значение параметра a такое, что $a_0 F(x_c) = 1$. Тогда мера множества $A_c = \{a \in (0, a_0] \mid F_a\colon x \mapsto aF(x)$ имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру$\}$ является *положительной*.

Отметим еще один глубокий результат [173], касающийся одномерного отображения (20), порождаемого квадратичной функцией $f(x, a) = ax(1 - x)$, $a \in (0, 4] \equiv A$. Долгое время существовала гипотеза о том, что значения параметра a, соответствующие устойчивому периодическому поведению такого отображения, всюду плотны в области A. Численные исследования показали, что с увеличением a доля тех его значений, которые отвечают хаотической динамике, увеличивается. В работе [173] было доказано, что если два квадратичных отображения являются топологически сопряженными, то они являются и квазисимметрично сопряженными. Тогда из общей теории одномерных отображений (см. [169]) можно сделать заключение, что множество параметрических значений, для которых отображение содержит одну и ту же непериодическую нидинг-последовательность, имеет только один элемент. Это означает, в частности, что множество значений параметра, для которого соответствующее отображение обладает устойчивым циклом, является открытым и плотным.

Одним из простейших классов отображений с сильными статистическими свойствами являются растягивающие отображения. Пусть f — некоторая функция на $\mathbf{R}^1$, обладающая следующими свойствами: (*а*) $f \in C^{1+\alpha}$ для $\alpha > 0$; (*б*) $f'(x) \geqslant \lambda_0 > 1$; (*в*) $f(x+1) = f(x) + r$ для некоторого целого r; (*г*) $f(0) = 0$. Тогда отображение $T: x \mapsto f(x)$ является точным эндоморфизмом, имеет инвариантную меру μ, эквивалентную мере Лебега, и энтропия $h(T) = \int \ln f'(x) d\mu(x)$.

Эти свойства растягивающих отображений были описаны в работах [174–176]. Позже более общие результаты о свойствах инвариантных мер несжимающих отображений (но необязательно одномерных) были получены в работе [177] и, в свою очередь, обобщены на широкий класс кусочно-монотонных растягивающих преобразований, включающих достаточно популярный пример $x \mapsto \beta x \pmod 1$ с иррациональным $\beta > 1$ [178].

Заключительные замечания

В настоящем обзоре на достаточно строгом уровне описаны основные положения современной теории хаотических динамических систем. Необходимо отметить, что исследование хаотических колебаний в последнее время сильно разветвилось. Появились новые направления, связанные с теорией инвариантной меры [25, 27, 111, 120, 143, 145, 169], изучением гомоклинических структур [36, 37, 94–96, 98, 99, 106], свойством гиперболичности [25, 26, 31, 94, 95, 111, 144], теорией показателей Ляпунова [43, 110, 111, 113, 125, 136, 137] и другими характеристиками (см., напр., [24, 25, 27, 31, 51, 93, 103, 105, 109, 118, 127, 162, 169, 179, 180] и приведенную там литературу). Поэтому количество работ в этой области практически необъятно. Так, библиография по динамическим системам [181] включает более 4400 публикаций, а по хаотическим колебаниям [182] — около 7000 (!). Кроме того, внушительные списки литературы по практически всем современным направлениям нелинейной динамики и ее приложениям собраны в монографиях [25, 27, 31, 36, 42, 55–60, 64, 84, 111, 112].

Переход к хаотическим колебаниям в динамических системах осуществляется через последовательность качественных перестроек в их поведении. Основные типы таких перестроек при плавном изменении параметров системы и методы их описания при помощи ренормгруппового анализа составляют самостоятельный раздел нелинейной динамики — теорию бифуркаций. Большой интерес с точки зрения возникновения хаотических колебаний представляют перестройки систем в целом, их подмножеств и аттракторов. Наиболее часто встречающиеся в приложениях типы таких бифуркаций описаны в п. 1. Из литературы по теории бифуркаций обращают на себя внимание достаточно полные обзоры [37, 47], монографии [36, 38–40, 183] и работы, включающие историю вопроса [184, 185].

В настоящее время существует несколько подходов к изучению свойств хаотических динамических систем. Ряд таких подходов дан в п. 2, где на строгом уровне представлены основные концепции эргодической теории и теории одномерных отображений, относящиеся к хаотической динамике. В качестве дальнейшего ознакомления можно рекомендовать работы [13, 21, 23, 25, 27, 51, 111, 118, 125, 126, 144, 162].

В заключение необходимо отметить, что главной целью данного обзора является описание различных подходов, используемых в настоящее время при анализе нелинейных динамических систем. Естественно, что ряд методов и проблем остался за пределами нашего рассмотрения. Однако их подавляющее большинство отражено в работах, учебных пособиях и монографиях, приведенных в списке литературы.

Литература

1. *Poincaré A.* Calcul des Probabilities. Paris: Gauthier-Villars, 1912.
2. *Boltzmann L.* // J. f. Mathem. 1887. Bd. 100. S. 201.
3. *Boltzmann L.* Vorlesungen über Gastheorie. Leipzig, 1896.
4. *Больцман Л.* Статьи и речи. М.: Наука, 1970.
5. *Ehrenfest P., Ehrenfest T.* // Enzyklopaedie d. Math. Wiss. Bd. IV, Tl. 32. Leipzig, 1911.
6. *Эренфест П.* Сборник статей. М.: Наука, 1972.
7. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
8. The Boltzmann Equation: Theory and Application / Eds. E.G.D. Cohen, W. Thirring. Berlin: Springer-Verlag, 1973.
9. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of Nonlinear Problems: Los Alamos Scientific Report, LA-1940, 1955.
10. *Ford J.* // J. Math. Phys. 1961. **2**. P. 387.
11. *Jackson E.A.* // J. Math. Phys. 1963. **4**. P. 551.
12. *Пуанкаре А.* Избранные труды. **Т**. 1. М.: Наука, 1973.
13. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. N.Y.: American Mathematical Society, 1927.
14. *Крылов Н.С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
15. *Борн М.* // УФН. 1959. **69**, № 2. С. 173.
16. *Ford J.* // Phys. Reports. 1981. **75**. P. 288.
17. *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1958. **119**. С. 861.
18. *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1959. **124**. С. 754.
19. *Синай Я.Г.* // ДАН СССР. 1959. **124**. С. 768.
20. *Smale S.* // Differential and Combinatorial Topology / Ed. S.S. Cairns. Princeton: Princeton University Press, 1965. P. 63.
21. *Смейл С.* // Успехи матем. наук. 1970. **25**, № 1. С. 113.
22. *Аносов Д.В.* // ДАН СССР. 1962. **145**. С. 707; 1963. **151**. С. 1250.
23. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. М.: Наука, 1967.

24. *Боуэн Р.* Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.
25. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
26. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
27. *Lasota A., Mackey M.C.* Chaos, Fractals and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
28. *Синай Я.Г.* // ДАН СССР. 1963. **153**. С. 1261.
29. *Синай Я.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ. 1963. № 5. С. 6.
30. *Bunimovich L.A., Sinai Ya.G.* // Commun. Math. Phys. 1981. **78**. P. 479.
31. Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1985.
32. *Bunimovich L.A.* // Chaos. 1991. **1**. P. 187.
33. *Tabachnikov A.* Billiards. Paris: France Mathematical Soc. Press, 1995.
34. *Milnor J.* // Commun. Math. Phys. 1985. **99**. P. 177.
35. *Афраймович В.С.* // Нелинейные волны: Динамика и эволюция / Ред. А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович. М.: Наука, 1989. С. 16.
36. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Berlin: Springer-Verlag, 1990 (Third printing).
37. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* // Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т. 5. Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 5.
38. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.
39. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
40. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
41. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
42. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.
43. *La Salle J.P., Lefschetz S.* Stability by Lyapunov's Direct Method. N. Y.: Acad. Press, 1961.
44. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Устойчивость критических положений равновесия. Пущино: Изд-во АН СССР, 1985.
45. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979.
46. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.
47. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
48. *Афраймович В.С.* // Нелинейные волны: Структуры и бифуркации / Ред. А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович. М.: Наука, 1987. С. 189.
49. *Feigenbaum M.J.* // J. Stat. Phys. 1978. **19**. P. 25.
50. *Feigenbaum M.J.* // J. Stat. Phys. 1979. **21**. P. 669.
51. *Синай Я.Г.* Современные проблемы эргодической теории. М.: Наука, 1995.
52. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* // Успехи матем. наук. 1984. **39**, №3. С. 3.
53. *Collet P., Eckmann J.-P.* Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems. Boston: Birkhauser, 1980.
54. *Lanford III O.E.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. **6**. P. 427.
55. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
56. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
57. *El Naschie M.S.* Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach. L.: McGraw-Hill, 1990.
58. *Jackson E.A.* Perspectives of Nonlinear Dynamics. V. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989, 1990.
59. Chaos II / Ed. Hao Bai-Lin. Singapore: World Sci., 1990.
60. *Manneville P.* Dissipative Structures and Weak Turbulence. L.: Acad. Press, 1990.
61. *Collet P., Eckmann J.-P., Koch H.* // J. Stat. Phys. 1980. **25**. P. 1.
62. *Feigenbaum M.J.* // Phys. Lett. 1979. **A74**. P. 375.
63. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
64. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
65. *Фейгенбаум М.* // УФН. 1983. **141**, № 2. С. 343.
66. *Crutchfield J., Nauenberg M., Rudnick J.* // Phys. Rev. Lett. 1981. **46**. P. 933.
67. *Feigenbaum M.J., Hasslacher B.* // Phys. Rev. Lett. 1982. **49**. P. 605.
68. *Eckmann J.-P.* // Rev. Mod. Phys. 1981. **53**, No. 4, Pt. 1. P. 643.
69. *Pomeau Y., Manneville P.* // Commun. Math. Phys. 1980. **74**. P. 189.
70. *Manneville P., Pomeau Y.* // Physica D. 1980. **1**, No. 2. P. 219.
71. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
72. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* // ДАН СССР. 1974. **219**. С. 1281.
73. *Лукьянов В.И., Шильников Л.П.* // ДАН СССР. 1978. **243**. С. 26.
74. *Loskutov A.Yu., Mikhailov A.S.* Complex Patterns. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
75. *Hu B.* // Chaos and Statistical Methods / Ed. Y. Kuramoto. Berlin: Springer-Verlag, 1984. P. 72.
76. *Hu B., Rudnick J.* // Phys. Rev. Lett. 1982. **48**. P. 1645.
77. *Hu B.* // Phys. Reports. 1982. **91**, No. 5. P. 233.
78. *Manneville P.* // J. de Physique. 1980. **41**. P. 1235.
79. *Procaccia I., Schuster H.G.* // Phys. Rev. A. 1983. **28**, No. 2. P. 1210.
80. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983. С. 3.
81. *Kaneko K.* Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems. Singapore: World Sci., 1986.
82. *Aronson D.G., Chory M.A., Hall G.R., McGehee R.P.* // New Approach to Nonlinear Problems in Dynamics. Philadelphia: SIAM, 1980. P. 339.
83. *Carry J., Yorke J.A.* // Lecture Notes in Mathematics. V. 470. Berlin: Springer-Verlag, 1978. P. 48.

84. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
85. *Belair J., Glass L.* // Physica D. 1985. **16**. P. 143.
86. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* // Publ. Math. IHES. 1983. V. 57. P. 5.
87. *Kaneko K.* // Progr. Theor. Phys. 1984. **73**, No. 6. P. 1089.
88. *Boyland P.L.* // Commun. Math. Phys. 1986. **106**. P. 353.
89. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* // Physica D. 1982. **5**. P. 370.
90. *Shenker S.J.* // Physica D. 1982. **5**. P. 405.
91. *Шарковский А.Н.* // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970. С. 541.
92. *Block L.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. **72**. P. 576.
93. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986.
94. *Palis J., Takens F.* // Ann. of Math. 1987. **125**. P. 337.
95. *Palis J., Takens F.* Hyperbolicity and Sensitive-Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
96. *Mora L., Viana M.* // Acta Math. 1993. **171**. P. 1.
97. *Newhouse S.E.* // Publ. Math. IHES. 1979. **50**. P. 101.
98. *Newhouse S.E.* // Progress in Mathematics. No. 8. Boston: Birkhauser, 1978. P. 1.
99. *Wiggins S.* Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
100. *Holmes P.J., Moon F.C.* // Trans. ASME. Ser. E. 1983. **50**, No. 4. P. 1021.
101. *Мельников В.К.* // Тр. Моск. матем. об-ва. 1963. Т. 12. С. 3.
102. *Yorke J.A., Alligood K.A.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1983. **9**. P. 319.
103. *Viana M.* // Proc. XI Int. Congr. of Math. Phys. (Paris, 1994). Cambridge, MA: Internat. Press, 1995. P. 1142.
104. *Robinson C.* // Commun. Math. Phys. 1983. **90**. P. 433.
105. *Viana M.* // Bull. Braz. Math. Soc. 1993. **24**. P. 13.
106. *Romero N.* Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions: Thesis IMPA, 1992.
107. *Palis J., Viana M.* // Ann. of Math. 1994. **140**. P. 207.
108. *Шильников Л.П.* // ДАН СССР. 1965. **160**. С. 558.
109. *Perko L.* Differential Equations and Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
110. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
111. *Eckmann J.-P., Ruelle D.* // Rev. Mod. Phys. 1985. **57**, No. 3, Pt. 1. P. 617.
112. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.
113. Lyapunov Exponents// Lect. Notes in Math. V. 1186. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
114. *Мартин Н., Инглёнд Дж.* Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988.
115. *Афраймович В.С., Рейман А.М.* // Нелинейные волны. Динамика и эволюция / Ред. А.В. Гапонов-Грехов, И.М. Рабинович. М.: Наука, 1989. С. 238.
116. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
117. *Синай Я.Г.* // Нелинейные волны / Ред. А.В. Гапонов-Грехов. М.: Наука, 1979. С. 192.
118. *Орнстейн Д.* Эргодическая теория, случайность и динамические системы. М.: Мир, 1978.
119. *Shields P.* The Theory of Bernoulli Shifts. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1973.
120. *Синай Я.Г.* // Успехи матем. наук. 1991. **46**, №3. С. 147.
121. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.
122. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
123. *Оселедец В.И.* // Тр. Моск. матем. об-ва. 1968. Т. 19. С. 179.
124. *Миллионщиков В.М.* // Матем. сб. 1969. **78**, №2. С. 179.
125. *Песин Я.Б.* // Успехи матем. наук. 1977. **32**, №4. С. 55.
126. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г.* // Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 7.
127. *Alekseev V.M., Yakobson M.V.* // Phys. Reports. 1981. **75**, No. 5. P. 287.
128. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* // Успехи матем. наук. 1959. **14**, №2. С. 3.
129. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969.
130. *Grassberger P., Procaccia I.* // Physica D. 1983. **9**. P. 189.
131. *Farmer J., Ott E., Yorke J.A.* // Physica D. 1983. **7**. P. 153.
132. *Hentschel H.G.E., Procaccia I.* // Physica D. 1983. **8**. P. 435.
133. *Paladin G., Vulpiani A.* // Phys. Reports. 1987. **156**, No. 4. P. 147.
134. *Young L.-S.* // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1981. **1**. P. 381.
135. *Ledrappier F.* // Commun. Math. Phys. 1981. **81**. P. 229.
136. *Young L.-S.* // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1982. **2**. P. 109.
137. *Pesin Ya.B.* // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1984. **4**. P. 405.
138. *Mandelbrot B.B.* Fractals: Form, Chance and Dimension. San Francisco: Freeman and Co, 1977.
139. Фракталы в физике: Сб. статей / Ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти, Я.Г. Синай, И.М. Халатников. М.: Мир, 1988.
140. *Takens F.* // Lecture Notes in Math. V. 898. Berlin: Springer-Verlag, 1980. P. 336.
141. *Takens F.* // Nonlinear Dynamics and Turbulence / Eds. G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. N. Y.: Pitman, 1983. P. 314.
142. *Синай Я.Г.* // Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 115.
143. *Сатаев Е.А.* // Успехи матем. наук. 1992. **47**, №1. С. 147.
144. *Mañé R.* Ergodic Theory and Differentiable Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
145. *Бланк М.Л.* // Успехи матем. наук. 1989. **44**, №6. С. 3.
146. Странные аттракторы: Сб. статей / Ред. Я.Г. Синай, Л.П. Шильников. М.: Мир, 1981.
147. *Плыкин Р.В.* // Успехи матем. наук. 1984. **39**, №6. С. 75.
148. *Lozi R.* // J. de Physique. 1978. **39**, Coll. C5. P. 9.
149. *Misiurewicz M.* // Nonlinear Dynamics / Ed. R.G. Helleman. N. Y.: New York Acad. Sci. 1980. **357**. P. 348.
150. *Collet P., Levi Y.* // Commun. Math. Phys. 1984. **93**. P. 461.
151. *Плыкин Р.В.* // Матем. сб. 1974. **94**, №6. С. 243.

152. *Белых В.П.* // Системы фазовой синхронизации / Ред. В.В. Шахгильдян, Л.Н. Белюстина. М.: Радио и связь, 1982. С. 161.
153. *Бунимович Л.А.* // Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 173.
154. *Бунимович Л.А., Синай Я.Г.* // Нелинейные волны / Ред. А.В. Гапонов-Грехов. М.: Наука, 1979. С. 212.
155. *Bunimovich L.A.* // Nonlinear Dynamics and Turbulence / Ed. G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. N. Y.: Pitman, 1983. P. 71.
156. *Afraimovich V.S., Shilnikov L.P.* // Nonlinear Dynamics and Turbulence / Ed. G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. N. Y.: Pitman, 1983. P. 1.
157. *Carrido R., Simó L.* // Lect. Notes in Phys. 1983. V. 179. P. 1.
158. *Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П.* // Успехи матем. наук. 1980. **35**, №5. С. 164.
159. *Быков В.В.* // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во ГГУ, 1980. С. 44.
160. *Шарковский А.Н.* // Укр. матем. журн. 1964. № 1. С. 61.
161. *Li T.-Y., Yorke J.* // Am. Math. Monthly. 1975. **82**. P. 985.
162. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. 2nd ed. N. Y.; Amsterdam: Addison-Wesley Publ. Co., 1993.
163. *Banks J., Brooks J., Cairns G.* et al. // Am. Math. Monthly. 1992. **99**. P. 332.
164. *Assaf IV D., Gadbois S.* // Am. Math. Monthly. 1992. **99**. P. 865.
165. *Knudsen C.* // Am. Math. Monthly. 1994. **101**. P. 563.
166. *Singer D.* // SIAM J. Appl. Math. 1978. **35**, No. 2. P. 260.
167. *Огнев А.И.* // Матем. заметки. 1981. **30**, № 5. С. 723.
168. *Misiurewicz M.* // Publ. Math. IHES. 1981. **53**. P. 17.
169. *de Melo W., van Strien S.* One-Dimensional Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
170. *Tsudjii M.* A proof of Benedicks–Carleson–Jakobson theorem for the quadratic family: Preprint Kyoto Univ., 1992; Positive Lyapunov exponents in families of one-dimensional dynamical systems: Preprint Kyoto Univ., 1992.
171. *Benedicks M., Carleson L.* // Ann. of Math. 1985. **122**. P. 1.
172. *Jakobson M.V.* // Commun. Math. Phys. 1981. **81**. P. 39.
173. *Świątek G.* Hyperbolicity is dense in the real quadratic family: Preprint Stony Brook, 1992.
174. *Renyi A.* // Acta Math. Sci. Hungarian. 1957. **8**. P. 477.
175. *Рохлин В.А.* // Изв. АН СССР, сер. матем. 1961. **25**. С. 499.
176. *Lasota A., Yorke J.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. **186**. P. 481.
177. *Walters P.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. **236**. P. 121.
178. *Hofbauer F., Keller G.* // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1982. **2**. P. 23.
179. *Parry W., Pollicott M.* Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics. Paris: Soc. Math. de France, 1990.
180. *Ruelle D.* Dynamical Zeta Functions for Piecewise Monotone Maps of the Interval. San Francisco: Americal Math. Soc., 1994.
181. *Shiraiva K.* Bibliography of Dynamical Systems: Preprint of Nagoya Univ. 1985, No. 1.
182. *Shu-yu Z.* Bibliography on Chaos. Singapore: World Sci., 1991.
183. *Chow S.N., Hale J.K.* Methods of Bifurcation Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
184. *Арнольд В.И.* // Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т. 5. Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 219.
185. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию
18.12.00