На правах рукописи

НИКИТИН АНДРЕЙ ГЕННАДЬЕВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ТИПА РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ СЛОЯМИ

01.01.03 – математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Научный консультант доктор физико-математических наук профессор Нефёдов Николай Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук профессор Галкин Валерий Алексеевич

доктор физико-математических наук профессор Дмитриев Михаил Геннадьевич

доктор физико-математических наук профессор Курина Галина Алексеевна

Ведущая организация: Ярославский государственный университет имени П.Г.Демидова

Защита состоится «   » ________________ 2009г. в «   » часов
на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу:
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В.Ломоносова,
дом 1, строение 2, физический факультет, аудитория _______.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан «   » ________________ 2009г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук профессор Грац Ю.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Математические задачи для уравнения реакция-диффузия-адвекция имеют много важных практических приложений в химической кинетике, синергетике, астрофизике [33, 34], биологии, теории фазовых переходов и многих других областях естествознания. Во многих важных случаях решения этих задач имеют внутренние и пограничные слои (см. [1] и приведенные в ней ссылки). С точки зрения приложений наибольший интерес представляют решения с внутренними слоями, которые принято называть контрастными структурами. Контрастная структура типа ступеньки характеризуется наличием внутренних переходных слоев, локализованных в окрестности некоторых точек (в двумерном случае – в малых окрестностях некоторых замкнутых кривых), в которых происходят резкие переходы решения из окрестности одной части семейства решений вырожденного уравнения (то есть уравнения, которое получается из исходного при обращении малого параметра в нуль) в окрестность другой части этого семейства.

В теории сингулярных возмущений контрастные структуры ранее исследовались в нелинейных эллиптических краевых задачах с малыми параметрами при старших производных, рассматриваемых в ограниченных областях. Впервые существование контрастных структур в сингулярно возмущенных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений было доказано в работах А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [2–5]. Результат по существованию двумерных контрастных структур типа ступеньки принадлежит П. Файфу (P. Fife) и У. Гринли (W. Greenlee) [6]. Асимптотические разложения решений типа контрастной структуры по малому параметру можно построить на основе метода пограничных функций [2, 32–35]. Для одномерных задач это сделано в [2–5,7, 32–34] и ряде других работ, для некоторых двумерных задач – в [8,9, 35]. Обширная библиография по этой проблематике содержится в [7].

Важным вопросом, как с теоретической, так и с прикладной точки зрения, является вопрос об устойчивости контрастных структур как стационарных решений соответствующих параболических задач (в смысле Ляпунова). Для одномерных задач этот вопрос был решен в работе А.Б. Васильевой [10], В.Ф. Бутузова [10], работах [32–34, 36, 37], S. Angenent., J. Mallet-Paret и L. Peletier [12], J. Hale и K. Sakamoto [13] и др. Устойчивость периодической контрастной структуры типа ступеньки в пространственно двумерном случае была впервые получена в работе [35] путем исследования спектра сингулярно возмущенной двумерной задачи на собственные значения. Вопросы устойчивости и локальной единственности решений сингулярно возмущенных нелинейных эллиптических задач, а так же важная проблема формирования контрастных структур в сингулярно возмущенных параболических задачах, были решены В.Ф. Бутузовым и И.В. Неделько с помощью предложенного ими метода параметрических барьеров [14, 15].

Наиболее эффективным методом доказательства существования контрастных структур и оценки остаточных членов асимптотических разложений является асимптотический метод дифференциальных неравенств Н.Н. Нефедова [7, 8]. Суть его состоит в том, что верхнее и нижнее решения конструируются путем модификации формальной асимптотики. Рассматривая эллиптическую задачу как стационарную задачу для соответствующего параболического уравнения, этим методом можно также доказать устойчивость по Ляпунову и локальную единственность решения исходной задачи.

В настоящее время большой интерес вызывают более сложные модели, которые включают эффекты обратной связи или нелокального взаимодействия. Различные направления теории нелокальных нелинейных моделей интенсивно разрабатываются как у нас в стране, так и за рубежом. Как правило, эти модели представлены сингулярно возмущенными интегродифференциальными уравнениями, описывающими важные для приложений процессы, в которых необходимо принять во внимание последствия или задержку, во многих областях естествознания, в частности, в задачах динамики реакторов, моделях генетики популяций, химической кинетике [16], теории фазовых переходов [17–19], социологии [31] и других областях [1, 20, 21]. Так модели, обладающие наследственными свойствами, описываются практически только интегродифференциальными уравнениями [22, 23]. В частности, например, в теории фазовых переходов при рассмотрении теоретической модели процесса разделения фаз в двойной полимерной смеси возникает следующая задача для уравнения Кана-Хилиарда (Cahn-Hilliard) [17-19]

$$u_t = \Delta\left[f(u) - \varepsilon^2 \Delta u \right], \quad (x,y)\in\Omega, \quad t>0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \ \ \frac{\partial}{\partial n}\left[f(u) - \varepsilon^2 \Delta u \right] = 0, \ (x,y)\in\partial\Omega, \ \ u(x,y,0) = g(x,y), \tag{1}$$

где $u(x,y,t)$ – концентрация одной из компонент смеси, Ω – ограниченная область с гладкой границей, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе области $\partial\Omega$, $f(u) = W'(u)$, где $W(u)$ – двойная потенциальная яма, ε – диапазон межмолекулярных сил. Простыми вычислениями [18] задача (1) сводится к задаче для нелокального уравнения реакция-диффузия

$$u_t = \varepsilon^2 \Delta u - f(u) + \int\limits_{\Omega} f(u) d\Omega, \quad (x,y)\in\Omega, \quad t>0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,y)\in\partial\Omega, \ \ u(x,y,0) = g(x,y). \tag{2}$$

Изучение новых моделей, описываемых нелинейными нелокальными задачами, подобными задаче (2), требует развития соответствующих методов математической физики, адекватных сложности таких задач.

Целью настоящей работы является развитие асимптотических методов исследования нелокальных уравнений типа реакция-диффузия-адвекция, широко используемых в математической физике, позволяющих эффективно исследовать широкий круг нелинейных нелокальных моделей, а именно:
– разработка методов построения асимптотических приближений решений с пограничными и внутренними слоями (контрастными структурами) для широкого класса нелинейных сингулярно возмущенных интегродифференциальных задач.
– развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для указанного класса задач как эффективного средства доказательства теорем существования, оценки остаточных членов асимптотик, исследования устойчивости решений и определения локальной области влияния устойчивых решений, имеющих пограничные и внутренние слои.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Методы, разработанные в диссертации, могут быть использованы для исследований проблем асимптотической устойчивости и локальной единственности решений новых классов нелинейных интегродифференциальных сингулярно возмущенных задач, а также для исследования прикладных нелинейных нелокальных задач, в частности, в таком важном с точки зрения практики вопросе как нахождение области локализации внутреннего переходного слоя (фронта) и определение скорости его движения (либо установление его устойчивости).

Апробация работы.
Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре МГУ по малому параметру (руководители: профессора А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов), на научных семинарах факультета ВМ и К (руководитель: профессор И.А. Шишмарев), кафедры математики физического факультета МГУ, НИВЦ МГУ (руководители: профессора А.Г. Ягола, А.Б. Бакушинский и А.В. Тихонравов), на международной конференции "Теория и приложения методов малого параметра", посвященной 90-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова (Обнинск, 1996), на международной конференции, посвященной 70-летию академика А.М. Ильина (Уфа, 2002), на международных конференциях "Nonlinear partial differential equations" (Алушта, 2003, 2005), на международной конференции, посвященной 100-летию А.А. Андронова (Нижний Новгород, 2001), на международных конференциях "Математические идеи П.Л.

Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания" (Обнинск, 2002, 2004, 2008), на седьмой Крымской международной математической школе "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Алушта 2004), на VI международном конгрессе по математическому моделированию (Нижний Новгород, 2004), на международной конференции "Tikhonov and contemporary mathematics" (Москва, 2006), на международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной памяти И.Г. Петровского (Москва, 2007), на Тихоновских чтениях (Москва, 2002, 2006, 2008), на Ломоносовских чтениях (Москва, 2006, 2008), на вторых – шестых (1994-1998), восьмых (2000), десятых (2002), одиннадцатых (2003), пятнадцатых – семнадцатых (2006-2008) математических чтениях РГСУ (МГСУ), на международной конференции Science Links Moscow-Berlin-Paris Workshop 2008, посвященной 50-тию сотрудничества МГУ им. М.В. Ломоносова с Гумбольдтским университетом (Берлин, Германия).

Публикации Основные результаты, полученные автором и изложенные в диссертации, опубликованы в работах [32–46] (список литературы приведен в конце автореферата). По материалам диссертации опубликованы 15 научных работ и сделано 29 докладов на научных конференциях. Результаты, содержащиеся в работах, выполненных в соавторстве, и включенные в диссертацию, получены автором лично и включены в диссертацию с согласия и одобрения соавторов этих работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы (некоторые параграфы, в свою очередь, разбиты на пункты), заключения и списка литературы, содержащего 70 наименований. Нумерация формул своя в каждом параграфе (пункте). В работе для формул принята двойная нумерация: первое число – номер параграфа (пункта), второе – порядковый номер формулы в параграфе (пункте). Объем диссертации составляет 198 страниц, включая 8 страниц цитированной литературы.

Содержание работы.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, научная новизна полученных результатов, а также кратко изложено содержание и основные результаты работы.

В первой главе изучаются задачи Коши для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра и Фредгольма, которые описывают нелокальные модели, например, в биологии при описании распространения инфекционных болезней [22, 23]. Рассмотрен случай, когда вырожденное уравнение имеет изолированное решение, и случай, когда решение вырожденного уравнения имеет угловую точку (т.н. случай со сменой устойчивости). Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах [43, 45]. При построении асимптотики решения используется метод пограничных функций [2], в котором, в отличие от случая обыкновенных дифференциальных уравнений, вводятся дополнительные члены в разложение нелинейности уравнения, порождаемые интегральным оператором. Для обоснования результата используется развиваемый для нового класса задач асимптотический метод дифференциальных неравенств, предложенный в свое время Н.Н. Нефедовым для обоснования асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных [8, 9].

В первом параграфе главы 1 рассматривается начальная задача Коши для нелинейного обыкновенного сингулярно возмущенного интегродифференциального уравнения типа Вольтерра

$$\varepsilon u' = L(u,u,t,\varepsilon), \quad 0 < t \le 1, \tag{3}$$

где $L(u,v,t,\varepsilon) \equiv \int\limits_0^t g(u(t,\varepsilon),v(s,\varepsilon),t,s,\varepsilon)ds + f(u,t,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр,

$$u(0,\varepsilon) = u^0. \tag{4}$$

Задача (3), (4) используется в приложениях как нелокальная модель реакции-диффузии в пространственно неоднородных средах, учитывающая эффекты обратной связи и нелокальных взаимодействий. Изучается случай, когда вырожденное нелинейное интегральное уравнение

$$L(u,u,t,0) = 0$$

имеет изолированное гладкое решение, и случай, когда есть пересекающиеся гладкие решения. В последнем случае рассматривается ситуация, когда происходит так называемая смена устойчивости, и решение вырожденного уравнения, приближающее решение исходной задачи, имеет, вообще говоря, угловую точку при некотором значении аргумента $t = t_0 \in (0,1)$. Для случая со сменой устойчивости развиваются идеи изучения таких задач в различных классах дифференциальных уравнений (см. [24] и ссылки, приведенные в этом обзоре) на новый класс интегродифференциальных задач. Отметим, что в случае смены устойчивости решение имеет «слабый» внутренний слой (скачок производной), объясняющий скачок скорости химической реакции в интегро-дифференциальной модели реакции-диффузии аналогично тому, как это было в дифференциальных моделях. Первый параграф состоит из следующих разделов. В разд. 2 строится формальная асимптотика решения задачи (3), (4) в случае гладкого устойчивого решения, в разд. 3 проводится обоснование асимптотики для данного случая с помощью развиваемого для нового класса задач асимптотического метода дифференциальных неравенств [8, 9]. В разд. 4 § 1 рассмотрен случай со сменой устойчивости.

Для построения асимптотики решения применяется модифицированная схема метода пограничных функций [2], предложенная впервые в [38]. Асимптотика решения задачи строится в виде формального разложения

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n(\overline{u}_n(t)+\Pi_n u(\tau))\equiv\overline{u}(t,\varepsilon)+\Pi u(\tau,\varepsilon), \tag{5}$$

где $\overline{u}_n(t)$ члены регулярной части асимптотики, $\Pi_n u(\tau)$ – погранслойные члены асимптотики, $\tau=t/\varepsilon$ – погранслойная переменная. Модификация состоит в том, что интегральный оператор $I(u,t,\varepsilon)\equiv\int\limits_0^t g(u(t),u(s),t,s,\varepsilon)ds$ нужно представить в виде, аналогичном (5)

$$I\equiv\overline{I}+\Pi I. \tag{6}$$

Для этого подынтегральную функцию g нужно представить в виде более сложном, чем разложение (5). Это представление подробно описано в п. 2 § 1.

Задача (3), (4) рассматривается при выполнении следующих условий:

Условие А1. *Функции f и g являются достаточно гладкими (При построении асимптотики с остаточным членом порядка $O(\varepsilon^{n+1})$ достаточно потребовать, чтобы они были $n+2$ раза непрерывно дифференцируемы).*

Условие А2. *Пусть вырожденное уравнение*

$$L(u,u,t,0)=0 \tag{7}$$

имеет изолированный корень $u(t)=\varphi(t)$ на отрезке $[0,1]$, и

$$L_u(\varphi(t),\varphi(s),t,0)<0 \quad при \quad t\in[0,1],$$

где $L_u(\varphi(t),\varphi(s),t,0)\equiv f_u(\varphi(t),t,0)+\int\limits_0^t g_u(\varphi(t),\varphi(s),t,s,0)ds$ (условие устойчивости корня вырожденного уравнения).

Условие А3. *Начальное условие u^0 принадлежит области влияния устойчивого корня $\varphi(t)$, т.е. задача*

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau}=f(\tilde{u}(\tau),0,0),\ \tau>0,$$

$$\tilde{u}(0)=u^0,$$

имеет решение $\tilde{u}=\tilde{u}(\tau)$, причем $\tilde{u}(\tau)\to\varphi(0)$ при $\tau\to\infty$.

Условие А4. *Пусть функция* $g(u,v,t,s,\varepsilon)$ *будет монотонно неубывающей по переменной* v *в некоторой области изменения этой переменной при любом фиксированном значении переменной* u *из той же области изменения, что и для второй переменной, при* $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ *и достаточно малых* ε *(так называемое условие квазимонотонности, область, о которой идет речь в данном условии, будет уточнена в Теореме 1.2).*

Регулярный член асимптотики нулевого порядка является решением нелинейного интегрального уравнения

$$L(\overline{u}_0,\overline{u}_0,t,0)=0 \ .$$

В силу условия **А2** можно выбрать в качестве его решения $\overline{u}_0(t)=\varphi(t)$. Погранслойный член нулевого порядка определяется из нелинейного дифференциального уравнения

$$\Pi_0 u' = f(\varphi(0)+\Pi_0 u(\tau),0,0), \qquad \tau>0,$$

с дополнительными условиями

$$\Pi_0 u(0)=u^0-\varphi(0), \quad \Pi_0 u(+\infty)=0.$$

Условие **А3** гарантирует разрешимость данной задачи Коши, а условие **А2** – экспоненциальную оценку пограничной функции

$$\left|\Pi_0 u(\tau)\right| \le C\exp(-\kappa\tau), \ \ \tau\ge 0\,, \tag{8}$$

где C и κ - некоторые положительные постоянные.

Регулярные члены первого и следующих порядков находятся из линейных интегральных уравнений

$$L_u(\varphi,\varphi,t,0)\overline{u}_i(t)+\int_0^t g_v'(\varphi(t),\varphi(s),t,s,0)\overline{u}_i(s)ds = p_i(t)\,,$$

где $p_i(t)$ определяются через уже известные члены асимптотики ($i=1,2,\ ...$). В силу свойств интегрального оператора Вольтерра эти уравнения однозначно разрешимы. Погранслойные члены первого и следующих порядков вблизи начальной точки $t=0$ определяются из линейных дифференциальных задач

$$\Pi_i u' = f_u(\varphi(0)+\Pi_0 u(\tau),0,0)\Pi_i u+\pi_i(\tau), \quad \tau>0, \ \ \Pi_i u(0)=-\overline{u}_i(0),$$

где функции $\pi_i(\tau)$ выражаются через уже определенные члены асимптотики ($i=1,2,...$). Для погранфункций $\Pi_i u(\tau)$ также справедлива экспоненциальная оценка, аналогичная оценке (8). Таким образом, построена формальная асимптотика решения задачи (3), (4) с остаточным членом порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, где n - произвольное натуральное число.

Обоснование построенного асимптотического разложения решения задачи (3), (4) проведено развиваемым в диссертации асимптотическим методом дифференциальных неравенств. Приведем классическое определение верхнего и нижнего решения для задачи (3) ,(4) (см. [1]).

Определение 1.1. *Функция* $\beta(t,\varepsilon)\in C^1((0,1])\cap C([0,1])$ *называется верхним решением задачи* (3), (4)*, если*

$$\varepsilon^2\beta' - L(\beta,\beta,t,\varepsilon)\geq 0,\quad t\in(0,1),$$

$$\beta(0,\varepsilon)\geq u^0.$$

Аналогично, функция $\alpha(t,\varepsilon)$ *называется нижним решением, если выполнены неравенства с обратным знаком.*

При обосновании асимптотики используется следующая известная теорема о дифференциальных неравенствах [1].

Теорема 1.1. *Пусть существуют функции* $\alpha(t,\varepsilon)$ *и* $\beta(t,\varepsilon)$*, являющиеся соответственно нижним и верхним решением задачи (3), (4), причем* $\alpha(t,\varepsilon)\leq\beta(t,\varepsilon)$ *при* $t\in[0,1]$. *Пусть, кроме того, функция* g *непрерывна вместе со своими частными производными по первому и второму аргументу и удовлетворяет условию* ***A4*** *на промежутке* $[\alpha,\ \beta]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3), (4) $u(t,\varepsilon)$ *такое, что*

$$\alpha(t,\varepsilon)\leq u(t,\varepsilon)\leq\beta(t,\varepsilon).$$

На основе конструктивного метода построения нижнего и верхнего решений доказана следующая теорема:

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия* ***A1 – A4****. Тогда для достаточно малых* ε *существует единственное решение задачи* (3), (4)*, удовлетворяющее неравенству*

$$\max_{[0,1]}\left|\, u(t,\varepsilon)-U_n(t,\varepsilon)\,\right|\leq C\varepsilon^{n+1},$$

где $U_n(t,\varepsilon)$ *- частичная сумма порядка* n *асимптотического ряда* (5).

Приведем вид верхнего решения для случая $n=0$

$$\beta(t,\varepsilon)=\varphi(t)+\varepsilon(\overline{u}_1(t)+w(t))+\Pi_0u(\tau)+\varepsilon\Pi_{1\beta}(\tau),$$

где $w(t)>0$ – некоторое положительное решение неравенства

$$L_u(\varphi,\varphi,t,0)w(t)+\int_0^t g_v(\varphi,\varphi,t,s,0)w(s)ds<0, \qquad 0<t\le 1.$$

Показано, что положительные решения денного неравенства существуют при выполнении условия **A4.** Функция $\Pi_{1\beta}(\tau)$ – модифицированная пограничная функция.

В случае произвольного n соответствующие нижнее и верхнее решения α_{n+1} и β_{n+1} получаются из такой же модификации $U_{n+1}(t,\varepsilon)$ – частичной суммы порядка $n+1$ асимптотического ряда (5).

Далее в первом параграфе рассмотрена задача (3), (4) в случае, когда вырожденное решение имеет на отрезке [0,1] два различных корня $\varphi(t)$ и $\phi(t)$, пересекающихся в некоторой внутренней точке отрезка (т.е. $\varphi(t_0)=\phi(t_0)$, $t_0\in(0,1)$).

Условие A5. *Пусть*

$$\varphi(t)>\phi(t) \text{ при } 0\le t<t_0, \quad \varphi(t)<\phi(t) \text{ при } t_0<t\le 1,$$

причем, выполнены следующие условия устойчивости корней

$$\begin{aligned}
&L_u(\varphi,\varphi,t,0)+L_v(\varphi,\varphi,t,0)<0 \text{ при } 0\le t<t_0,\\
&L_u(\varphi,\varphi,t,0)+L_v(\varphi,\varphi,t,0)>0 \text{ при } t_0<t\le 1,\\
&L_u(\phi,\phi,t,0)+L_v(\phi,\phi,t,0)>0 \text{ при } 0\le t<t_0,\\
&L_u(\phi,\phi,t,0)+L_v(\phi,\phi,t,0)<0 \text{ при } t_0<t\le 1,
\end{aligned}$$

где $L_v=\int_0^t g_v ds$.

Составим следующее решение вырожденного уравнения

$$\hat{u}(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\le t_0,\\ \phi(t), & t\ge t_0.\end{cases}$$

Определение 1.2. *Решение* $\hat{u}(t)$ *называется устойчивым составным решением.*

Таким образом, мы имеем вырожденное решение, имеющее, вообще говоря, угловую точку при $t=t_0$. Наличие точки пересечения корней не позволяет построить асимптотику выше нулевого порядка для всех значений $t\in[0,1]$. Кроме того, нам понадобятся более сильные условия на интегральный оператор L в точке t_0:

Условие A6. *Пусть выполнено неравенство*

$$[L_{uu}(\hat{u}(t_0),\hat{u}(s),t_0,0)+2L_{uv}(\hat{u}(t_0),\hat{u}(s),t_0,0)+L_{vv}(\hat{u}(t_0),\hat{u}(s),t_0,0)]<0\,.$$

Условие А7. *Пусть выполнено неравенство*

$$\hat{u}'(t_0)-L_{\varepsilon}(\hat{u}(t_0),\hat{u}(s),t_0,0)-\int_0^{\infty}Q_0g(t,\xi)d\xi<0\,,$$

где $Q_0g(t,\xi)=g(\varphi(t),\varphi(0)+\Pi_0u(\xi),t,0,0)-g(\varphi(t),\varphi(0),t,0,0)$.

Последнее неравенство следует понимать в смысле предела слева и справа при $t\to t_0$.В качестве $\overline{u}_0(t)$ берется устойчивый вблизи начальной точки корень $\varphi(t)$.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия* ***А1 – А7****. Тогда для достаточно малых ε существует единственное решение задачи* (3), (4)*, удовлетворяющее неравенству*

$$\max_{[0,1]}\left|\,u(t,\varepsilon)-U_0(t,\varepsilon)\,\right|\le C\sqrt{\varepsilon},$$

где $U_0(t,\varepsilon)=\hat{u}(t)+\Pi_0u(\tau)$.

Приведем вид верхнего и нижнего решения для данного случая. Верхнее решение $\beta(t,\varepsilon)$ имеет следующий вид

$$\beta(t,\varepsilon)=\hat{u}(t)+\Pi_0u(\tau)+\sqrt{\varepsilon}\gamma+\sqrt{\varepsilon}\Pi_{\frac{1}{2}\beta}(\tau)\,,$$

где $\gamma>0$ – некоторая постоянная, а $\Pi_{\frac{1}{2}\beta}(\tau)$ – модифицированная пограничная функция. Нижнее решение $\alpha(t,\varepsilon)$ строится в виде, отличном от верхнего решения

$$\alpha(t,\varepsilon)=\hat{u}(t)+\Pi_0u(\tau)-\varepsilon\gamma+\varepsilon\Pi_{1\alpha}(\tau)\,,$$

где $\Pi_{1\alpha}(\tau)$ – модифицированная пограничная функция.

В §2 главы 1 рассмотрена задача Коши для сингулярно возмущенного обыкновенного нелинейного интегродифференциального уравнения Фредгольма

$$\varepsilon u'=L(u,v,t,\varepsilon),\ 0<t\le 1, \tag{9}$$

$$u(0,\varepsilon)=u^0\,, \tag{10}$$

где $L(u,v,t,\varepsilon)\equiv\int_0^1 g(u(t,\varepsilon),v(s,\varepsilon),t,s,\varepsilon)ds$.

Асимптотика решения задачи строится методом, аналогичным примененному в §1 данной главы, в виде разложения (5). Будем считать, что выполнены условия **B1 – B4**, аналогичные условиям **A1 – A4** §1. Кроме того, в случае интегрального оператора Фредгольмовского типа потребуется следующее дополнительное условие:

Условие B5. *Пусть следующее неравенство имеет положительное решение* $y(t)$*:*

$$y(t)\int_0^1 g_u(\varphi(t),\varphi(s),t,s,0)ds+\int_0^1 g_v(\varphi(t),\varphi(s),t,s,0)y(s)ds<0,\,0\le t\le 1.$$

Замечание. *Достаточным условием для выполнения условия* ***B5*** *является, например, требование*

$$\int_0^1 g_y(\varphi(t),\varphi(s),t,s,0)ds+\int_0^1 g_v(\varphi(t),\varphi(s),t,s,0)ds<0,$$

в этом случае требуемым решением будет положительная постоянная, или требование на собственные значения следующего интегрального уравнения Фредгольма с неотрицательным (в силу условий ***B2*** *и* ***B4****) ядром* $K(t,s)$

$$\Lambda y(t)=\int_0^1 K(t,s)y(s)ds,$$

где

$$K(t,s)=-\frac{g_v(\varphi(t),\varphi(s),t,s,0)}{\int_0^1 g_u(\varphi(t),\varphi(s),t,s,0)ds},$$

а именно, требуется, чтобы главное позитивное собственное значение Λ_0 *было меньше единицы (см. [25], стр.83, теорема 2.1).*

Заметим также, что в §1 условие **B5** для интегрального оператора Вольтерра было следствием условий **A1 – A4**.

В п. 2 §2 строится формальная асимптотика решения задачи (9), (10). Для построения асимптотики решения применяется модификация метода пограничных функций, аналогичная предложенной в п. 2 § 1 данной главы. В п. 3 проводится обоснование асимптотики с помощью развиваемого для данного нового класса задач асимптотического метода дифференциальных неравенств [8, 9]. В п. 4 рассматривается случай, когда вырожденное уравнение (7) имеет непрерывное негладкое (имеющее скачок производной в некоторой точке $t_0\in(0,1)$) решение. В отличие от случая оператора Вольтерра, вводятся дополнительные ограничения на нелинейность, и дается другое определение негладкого решения вырожденной задачи.

Как и в § 1, для обоснования построенного асимптотического решения ведущую роль играет развиваемый для нового класса задач асимптотический метод дифференциальных неравенств. Определение верхнего и нижнего решения для задачи (9), (10) аналогично определению 1 § 1. Также в рассматриваемом случае справедлива теорема о дифференциальных неравенствах, аналогичная теореме 1.1 § 1. На основе конструктивного метода построения нижнего и верхнего решений доказана следующая теорема:

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия* ***B1 – B5.*** *Тогда для достаточно малых* ε *существует единственное решение задачи (9), (10), удовлетворяющее неравенству*

$$\max_{[0,1]} \left| u(t,\varepsilon) - U_n(t,\varepsilon) \right| \le C\varepsilon^{n+1},$$

где $U_n(t,\varepsilon)$ *– частичная сумма порядка* n *асимптотического ряда* (5).

Приведем вид верхнего решения для случая $n = 0$

$$\beta(t,\varepsilon) = \varphi(t) + \varepsilon(\overline{u}_1(t) + y(t)) + \Pi_0 u(\tau) + \varepsilon\Pi_{1\beta}(\tau),$$

где $y(t) > 0$ – некоторое положительное решение неравенства

$$y(t)\int_0^1 g_u(\varphi(t),\varphi(s),t,s,0)ds + \int_0^1 g_v(\varphi(t),\varphi(s),t,s,0)y(s)ds < 0, \quad 0 < t \le 1,$$

которое существует с силу требования **B5**.

В п. 4. § 2 рассмотрена задача (9), (10) в случае, когда вырожденное уравнение имеет на отрезке [0,1] два различных корня $\varphi(t)$ и $\phi(t)$, пересекающихся в некоторой внутренней точке отрезка (т.е. $\varphi(t_0) = \phi(t_0)$, $t_0 \in (0,1)$).

Условие B2a . *Пусть вырожденное уравнение*

$$\int_0^1 g(\overline{u}_0(t),\overline{u}_0(s),t,s,0)ds = 0$$

имеет составное решение следующего вида

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \le t \le t_0, \\ \phi(t), & t_0 < t \le 1, \end{cases}$$

удовлетворяющее условию $\int_0^1 g_u(\hat{u}(t),\hat{u}(s),t,s,0)ds < 0$ *при* $0 \le t < t_0$, $t_0 \le t < 1$ *(такое решение мы будем называть устойчивым составным решением).*

Заметим, что составить решение $\hat{u}(t)$ из $\varphi(t)$ и $\phi(t)$ возможно не для всякого вырожденного уравнения. В § 2 приведен пример уравнения, для которого это возможно сделать. Таким образом, мы имеем вырожденное решение, имеющее, вообще говоря, угловую точку при $t = t_0$. Наличие точки пересечения корней не дает возможности построить асимптотику выше нулевого порядка для всех значений $t \in [0,1]$, так мы не можем построить регулярные члены асимптотики выше нулевого порядка из-за неразрешимости интегрального уравнения для регулярных членов выше нулевого порядка при $t \geq t_0$. Заменим требование **B5** на следующее:

Условие B5a. *Пусть при* $0 \leq t < t_0$ *и* $t_0 < t \leq 1$ *выполнено следующее неравенство*

$$\int_0^1 g_u(\hat{u}(t),\hat{u}(s),t,s,0)ds + \int_0^1 g_v(\hat{u}(t),\hat{u}(s),t,s,0)ds < 0.$$

Кроме того, нам понадобятся более сильные условия на нелинейный интегральный оператор в точке t_0:

Условие B6. *Пусть выполнено неравенство*

$$[\int_0^1 g_{uu}(\hat{u}(t_0),\hat{u}(s),t_0,s,0)ds + 2\int_0^1 g_{uv}(\hat{u}(t_0),\hat{u}(s),t_0,s,0)ds + \\ + \int_0^1 g_{vv}(\hat{u}(t_0),\hat{u}(s),t_0,s,0)ds] < 0.$$

Условие B7. *Пусть выполнено неравенство*

$$\hat{u}'(t_0) - \int_0^1 g_\varepsilon(\hat{u}(t_0),\hat{u}(s),t_0,s,0)ds - \int_0^\infty Q_0 g(t_0,\xi)d\xi < 0.$$

Последнее неравенство следует понимать в смысле предела слева и справа при $t \to t_0$.

Теорема 1.6. *Пусть выполнены условия **B1, B2a, B3, B4, B5a, B6 и B7.** Тогда для достаточно малых* ε *существует единственное решение задачи (9), (10), удовлетворяющее неравенству*

$$\max_{[0,1]} | u(t,\varepsilon) - U_0(t,\varepsilon) | \leq C\sqrt{\varepsilon},$$

где $U_0(t,\varepsilon) = \hat{u}(t) + \Pi_0 u(\tau)$.

Верхнее решение и нижнее решение имеют вид, аналогичный случаю со сменой устойчивости в § 1.

Во второй главе диссертации изучаются краевые задачи для сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнений. В § 1 рассмотрены задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного интегродифференциального уравнения с пограничными слоями [38]. Сначала рассмотрена вторая краевая задача для нелинейного обыкновенного сингулярно возмущенного интегродифференциального уравнения:

$$\varepsilon^2 u'' = L(u, u, x, \varepsilon), \qquad 0 < x < 1, \tag{11}$$

$$u'(0, \varepsilon) = a, \;\; u'(1, \varepsilon) = b. \tag{12}$$

Асимптотика задачи строится с помощью модификации метода пограничных функций [2], предложенной в § 1 гл. 1 и обусловленной наличием интегрального члена в уравнении (11) в виде разложения

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon) = \sum_{n=0} \varepsilon^n \left(\overline{u}_n(x) + \Pi_n^1 u(\tau) + \Pi_n^2 u(\tau_*) \right) \equiv \\ \equiv \overline{u}(x, \varepsilon) + \Pi^1 u(\tau, \varepsilon) + \Pi^2 u(\tau_*, \varepsilon), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\overline{u}_n(x)$ – члены регулярной части асимптотики, $\Pi_n^{1,2} u$ – погранслойные члены асимптотики соответственно на левом и правом концах отрезка $[0,1]$, где $\tau = x / \varepsilon, \tau_* = (1 - x) / \varepsilon$ – погранслойные переменные. Сформулируем требования на нелинейности, входящие в интегродифференциальный оператор, которые понадобятся для построения асимптотического разложения решения и его обоснования.

Условие С1. *Функция* g *является достаточно гладкой (При построении асимптотики с остаточным членом порядка* $O(\varepsilon^{n+1})$ *достаточно потребовать, чтобы она была* $n + 2$ *раза непрерывно дифференцируема).*

Условие С2. *Пусть вырожденное уравнение*

$$L(u, u, x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1,$$

имеет изолированный корень $u = \varphi(x)$ *на отрезке* $[0,1]$, *причем*

$$L_u(\varphi, \varphi, x, 0) > 0 \text{ при } x \in [0,1],$$

(условие разрешимости и устойчивости).

Условие **С3** будет сформулировано ниже, так как оно не требуется для построения и обоснования асимптотики задачи Неймана.

Условие С4. *Пусть функция* $g(u, v, x, s, \varepsilon)$ *будет монотонно невозрастающей по переменной* v *в некоторой области изменения этой переменной при любом фиксированном значении переменной* u *из той же области изменения, что и для второй переменной, при* $(x, s) \in [0,1] \times [0,1]$ *и достаточно малых* ε *(область, о которой идет речь в данном условии, будет уточнена в п. 3 данного параграфа при обосновании асимптотики).*

Условие С5. *Пусть следующее интегральное неравенство имеет положительное решение* $y(x)$ *:*

$$y(x)-\int_0^1 K(x,s)y(s)ds>0, \quad 0\le x\le 1,$$

где $K(x,s)=-g_v(\varphi(x),\varphi(s),x,s,0)/L_u(\varphi,\varphi,x,0)$.

Заметим, что ядро данного интегрального неравенства неотрицательно в силу условий **C2** и **C4.** Достаточным условием для выполнения условия **C5** является, например, требование выполнения неравенства

$$\min_{[0,1]}[L_u(\varphi,\varphi,x,0)+L_v(\varphi,\varphi,x,0)]>0,$$

в этом случае требуемым решением будет положительная постоянная, или требование на собственные значения следующего интегрального уравнения Фредгольма с неотрицательным ядром $K(t,s)$

$$\Lambda y(t)=\int_0^1 K(t,s)y(s)ds,$$

а именно, требуется, чтобы главное позитивное собственное значение Λ_0 было меньше единицы (см. [25] стр.83, теорема 2.1).

В качестве нулевого приближения регулярной части выбирается $\overline{u}_0=\varphi(x)$. Особенностью асимптотики задачи Неймана является то, что она не содержит пограничных функций нулевого порядка, то есть $\Pi_0^{1,2}u\equiv 0$.

Регулярный член первого порядка находится из линейного интегрального уравнения

$$\overline{u}_1(x)-\int_0^1 K(x,s)\overline{u}_1(s)ds=$$

$$=-\left(L_\varepsilon(\varphi,\varphi,x,0)-\int_0^\infty Q_0^1 g d\xi,-\int_0^\infty Q_0^2 g d\xi_*\right)\Big/ L_u(\varphi,\varphi,x,0).$$

Регулярные члены разложения более высокого порядка определяются из линейных интегральных уравнений с таким же интегральным оператором, как в левой части данного уравнения, а неоднородность в правой части выражается через уже известные члены асимптотики. В силу требования **C5** и неотрицательности ядра $K(x,s)$ это уравнение имеет единственное решение.

Погранслойные члены первого и следующих порядков определяются из линейных дифференциальных уравнений и экспоненциально убывают при $\tau\to+\infty$. Алгоритм построения формальной асимптотики может быть продолжен до произвольного порядка малости по степеням малого параметра ε.

Для обоснования построенного асимптотического решения применен развитый для нового класса задач асимптотический метод дифференциальных неравенств. Приведем определение верхнего и нижнего решения для задачи (11), (12) (см. [1]).

Определение 2.1. *Функция* $\beta(x,\varepsilon)\in C^2((0,1))\cap C^1([0,1])$ *называется верхним решением задачи (11), (12), если*

$$\varepsilon^2\beta''\le L(\beta,\beta,x,\varepsilon),\qquad x\in(0,1)$$

$$\beta'(0,\varepsilon)\le a,\quad \beta'(1,\varepsilon)\ge b.$$

Аналогично, функция $\alpha(x,\varepsilon)$ *называется нижним решением, если выполнены неравенства с обратным знаком.*

Использована теорема о дифференциальных неравенствах [1]:

Теорема 2.1. *Пусть существуют функции* $\alpha(x,\varepsilon)$ *и* $\beta(x,\varepsilon)$, *являющиеся соответственно нижним и верхним решением задачи (11), (12), причем* $\alpha(x,\varepsilon)\le\beta(x,\varepsilon)$ *при* $x\in[0,1]$. *Пусть, кроме того, функция* g *непрерывна вместе со своими частными производными по первому и второму аргументу и удовлетворяет условию* ***C4*** *на промежутке* $[\alpha,\ \beta]$. *Тогда существует решение задачи (1.1), (1.2)* $u(x,\varepsilon)$ *такое, что* $\alpha(x,\varepsilon)\le u(x,\varepsilon)\le\beta(x,\varepsilon)$.

Применяя конструктивный метод построения нижнего и верхнего решений, доказана следующая теорема:

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* ***C1***, ***C2***, ***C4*** *и* ***C5***. *Тогда для достаточно малых* ε *существует единственное решение задачи (11), (12), удовлетворяющее неравенству*

$$\max_{[0,1]}\left|\, u(x,\varepsilon)-U_n(x,\varepsilon)\,\right|\le C\varepsilon^{n+1},$$

где $U_n(x,\varepsilon)$ *- частичная сумма порядка* n *асимптотического ряда (13).*

Приведем вид верхнего и нижнего решения для случая $n=0$

$$\alpha(x,\varepsilon)=\varphi(x)-\varepsilon(A(x)+\exp(-kx/\varepsilon)+\exp(-k(1-x)/\varepsilon)),$$

$$\beta(x,\varepsilon)=\varphi(x)+\varepsilon(A(x)+\exp(-kx/\varepsilon)+\exp(-k(1-x)/\varepsilon)),$$

где k – некоторая положительная постоянная, $A(x)$ – положительное на отрезке [0, 1] решение интегрального уравнения

$$L_u(\varphi,\varphi,x,0)y(x)+\int_0^1 g_v(\varphi(x),\varphi(s),x,s,0)y(s)ds=B>0,\quad 0\le x\le 1.$$

Здесь B – некоторая положительная постоянная. Существование положительного решения этого уравнения гарантируется выполнением условия **C5** и неотрицательностью ядра $K(x,s)$, которая есть следствие требований **C2** и **C4**.

Далее в § 1 главы 2 рассмотрено уравнение (11) с краевыми условиями Дирихле

$$u(0,\varepsilon)=u^0, \;\; u(1,\varepsilon)=u^1. \tag{14}$$

Для построения и обоснования асимптотики требуется условие принадлежности граничных значений области влияния устойчивого корня:

Условие С3. *Пусть*

$$\int\limits_{\varphi(i)}^{p} L(u,\varphi,i,0)du>0 \quad \textit{при всех } \; p\in(\varphi(i),\, u^i], \; i=0,1.$$

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* ***C1 – C5****. Тогда для достаточно малых* ε *существует решение* $u(x,\varepsilon)$ *задачи (11), (14), для которого* $U_n(x,\varepsilon)$ *является равномерным на отрезке* $[0,1]$ *асимптотическим приближением, причем*

$$\max_{[0,1]}\left| \, u(x,\varepsilon)-U_n(x,\varepsilon) \, \right| = \mathrm{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

Доказательство теоремы 2 основано на теореме 2.1 о дифференциальных неравенствах. Краевые условия для верхнего и нижнего решения в случае задачи Дирихле имеют следующий вид

$$\alpha(0,\varepsilon)\le u^0\le\beta(0,\varepsilon), \quad \alpha(1,\varepsilon)\le u^1\le\beta(1,\varepsilon).$$

Верхнее и нижнее решения задачи (11), (14) представляются в виде

$$\beta(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)+\varepsilon^n(A(x)+\Pi^1_{n\beta}u(\tau)+\Pi^2_{n\beta}u(\tau_*)),$$
$$\alpha(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)+\varepsilon^n(-A(x)+\Pi^1_{n\alpha}u(\tau)+\Pi^2_{n\alpha}u(\tau_*)),$$

где $A(x)>0$ – определяется так же, как в предыдущем случае, а $\Pi^1_{n\beta}(\tau)$ – является модифицированной пограничной функцией.

В § 2 главы 2 изучаются решения с внутренним переходным слоем (контрастной структурой) [39] для задачи (11), (14). Контрастной структурой типа ступеньки будем называть решение, удовлетворяющее следующему предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon)=\varphi(x,y)=\begin{cases}\varphi^{(-)}(x,y), \; 0\le x\le y\le 1,\\ \varphi^{(+)}(x,y), \; 0\le y\le x\le 1.\end{cases}$$

Асимптотическое разложение решения задачи (11), (14) ищется в следующем виде

$$u(x,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n(\overline{u}_n^{(\pm)}(x,y)+P_n^{(\pm)}u(\eta)+\Pi_n^1u(\tau)+\Pi_n^2u(\tau_*))\equiv$$
$$\equiv\overline{u}^{(\pm)}(x,y,\varepsilon)+P^{(\pm)}u(\eta,\varepsilon)+\Pi^1u(\tau,\varepsilon)+\Pi^2u(\tau_*,\varepsilon), \tag{15}$$

где $\overline{u}_n^{(\pm)}(x,y)$ – члены регулярной части асимптотики, $P_n^{(\pm)}u(\eta)$ – члены асимптотики, описывающие внутренний переходный слой, $\eta=(x-y)/\varepsilon$ – переменная переходного слоя, y – точка перехода. Знак " – " означает, что $x<y$ ($\eta<0$), а знак " + ", что $x>y$ ($\eta>0$). Точка перехода $x=y$ определяется условием

$$u(y,\varepsilon)=\varphi^{(0)}(y), \tag{16}$$

где $\varphi^{(0)}(y)$ – некоторая гладкая функция, такая, что

$$\varphi^{(-)}(y,y)<\varphi^{(0)}(y)<\varphi^{(+)}(y,y),\quad y\in[0,1].$$

Если решение с одним переходным слоем типа ступеньки существует, то уравнение (16) имеет единственное решение $y=y_*$. Асимптотику точки перехода также будем искать в виде ряда по степеням малого параметра ε:

$$y_*=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\dots\ . \tag{17}$$

Функции $\Pi_n^{1,2}u$ являются погранслойными членами асимптотики соответственно на левом и правом концах отрезка [0, 1], а $\tau=x/\varepsilon,\ \tau_*=(1-x)/\varepsilon$ – погранслойными переменными. Следуя схеме, предложенной в §1 представим интегральный оператор I в виде, аналогичном (15)

$$I\equiv\overline{I}+PI+\Pi^1I+\Pi^2I\,.$$

Для определения коэффициентов разложения (17) потребуем выполнения условия гладкого сопряжения членов асимптотики в точке $x=y_*$

$$\varepsilon u'(y_*-0,\varepsilon)=\varepsilon u'(y_*+0,\varepsilon) \tag{18}$$

(множитель ε введен здесь для удобства при дальнейшем разложении производных решения в асимптотические ряды).

Потребуем выполнения условия гладкости **D1,** аналогичного условию **C1.** Для члена нулевого порядка регулярной части асимптотики получим систему двух связанных нелинейных интегральных уравнений. Следующее условие гарантирует ее разрешимость и нужные для построения и обоснования асимптотики свойства решения.

Условие D2. *Пусть существуют две достаточно гладких функции* $\varphi^{(-)}(x,y)$ *и* $\varphi^{(+)}(x,y)$*, определенные соответственно в областях* $\Omega^{(-)}\equiv\{(x,y):0\le x\le y\le 1\}$ *и* $\Omega^{(+)}\equiv\{(x,y):0\le y\le x\le 1\}$*, которые для любого за-*

данного $y \in (0, 1)$ *удовлетворяют системе двух связанных интегральных уравнений*

$$\int_0^y g(\varphi^{(-)}(x,y),\varphi^{(-)}(s,y),x,s,0)ds + \int_y^1 g(\varphi^{(-)}(x,y),\varphi^{(+)}(s,y),x,s,0)ds = 0,\ \ 0 \le x \le y,$$

$$\int_0^y g(\varphi^{(+)}(x,y),\varphi^{(-)}(s,y),x,s,0)ds + \int_y^1 g(\varphi^{(+)}(x,y),\varphi^{(+)}(s,y),x,s,0)ds = 0,\ \ y \le x \le 1,$$

и неравенству $\varphi^{(-)}(y,y) < \varphi^{(+)}(y,y)$. *Пусть также для всех* $x, y \in [0, 1]$ *выполняются неравенства* $L_u(\varphi^{(i)}(x,y),\varphi(s,y),x,0) > 0$ $(i = -,+)$, *где*

$$\varphi(s,y) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(s,y),\ (s,y) \in \Omega^{(-)}, \\ \varphi^{(+)}(s,y),\ (s,y) \in \Omega^{(+)}. \end{cases}$$

В качестве разделяющей функции $\varphi^{(0)}(y)$ удобно выбрать функцию, являющуюся решением уравнения

$$\int_0^1 g(\varphi^{(0)}(y),\varphi(s,y),y,s,0)ds = 0.$$

В силу условия **D2** функция $F(u,y) \equiv L(u,\varphi(s,y),y,0)$ является гладкой функцией и для любого заданного $y \in [0, 1]$ достигает нулевого значения хотя бы в одной точке $u \in (\varphi^{(-)}(y,y),\ \varphi^{(+)}(y,y))$. Поэтому существует хотя бы одна гладкая функция $\varphi^{(0)}(y)$, являющаяся решением данного уравнения.

Условие **D2** существенно отличает алгоритм построения асимптотики от случая, когда решения типа ступеньки ищутся в сингулярно возмущенных задачах без интегрального члена (см., например, [35]), где его аналогом является условие наличия двух изолированных корней, и составное решение слева от точки разрыва равно одному корню, справа – другому. При этом значение решения в любой точке отрезка слева и справа от точки разрыва $x = y$ не зависит от y. Ясно, что условие **D2** является более общим и включает в себя условие существования составного решения для обыкновенных дифференциальных уравнений без интегрального члена. Для построения пограничных функций требуется условие **D3**, аналогичное условию **C3** § 1**.** Алгоритм построения пограничных функций мало отличается от алгоритма § 1.

Регулярный член асимптотики нулевого порядка выбирается в следующем виде

$$\bar{u}_0(x,y_*) = \varphi(x,y_*).$$

Вводя в рассмотрение следующую функцию (интеграл энергии)

$$J(y) = \int\limits_{\varphi^{(-)}(y,y)}^{\varphi^{(+)}(y,y)} L(u, \varphi(s,y), y, 0)du,$$

определим точку перехода в нулевом приближении из следующего условия:

Условие D4. *Пусть существует такая точка* $x_0 \in (0,\, 1)$*, что*

$$J(x_0) = 0 \ \text{ и } \ J'(x_0) < 0.$$

Условие **D4** обеспечивает построение гладкой функции переходного слоя в нулевом порядке асимптотики. Для регулярного члена первого порядка $\overline{u}_1^{(\pm)}(x,y)$ разложения (15) получим систему двух связанных линейных интегральных уравнений, разрешимость которой обеспечивается условием квазимонотонности **D5**, аналогичным условию **C5** § 1, и следующим условием

Условие D6. *Пусть система связанных линейных интегральных неравенств*

$$w^{(-)}(x,y) + \int\limits_0^y K^{(--)}(x,s,y) w^{(-)}(s,y) ds + \int\limits_y^1 K^{(-+)}(x,s,y) w^{(+)}(s,y) ds > 0, \ 0 \le x \le y,$$

$$w^{(+)}(x,y) + \int\limits_0^y K^{(+-)}(x,s,y) w^{(-)}(s,y) ds + \int\limits_y^1 K^{(++)}(x,s,y) w^{(+)}(s,y) ds > 0, \ y \le x \le 1,$$

где $K^{(ij)}(x,s,y) \equiv \dfrac{g_v(\varphi^{(i)}(x,y), \varphi^{(j)}(s,y), x, s, 0)}{L_u(\varphi^{(i)}(x,y), \varphi(s,y), x, 0)}$, $(i, j = -,+)$, *имеет для любого* $y \in (0,\, 1)$ *положительное решение.*

Коэффициент x_1 разложения (17) определяется из условия (18) C^1-сшивания асимптотики решения в точке перехода, которое в первом порядке приводит к линейному уравнению относительно x_1. Коэффициент при x_1 в этом линейном уравнении с точностью до постоянного множителя равен $J'(x_0)$. Следовательно, в силу требования **D4** неизвестное x_1 определяется однозначно. Следующие коэффициенты разложения (17) определяются из линейных уравнений, аналогичных уравнению для x_1. Алгоритм построения формальной асимптотики определен для произвольного порядка малости по степеням малого параметра ε.

При обосновании построенного асимптотического решения ведущую роль играет асимптотический метод дифференциальных неравенств, модифицированный для рассматриваемого во втором параграфе главы 2 нового класса задач. Приведем известное классическое определение верхнего и нижнего решения для задачи (11), (14) (см. [1]). В отличие от случая, рассмотренного в §1 главы 2, нам понадобится определение верхнего и нижнего решения, которое может иметь скачок первой производной в некоторой точке $\hat{x}$ отрезка $[0,\, 1]$.

Определение 2.2. *Функции* $\alpha(x,\varepsilon)$ *и* $\beta(x,\varepsilon)$ *называются соответственно нижним и верхним решением задачи (11), (14), если*

$$\alpha(x,\varepsilon),\beta(x,\varepsilon)\in C([0,1])\cap C^1([0,1]\setminus\hat{x})\cap C^2((0,\hat{x}])\cap C^2([\hat{x},1)),\ \text{где}\ \hat{x}\in(0,1),$$

$$\alpha(x,\varepsilon)\le\beta(x,\varepsilon),\ \text{при}\ x\in[0,1],$$

$$\varepsilon^2\beta''\le L(\beta,\beta,x,\varepsilon),\quad \varepsilon^2\alpha''\ge L(\alpha,\alpha,x,\varepsilon), x\in(0,1),$$

$$\alpha'(\hat{x}+0,\varepsilon)-\alpha'(\hat{x}-0,\varepsilon)\ge 0,\ \ \beta'(\hat{x}+0)-\beta'(\hat{x}-0)\le 0,\quad \hat{x}\in(0,1)$$

$$\beta(0,\varepsilon)\le u^0\le\alpha(0,\varepsilon),\quad \beta(1,\varepsilon)\ge u^1\ge\alpha(1,\varepsilon).$$

Для определенных таким образом верхнего и нижнего решений справедлива теорема 2.4 о дифференциальных неравенствах [1], аналогичная теореме 2.1, опираясь на которую, на основе конструктивного метода построения нижнего и верхнего решения доказана следующая теорема:

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* ***D1 –D6*** *. Тогда для достаточно малых* ε *существует решение задачи (11), (14), удовлетворяющее неравенству*

$$\max_{[0,1]}\left|\, u(x,\varepsilon)-U_n(x,\varepsilon)\,\right|\le C\varepsilon^n.$$

Здесь $U_n(x,y_{n+1},\varepsilon)$ – частичная сумма n-ного порядка асимптотического представления (15)

$$U_n(x,y_{n+1},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^n(\overline{u}_i^{(\pm)}(x,y_{n+1})+P_i^{(\pm)}u(\eta)+\Pi_i^1u(\tau)+\Pi_i^2u(\tau_*)),$$

где $y=y_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i x_i$. Для случая $n=0$ верхнее и нижнее решения $\beta(x,\varepsilon)$ и $\alpha(x,\varepsilon)$ определены выражениями

$$\beta(x,\varepsilon)=\overline{u}_0^{(\pm)}(x,y_\beta)+\varepsilon\overline{u}_1^{(\pm)}(x,y_\beta)+\varepsilon A^{(\pm)}(x,y_\beta)+P_0^{(\pm)}u(\eta_\beta)+$$
$$+\varepsilon P_{1\beta}^{(\pm)}u(\eta_\beta)+\Pi_0^1u(\tau)+\Pi_0^2u(\tau_*)+\varepsilon(\Pi_{1\beta}^1u(\tau)+\Pi_{1\beta}^2u(\tau_*)),$$
$$\alpha(x,\varepsilon)=\overline{u}_0^{(\pm)}(x,y_\alpha)+\varepsilon\overline{u}_1^{(\pm)}(x,y_\alpha)-\varepsilon A^{(\pm)}(x,x_\alpha)+P_0^{(\pm)}u(\eta_\alpha)+$$
$$+\varepsilon P_{1\alpha}^{(\pm)}u(\eta_\alpha)+\Pi_0^1u(\tau)+\Pi_0^2u(\tau_*)+\varepsilon(\Pi_{1\alpha}^1u(\tau)+\Pi_{1\alpha}^2u(\tau_*)).$$

где $y_\alpha=y_1+\varepsilon\delta$, $y_\beta=y_1-\varepsilon\delta$ ($\delta>0$ – некоторая положительная постоянная), $\eta_\beta=(x-y_\beta)/\varepsilon$, $\eta_\alpha=(x-y_\alpha)/\varepsilon$, $A(x,y)$ – некоторое положительное на множестве $[0,1]\setminus\{x=y\}$ решение системы связанных интегральных неравенств из требования **D6.** Функции $P_{1\beta}^{(\pm)}u(\eta_\beta)$, $P_{1\alpha}^{(\pm)}u(\eta_\alpha)$ – модифицированные функции переходного слоя, а функции $\Pi_{1\beta}^{1,2}u$, $\Pi_{1\alpha}^{1,2}u$ - модифицированные пограничные функции. В п.4 § 2 приведен конкретный пример интегродифференциальной задачи, для которой выполнены все условия теоремы 2.5.

Далее в § 2 рассмотрен случай сбалансированной нелинейности [42]. Основное отличие в требованиях на нелинейный интегральный оператор $L(u,v,x,\varepsilon)$ от случая, рассмотренного в этом параграфе ранее, содержится в изменении требования **D4**, которое заменяется следующим условием

Условие D4a. *Пусть для любого* $y\in(0,1)$ *выполняется равенство* $J(y)=0$.

Нелинейность, удовлетворяющая условию **D4a**, называется *сбалансированной нелинейностью*. В этом случае в нулевом приближении можно построить гладкую функцию переходного слоя для любой точки отрезка $[0,1]$. Тем самым, коэффициент x_0 разложения (17) не определяется в нулевом порядке асимптотики. Такой случай в теории сингулярных возмущений получил название *критического случая*. В силу требования **D4a** $J'(y)=0$ для любого $y\in(0,1)$, то есть коэффициент при x_1 в линейном уравнении для определения x_1 будет нулевым, а x_0 определяется из условия разрешимости этого уравнения. Условие **D7** требует, чтобы у нелинейного уравнения для определения x_0 существовало решение, принадлежащее интервалу $(0,1)$. Неизвестное же x_1 определяется в следующем порядке асимптотики из условия разрешимости линейного уравнения для определения x_2, множитель при котором такой же, как при x_1 в первом порядке асимптотики, и, следовательно, тоже равен нулю. При этом из условия разрешимости для определения x_1 получается уже линейное уравнение. Условие **D8** требует, чтобы коэффициент при неизвестном x_1 в этом уравнении был отрицательным. Продолжая этот алгоритм далее, можно построить асимптотику точки перехода любого порядка.

В отличие от "грубого" случая верхнее и нижнее решения для $n=0$ в случае сбалансированной нелинейности имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\beta(x,\varepsilon) &= \bar{u}_0^{(\pm)}(x,y_\beta)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x,y_\beta)+\varepsilon^2\bar{u}_2^{(\pm)}(x,y_\beta)+\varepsilon^2 A^{(\pm)}(x,y_\beta)+\\
&+P_0^{(\pm)}u(\eta_\beta)+\varepsilon P_1^{(\pm)}u(\eta_\beta)+\varepsilon^2 P_{2\beta}^{(\pm)}u(\eta_\beta)+\Pi_0^1 u(\tau)+\Pi_0^2 u(\tau_*)+\\
&\quad+\varepsilon(\Pi_{1\beta}^1 u(\tau)+\Pi_{1\beta}^2 u(\tau_*))+\varepsilon^2(\Pi_{2\beta}^1 u(\tau)+\Pi_{2\beta}^2 u(\tau_*)),\\
\alpha(x,\varepsilon) &= \bar{u}_0^{(\pm)}(x,y_\alpha)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x,y_\alpha)+\varepsilon^2\bar{u}_2^{(\pm)}(x,y_\alpha)-\varepsilon^2 A^{(\pm)}(x,x_\alpha)+\\
&+P_0^{(\pm)}u(\eta_\alpha)+\varepsilon P_1^{(\pm)}u(\eta_\alpha)+\varepsilon^2 P_{2\alpha}^{(\pm)}u(\eta_\alpha)+\Pi_0^1 u(\tau)+\Pi_0^2 u(\tau_*)\\
&\quad+\varepsilon(\Pi_{1\alpha}^1 u(\tau)+\Pi_{1\alpha}^2 u(\tau_*))+\varepsilon^2(\Pi_{2\alpha}^1 u(\tau)+\Pi_{2\alpha}^2 u(\tau_*)).
\end{aligned}$$

Проверив выполнение условий теоремы о дифференциальных неравенствах, получим для случая сбалансированной нелинейности теорему:

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия **D1 –D3,D4a, D5–D8**. Тогда для достаточно малых ε существует решение задачи (11), (12), удовлетворяющее неравенству*

$$\max_{[0,1]} \left| \, u(x,\varepsilon) - U_n(x,\varepsilon) \, \right| \le C\varepsilon^n.$$

В третьей главе рассмотрены решения с внутренними переходными слоями для сингулярно возмущённых эллиптических интегродифференциальных уравнений [40, 41, 44]. А именно, изучается следующая интегродифференциальная задача

$$\varepsilon^2 \Delta u = L(u,u,x,\varepsilon), \, x = (x_1,x_2) \in \Omega, \tag{19}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{20}$$

где $L(u,v,x,\varepsilon) \equiv \iint\limits_{\Omega} g(u(x),v(s),x,s)ds$, Ω – замкнутая односвязная область с гладкой границей $\partial\Omega$, n – внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega$. Под решением типа ступеньки мы будем понимать решение, имеющее следующий предельный вид

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x), \ x \in \Omega \setminus \Omega_i, \\ \varphi^{(+)}(x), \ x \in \Omega_i, \end{cases}$$

где $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$, граница области Ω_i – простая гладкая замкнутая кривая C, целиком лежащая внутри области Ω. Введем в окрестности кривой локальную систему координат (r,l), где $\mid r \mid$ – расстояние от точки $M(x)$ до кривой C по той нормали к кривой, которая проходит через точку M, а l – координата той точки на C, из которой эта нормаль выходит. При этом будем выбирать знак r положительным, если точка M находится в области Ω_i, ограниченной кривой C, и отрицательным, если в области $\Omega \setminus \Omega_i$. Если кривая C достаточно гладкая, а окрестность кривой достаточно мала, то нормали, выпущенные из различных точек кривой, не пересекаются в этой окрестности. Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между координатами (x_1,x_2) и (r,l) точки M. Кривая C в локальной системе координат задается уравнением $r = 0$, а уравнение неизвестной пока кривой перехода C_* в этой системе координат будем искать в виде

$$r = f(l,\varepsilon) = \varepsilon r_1(l) + \varepsilon^2 r_2(l) + \ldots, \tag{21}$$

где $r_i(l)$ – достаточно гладкие периодические функции. Переменная переходного слоя η представляет собой растянутое с коэффициентом ε расстояние от кривой C_*: $\eta = (r - f(l,\varepsilon))/\varepsilon$. Аналогичным образом в окрестности границы $\partial\Omega$ вводится локальная система координат (ρ,m), где ρ - расстояние от точки $M \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ вдоль той внутренней нормали к границе, которая проходит через точку M, а m – координата точки границы, из которой выпущена нормаль. Погранслойная переменная $\tau=\rho/\varepsilon$ является растянутым с коэффициентом $1/\varepsilon$ расстоянием от границы области $\partial\Omega$.

Асимптотическое разложение решения задачи (19), (20) будем искать с помощью модификации алгоритма метода пограничных функций, использованной в § 2, в следующем виде

$$\begin{gathered} u(x,\varepsilon)=\sum_{n=0}\varepsilon^n(\bar{u}_n(x,C)+P_nu(\eta,l)+\Pi_nu(\tau,m))\equiv \\ \equiv\bar{u}(x,C,\varepsilon)+Pu(\eta,l,\varepsilon)+\Pi u(\tau,m,\varepsilon), \end{gathered} \tag{22}$$

где $\bar{u}_i(x)$ – регулярные члены асимптотики, $P_iu(\eta,l)$ – функции внутреннего переходного слоя, $\Pi_iu(\tau,m)$ – функции пограничного слоя. Потребуем выполнение следующих условий:

Условие E1. *Функция g является достаточно гладкой.*

Условие E2. *Пусть существуют две достаточно гладких функции $\varphi^{(-)}(x,C)$ и $\varphi^{(+)}(x,C)$, определенные соответственно в областях $x\in\Omega^{(-)}\equiv\Omega\setminus\Omega_i$ и $x\in\Omega^{(+)}\equiv\Omega_i$, которые для любой простой замкнутой кривой $C\equiv\partial\Omega_i$ удовлетворяют системе двух связанных интегральных уравнений*

$$\int\limits_{\Omega^{(-)}} g(\varphi^{(-)}(x,C),\varphi^{(-)}(s,C),x,s,0)ds+\int\limits_{\Omega^{(+)}} g(\varphi^{(-)}(x,C),\varphi^{(+)}(s,C),x,s,0)ds=0,$$
$$x\in\Omega^{(-)},$$
$$\int\limits_{\Omega^{(-)}} g(\varphi^{(+)}(x,C),\varphi^{(-)}(s,C),x,s,0)ds+\int\limits_{\Omega^{(+)}} g(\varphi^{(+)}(x,C),\varphi^{(+)}(s,C),x,s,0)ds=0,$$
$$x\in\Omega^{(+)},$$

и неравенству $\varphi^{(-)}(x,C)\big|_{x\in C}<\varphi^{(+)}(x,C)\big|_{x\in C}$. Пусть также для всех $x\in\bar{\Omega}$ и любой кривой $C\equiv\partial\Omega_i$ выполняются неравенства

$$L_u(\varphi^{(i)}(x,C),\varphi(s,C),x,0)>0 \ \ (i=-,+), \text{ где}$$

$$\varphi(s,C)=\begin{cases}\varphi^{(-)}(s,C), & s\in\Omega^{(-)},\\ \varphi^{(+)}(s,C), & s\in\Omega^{(+)},\end{cases}$$

и $L_u(\varphi^{(i)}(x,C),\varphi(s,C),x,0)\equiv\int\limits_{\Omega} g_u(\varphi^{(i)}(x,C),\varphi(s,C),x,s,0)ds$.

Представляя интегральный оператор в виде, аналогичном представлению (22),

$$L\equiv\bar{L}+PL+\Pi L,$$

и, переходя в операторе Лапласа там, где он действует на P-функции и

Π-функции, соответственно к переменным (η,l) и (τ,m), построим асимптотическое разложение решения в областях $\Omega^{(-)}$ и $\Omega^{(+)}$. Для члена нулевого порядка регулярной части асимптотики получим систему двух связанных нелинейных интегральных уравнений. В качестве ее решения выберем

$$\bar{u}_0(x,C_*)=\varphi(x,C_*).$$

В качестве дополнительного условия, позволяющего определить коэффициенты $r_i(l)$ разложения (21) для кривой C_*, будем использовать условие непрерывности производной по r решения u на кривой C_*. В нулевом порядке асимптотики это условие гарантируется требованием **Е3.** Введем в рассмотрение следующую функцию (интеграл энергии)

$$J(x_0)=\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0,\,C_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0,\,C_0)} L(u,\varphi(x_0,C_0),x_0,0)du\,,$$

где $x_0\in C_0$. Рассмотрим интеграл энергии для кривых C, лежащих в окрестности C_0,

$$J(x)=\int\limits_{\varphi^{(-)}(x,\,C)}^{\varphi^{(+)}(x,\,C)} L(u,\varphi(x,C),x,0)du\,,$$

где $x\in C$, и перейдем в функции $J(x)$ к локальным координатам (r,l), как это было описано в § 1. В этих координатах функцию $J(x)$ можно представить в следующем виде

$$J(x)\equiv J(r(l)),$$

где $r=r(l)$ – уравнение кривой C в локальных координатах. Приближение нулевого порядка кривой перехода C_* определим из следующего условия.

Условие Е3. *Пусть на некоторой простой замкнутой кривой* $C_0\in\Omega$

$$J(x_0)=0 \text{ и } \frac{d}{dr}J\big(r(l)\big)\Big|_{r=0}<0,$$

причем для всех $u\in\left(\varphi^{(-)}(x_0,C_0),\varphi^{(+)}(x_0,C_0)\right)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0,C_0)}^{u} L(u,\varphi(s,C_0),x_0,0)du>0 \text{ при } u\in\left(\varphi^{(-)}(x_0,C_0),\varphi^{(+)}(x_0,C_0)\right).$$

Как и в одномерном случае, для регулярного члена первого порядка $\bar{u}_1^{(\pm)}(x,C)$ разложения (22) получим систему двух связанных линейных интегральных уравнений, разрешимость которой обеспечивается условием квазимонотонности **Е4**, аналогичным условию **С4** § 1 гл. 2, и следующим условием:

Условие Е5. *Пусть система связанных линейных интегральных неравенств*

$$w^{(-)}(x,C)+\int\limits_{\Omega^{(-)}}K^{(--)}(x,s,C)w^{(-)}(s,C)ds+\int\limits_{\Omega^{(+)}}K^{(-+)}(x,s,C)w^{(+)}(s,C)ds,\ x\in\Omega^{(-)}$$

$$w^{(+)}(x,C)+\int\limits_{\Omega^{(-)}}K^{(+-)}(x,s,C)w^{(-)}(s,C)ds+\int\limits_{\Omega^{(+)}}K^{(++)}(x,s,C)w^{(+)}(s,C)ds,\ x\in\Omega^{(+)}$$

где $K^{(ij)}(x,s,y)\equiv\dfrac{g_v(\varphi^{(i)}(x,C),\varphi^{(j)}(s,C),x,s,0)}{L_u(\varphi^{(i)}(x,C),\varphi(s,C),x,0)}$, $(i,j=-,+)$, *имеет для любой кривой* $C\equiv\partial\Omega_i$ *положительное решение.*

Из условия C^1-сшивания асимптотики на кривой C_* получается для определения $r_1(l)$ линейное уравнение, в котором коэффициент при неизвестном $r_1(l)$ равен с точностью до положительного множителя $\dfrac{dJ}{dr}(x_0,C_0)$. В силу требования **Е3** неизвестное $r_1(l)$ определяется однозначно. Члены переходного слоя более высоких порядков определяются из систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, аналогичных уравнению для $P_1^{(\pm)}u(\eta,l)$, а члены разложения (21) из уравнений, аналогичных уравнению для $r_1(l)$. Таким образом, асимптотика может быть построена для произвольного порядка точности по степеням малого параметра ε.

Введем определение верхнего и нижнего решения для задачи (19), (20), имеющего скачок нормальной производной на некоторой замкнутой кривой.

Определение 3.1. *Функции* $\alpha(x,\varepsilon)$ *и* $\beta(x,\varepsilon)$ *называются нижним и верхним решением задачи (19), (20) соответственно, если*

$$\alpha(x,\varepsilon)\le\beta(x,\varepsilon),\ \textit{при}\ x\in\bar\Omega,$$

$$\alpha(x,\varepsilon),\beta(x,\varepsilon)\in C^0(\bar\Omega)\cap C^1(\bar\Omega\setminus C)\cap C^2(\Omega/\Omega_i)\cap C^2(\Omega_i),$$

$$\varepsilon^2\Delta\beta\le L(\beta,\beta,x,\varepsilon),\quad \varepsilon^2\Delta\alpha\ge L(\alpha,\alpha,x,\varepsilon),\quad x\in\Omega,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial r^+}\alpha\right|_{x\in C}-\left.\frac{\partial}{\partial r^-}\alpha\right|_{x\in C}\ge 0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial r^+}\beta\right|_{x\in C}-\left.\frac{\partial}{\partial r^-}\beta\right|_{x\in C}\le 0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\beta\right|_{x\in\partial\Omega}\le 0\le\left.\frac{\partial}{\partial n}\alpha\right|_{x\in\partial\Omega}.$$

Используя теорему 3.1 о дифференциальных неравенствах [1], аналогичную теореме 2.1, на основе конструктивного метода построения нижнего и верхнего решений доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* ***E1 – E5****. Тогда для достаточно малых* ε *существует решение задачи (19), (20), удовлетворяющее неравенству*

$$\max_{\bar{\Omega}}\left|u(x,\varepsilon)-U_n(x,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon^{n+1}. \qquad (23)$$

Здесь $U_n(x,\varepsilon)$ – частичная сумма порядка n асимптотического ряда (22), в котором кривая C_* заменена кривой, уравнение которой является уравнением (21) с правой частью, равной частичной сумме $\sum_{i=1}^{n+1}\varepsilon^i r_i(l)$. Вид верхнего и нижнего решений аналогичен случаю одномерной ступеньки, так как переменные l и m входят в асимптотическое разложение решения как параметры.
Заметим, что теорема 3.2 и аналогичные ей теоремы их § 2 гл. 2 не обеспечивают локальной единственности решения задачи вблизи построенной асимптотики. Локальную единственность решения задачи (19), (20) можно получить, рассмотрев полученное решение как стационарное решение соответствующей интегропараболической краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon^2\Delta u-L(u,u,x,\varepsilon), \quad x\in\Omega,\ t>0, \qquad (24)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0, \qquad (25)$$

с начальными условиями, лежащими в окрестности построенного асимптотического решения. Доказательство асимптотической устойчивости по Ляпунову построенного решения задачи (19), (20), лежащего в малой окрестности $U_n(x,\varepsilon)$, как стационарного решения интегропараболической задачи (24), (25) проводится также методом асимптотических дифференциальных неравенств. Для решения интегропараболической задачи (24), (25) с начальными условиями, лежащими между верхним и нижним решениями исходной задачи (19), (20), предлагаются следующие барьерные функции

$$\beta(x,t,\varepsilon)=u_s+(\beta_n-u_s)\exp(-\lambda t),$$

$$\alpha(x,t,\varepsilon)=u_s+(\alpha_n-u_s)\exp(-\lambda t),$$

где u_s - стационарное решение задачи (24), (25), существующее вследствие Теоремы 3.2 и удовлетворяющее неравенству (23), α_n и β_n – соответственно нижнее и верхнее решения n-ного порядка точности задачи (19), (20), $\lambda>0$ – достаточно малый, зависящий от ε параметр. Непосредственной проверкой условий для барьерных функций получим следующую теорему:

Теорема 3.3. *При выполнении условий* ***E1 – E5*** *и достаточно малых* ε *существует локально единственное и асимптотически устойчивое стационар-*

ное решение u_s задачи (24), (25), удовлетворяющее неравенству

$$\max_{\overline{\Omega}}\left|u_s - U_n(x,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^n .$$

В четвертой главе диссертации изучаются решения с движущимися внутренними переходными слоями (фронтами) в начально-краевой задаче для сингулярно возмущенного интегропараболического уравнения [46]. Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$M[u] \equiv \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x} - L(u,u,x,\varepsilon), \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = 0,\ \ u(x,0,\varepsilon) = u^0(x,\varepsilon)\,, \quad (27)$$

где $L(u,v,x,\varepsilon) \equiv \int\limits_0^1 g(u(x,t),v(s,t),x,s,\varepsilon)ds$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $u^0(x,\varepsilon)$ - некоторая начальная функция, имеющая вид контрастной структуры типа ступеньки. В § 2 главы 2 рассматривались стационарные решения задачи (26), (27) в случае $A \equiv 0$. Целью данной главы является развитие методов, предложенных во второй главе, на новый более сложный класс задач, получение асимптотического представления для движущейся контрастной структуры типа ступеньки (фронта) и исследование вопроса существования такого решения. Результаты данной главы могут быть также рассмотрены как расширение результатов работы [26] на нелокальные краевые задачи. Некоторые относящиеся к данной задаче вопросы рассматривались в работе [21], где изучались решения типа движущихся волн для нелокальной задачи с бистабильной нелинейностью и линейным интегральным членом. Задача (26), (27) описывает многие важные практические приложения. В частности, является одномерным аналогом задачи вида (1), (2), возникающей в теории фазовых переходов [18].

Для построения и обоснования асимптотики требуется выполнение ряда условий. Так условия **F1** и **F2** аналогичны условиям **D1** и **D2**. Задача состоит в том, чтобы показать, что при некоторых дополнительных предположениях, решение задачи (26), (27) имеет вид движущегося внутреннего слоя (фронта), имеющего следующий предельный вид:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = \varphi(x,x_0(t)), \qquad x \in [0,1] \setminus \{x_0(t)\},$$

где $x_0(t)$ – нулевое приближение точки перехода $y_*(t,\varepsilon)$, которая ищется в виде асимптотического разложения

$$y_*(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots,$$

и определяется условием пересечения решения u с некоторой гладкой функцией $\varphi^{(0)}(x)$, такой что $\varphi^{(-)}(x,x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x,x)$:

$$u(y_*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \varphi^{(0)}(y_*(t,\varepsilon)). \tag{28}$$

В качестве такой разделяющей функции удобно выбрать функцию, являющуюся решением уравнения

$$\int_0^1 g(\varphi^{(0)}(y),\varphi(s,y),y,s,0)ds = 0\,.$$

В § 2 гл. 4 строится асимптотические разложение решения с внутренним переходным слоем задачи (26), (27) в предположении, что начальная функция $u^0(x,\varepsilon)$ имеет вид фронта, то есть такой, что для малых ε она близка к некоторому решению $\varphi(x,x_{00})$ из семейства разрывных решений вырожденной задачи для $0 \le x < x_{00} - \Delta$, $x_{00} + \Delta \le x < 1$, где x_{00} – некоторая точка из интервала $(0,1)$, в которой в начальный момент времени локализован фронт, а $\Delta > 0$ – некоторое малое не зависящее от ε число. Тем самым предполагается, что

$$y_*(0,\varepsilon) = x_{00}.$$

Для построения формального асимптотического разложения начально-краевая задача (26), (27) с условием (28) представляется в виде краевой задачи для системы двух связанных интегродифференциальных уравнений

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x} - L(u,u,x,\varepsilon), \quad 0 < x < y_*(t,\varepsilon),\ t > 0, \tag{29}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = 0,\ \ u(y_*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \varphi^{(0)}(y_*(t,\varepsilon)) \equiv 0,\\ u(x,0,\varepsilon) = u^0(x,\varepsilon), 0 \le x \le y_*(t,\varepsilon),\end{gathered} \tag{30}$$

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x} - L(u,u,x,\varepsilon), \quad y_*(t,\varepsilon) < x < 1,\ t > 0, \tag{31}$$

$$\begin{gathered}u(y_*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \varphi^{(0)}(y_*(t,\varepsilon)) \equiv 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = 0,\\ u(x,0,\varepsilon) = u^0(x,\varepsilon),\ \ y_*(t,\varepsilon) \le x \le 1.\end{gathered} \tag{32}$$

Асимптотика решений левой и правой задачи строится при помощи алгоритма, являющегося модификацией алгоритма, предложенного в § 2 гл.2 диссертации. Будем использовать сведущее асимптотическое представление решения для задачи (29) – (32):

$$u(x,t,\varepsilon) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (\overline{u}_n^{(\pm)}(x, y_*(t,\varepsilon),t) + P_n^{(\pm)} u(\eta,t) + \Pi_n^1 u(\tau,t) + \Pi_n^2 u(\tau_*,t)) \equiv \quad (33)$$

$$\equiv \overline{u}^{(\pm)}(x, y_*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + P^{(\pm)} u(\eta,t,\varepsilon) + \Pi^1 u(\tau,t,\varepsilon) + \Pi^2 u(\tau_*,t,\varepsilon),$$

где $\overline{u}_n^{(\pm)}(x, y_*(t,\varepsilon),t)$ – члены регулярной части асимптотики, $P_n^{(\pm)} u(\eta,t)$ – члены асимптотики, описывающие внутренний переходный слой и существенные в малой окрестности точки перехода, $\eta = (x - y_*(t,\varepsilon))/\varepsilon$ – переменная переходного слоя. Знак " – " означает, что $x < y_*(t,\varepsilon)$ ($\eta < 0$), а знак " + ", что $x > y_*(t,\varepsilon)$ ($\eta > 0$). Функции $\Pi_n^{1,2} u$ являются погранслойными членами асимптотики, существенными соответственно на левом и правом концах отрезка $[0, 1]$, а $\tau = x/\varepsilon$, $\tau_* = (1-x)/\varepsilon$ – погранслойными переменными.

Члены регулярной части асимптотики определяются способом, аналогичным использованному в § 2 гл.2. Для построения членов первого и следующих порядков регулярной части асимптотики предполагается выполнение условий **F4** и **F5**, аналогичных условиям **D5** и **D6** соответственно.

Так как мы не рассматриваем процесс выхода фронта на границу отрезка $[0,1]$, то пограничные функции не будут оказывать никакого влияния на функции переходного слоя. Поэтому их построение ничем не будет отличаться от стационарного случая, рассмотренного в §§ 1, 2 второй главы. А аргумент t будет входить в них только через коэффициенты разложения $y_*(t,\varepsilon)$. Краевые условия Неймана приведут к тому, что в нулевом приближении пограничный слой будет отсутствовать.

Переходя в дифференциальном операторе

$$D = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon A(x,\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x}$$

к переменным (η,t), получим

$$D = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial y_*}{\partial t}(t,\varepsilon) - A(x,\varepsilon) \right) \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Используя данный оператор, и, вводя в рассмотрение следующую непрерывную функцию, описывающую переходный слой в нулевом приближении,

$$\tilde{u}(\eta,y) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(y,y) + P_0 u(\eta,y), & \eta < 0, \\ \varphi^{(0)}(y), & \eta = 0, \\ \varphi^{(+)}(y,y) + P_0 u(\eta,y), & \eta > 0. \end{cases}$$

получим для $\tilde{u}$ задачу

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+\tilde{v}_0\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=\int\limits_0^1 g(\tilde{u}(\eta,y),\varphi(s,y),y,s,0)ds,\ \ \eta\in(-\infty,+\infty),$$
$$\tilde{u}(0,y)=\varphi^{(0)}(y),\ \tilde{u}(-\infty,y)=\varphi^{(-)}(y,y),\ \tilde{u}(+\infty,y)=\varphi^{(+)}(y,y), \tag{34}$$

где $\tilde{v}_0\equiv\left(\frac{dx_0}{dt}(t)-A(y,0)\right)$. Уравнение в задаче (34) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Из условия **F2** следует, что $\varphi^{(\pm)}(y,y)$ – седловые точки. Такая задача хорошо изучена (см., например, [26, 27]). Основные результаты исследования задачи (34) можно сформулировать в виде следующей леммы:

Лемма 4.1. *Для любого* $y\in(0,1)$ *существует единственное значение* $\tilde{v}_0$ *такое, что задача (34) имеет единственное гладкое монотонное решение* $\tilde{u}$, *удовлетворяющее оценке*

$$\left|\,\tilde{u}(\eta,y)-\varphi^{(\pm)}(y,y)\right|\le C\exp(-\kappa\left|\eta\right|),$$

где C *и* κ *– некоторые положительные постоянные. А функция* $\tilde{v}_0(y)$ *удовлетворяет равенству*

$$\tilde{v}_0(y)=\frac{\int\limits_{\varphi^{(-)}(y,y)}^{\varphi^{(+)}(y,y)}L(u,\varphi(s,y),y,0)du}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}(\eta,y)d\eta}.$$

Из леммы 4.1 следуют экспоненциальная оценка для $P_0u(\eta,y)$:

$$P_0u(\eta,y)\le C\exp(-\kappa\left|\eta\right|),$$

и то, что нулевое приближение $x_0(t)$ точки перехода $y=y_*(t,\varepsilon)$ может быть определено как решение начальной задачи

$$\frac{dx_0}{dt}=\tilde{v}_0(x_0)+A(x_0,0),$$
$$x_0(0)=x_{00},$$

где x_{00} определяет начальное положение точки перехода. Как показано в § 2 гл. 2, корни функции $\left(\tilde{v}_0(x_0)+A(x_0,0)\right)$ определяют положение стационарных точек перехода внутреннего слоя. В данной главе изучается только движение фронта, поэтому предполагается выполнение следующего требования:

Условие F3. *Пусть* $\left(\tilde{v}_0(x_0)+A(x_0,0)\right)>0$ *для любого* $y\in[0,1]$.

Для определения $x_1(t)$ используем первый порядок условия C^1-сшивания асимптотики:

$$\frac{\partial P_1^{(-)}u}{\partial \eta}(0,t) + \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial x}(x_0(t), x_0(t)) = \frac{\partial P_1^{(+)}u}{\partial \eta}(0,t) + \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x}(x_0(t), x_0(t)). \tag{35}$$

Из явного интегрального представления для $\dfrac{\partial P_1^{(\pm)}u}{\partial \eta}(0,t)$ и условия (35) получим для определения $x_1(t)$ линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} - B\big(x_0(t)\big)x_1 = F_1\big(x_0(t)\big),$$

где функции $B(x_0)$ и $F_1(x_0)$ выражаются через уже построенные члены асимптотики. Если входные данные задачи достаточно гладкие, то асимптотика решения может быть построена до любого порядка n, и формальная асимптотика удовлетворяет задаче с невязкой порядка ε^{n+1}.

Так же, как в предыдущих главах, для обоснования полученного выше формального асимптотического разложения применим модификацию метода асимптотических дифференциальных неравенств [8, 9] на новый класс задач – интегропараболические уравнения с движущимся фронтом.

Определение 4.1. *Функция $\beta(x,t,\varepsilon)$ называется верхним решением задачи (26), (27), если*

$$\beta(x,\varepsilon) \in C([0,1]\times[0,T]) \cap C^{2,1}((0,\hat{x}(t)]\times[0,T]) \cap C^{2,1}([\hat{x}(t),1)\times[0,T]),$$

где $\hat{x}(t) \in (0,1)$ при $t \in [0,T]$ и является гладкой функцией,

$$M[\beta] \le 0 \text{ для всех } (x,t) \in \{(0,\hat{x}(t)]\times[0,T]\} \cap \{[\hat{x}(t),0)\times[0,T]\}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}(\hat{x}+0,t,\varepsilon) - \frac{\partial \beta}{\partial x}(\hat{x}-0,t,\varepsilon) \le 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}(0,t,\varepsilon) \le 0 \;\; и \;\; \frac{\partial \beta}{\partial x}(1,t,\varepsilon) \ge 0, \tag{38}$$

$$\beta(x,0,\varepsilon) \ge u^0(x,\varepsilon), \tag{39}$$

где M – интегродифференциальный оператор уравнения (26). Аналогично, нижним решением называется функция $\alpha(x,t,\varepsilon)$, принадлежащая тому же классу гладкости и удовлетворяющая всем неравенствам с противоположным знаком.

Доказательство существования и единственности решения задачи (26), (27) основывается на следующей теореме о дифференциальных неравенствах (см. [1], гл. 2. разд. 2.7, см. также [28-30]).

Теорема 4.1. *Если существуют функции* $\beta(x,t,\varepsilon)$ *и* $\alpha(x,t,\varepsilon)$, *такие, что:*
(a) $\beta(x,t,\varepsilon)$ *и* $\alpha(x,t,\varepsilon)$ *есть верхнее и нижнее решение задачи (26), (27) соответственно;*
(b) $\beta(x,t,\varepsilon)\ge\alpha(x,t,\varepsilon)$ *для любых* $(x,t)\in\{[0,1]\times[0,T]\}$;
(c) $A(x,\cdot)\in C^1[0,1]$, $g(u,v,x,s)$, $g_u(u,v,x,s)$ *и* $g_v(u,v,x,s)\in C([\alpha(x,t,\cdot),\beta(x,t,\cdot)]$ $\times[\alpha(s,t,\cdot),\beta(s,t,\cdot)]\times[0,1]^2)$;
(d) $g_v(\ldots)\le 0$ *для всех* $g(u,v,x,s)\in[\alpha(x,t,\cdot),\beta(x,t,\cdot)]\times[\alpha(s,t,\cdot),\ \beta(s,t,\cdot)]\times[0,1]^2$;
то задача (26), (27) имеет единственное классическое решение $u(x,t,\varepsilon)$ *такое, что* $\beta(x,t,\varepsilon)\ge u(x,t,\varepsilon)\ge\alpha(x,t,\varepsilon)$ *для* $(x,t)\in\{[0,1]\times[0,T]\}$.

Верхнее решение задачи (26), (27) строится в следующем виде

$$\beta_0(x,t,\varepsilon)=U_0(x,y_\beta(t,\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\overline{u}_1^{(\pm)}(x,y_\beta(t,\varepsilon))+$$
$$+\varepsilon A^{(\pm)}(x,y_\beta(t,\varepsilon))+\varepsilon P_{1\beta}^{(\pm)}u(\eta_\beta,x_0(t),x_{1\beta}(t))+\varepsilon(e^{-\kappa\tau}+e^{-\kappa\tau_*}).$$

Здесь $U_0(x,y,\varepsilon)$ – частичная сумма нулевого порядка разложения (33) с

$$y_\beta(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_{1\beta}(t).$$

Растянутая переменная переходного слоя η_β в верхнем решении определяется как $\eta_\beta=(x-y_\beta(t,\varepsilon))/\varepsilon$. Коэффициент $x_{1\beta}(t)$ будет определен ниже. Функции $A^{(\pm)}(x,y)$ являются некоторым положительным решением системы связанных интегральных уравнений, существующим в силу условия **F5.** Функции $P_{1\beta}^{(\pm)}u$ – модифицированные функции переходного слоя. Вместо условия C^1-сшивания асимптотики в точке $\eta_\beta=0$ для верхнего решения требуется выполнение условия скачка производной (37) из определения 4.1

$$\frac{\partial P_{1\beta}^{(+)}u}{\partial\eta_\beta}(0,x_0,x_{1\beta})+\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x}(x_0,x_0)-$$
$$-\left(\frac{\partial P_{1\beta}^{(-)}u}{\partial\eta_\beta}(0,x_0,x_{1\beta})+\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x}(x_0,x_0)\right)\le-\sigma,$$

где σ – некоторая положительная постоянная. Из последнего условия получим уравнение для определения $x_{1\beta}(t)$

$$\frac{dx_{1\beta}}{dt}-B\big(x_0(t)\big)x_{1\beta}=F_{1\beta}\big(x_0(t)\big)-\frac{\sigma}{\omega^2(x_0)}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}(0,x_0),$$

где функция $F_{1\beta}\big(x_0(t)\big)$ получается некоторым преобразованием из функции

$F_1\left(x_0(t)\right)$. Выбирая начальное условие для $x_{1\beta}(t)$ в виде

$$x_{1\beta}(0) = -\delta\,,$$

где δ – некоторая положительная постоянная, получим, что при достаточно больших значениях δ

$$x_{1\beta}(t) < 0 \text{ для всех } t \in [0,T].$$

Итак, верхнее решение $\beta_0(x,t,\varepsilon)$ определено. Условия (36), (38) определения 4.1 проверяются аналогично тому, как это было сделано в п. 3 § 2 гл. 2. Условию (39) всегда можно удовлетворить с помощью выбора подходящей начальной функции $u^0(x,\varepsilon)$.

Нижнее решение $\alpha_0(x,t,\varepsilon)$ определяется аналогично. Условие скачка производной для $\alpha_0(x,t,\varepsilon)$ будет следующим

$$\frac{\partial P_{1\alpha}^{(+)}u}{\partial \eta_\alpha}(0,x_0,x_{1\beta}) + \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x}(x_0,x_0) -$$
$$-\left(\frac{\partial P_{1\alpha}^{(-)}u}{\partial \eta_\alpha}(0,x_0,x_{1\beta}) + \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial x}(x_0,x_0)\right) \geq \sigma,$$

а $x_{1\alpha}(t)$ определяется из задачи

$$\frac{dx_{1\alpha}}{dt} - B\left(x_0(t)\right)x_{1\alpha} = F_{1\alpha}\left(x_0(t)\right) - \frac{\sigma}{\omega^2(x_0)}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}(0,x_0)\,.$$

Выбирая начальное условие для $x_{1\alpha}(t)$ в виде

$$x_{1\alpha}(0) = \delta\,,$$

получим, что при достаточно больших значениях δ

$$x_{1\alpha}(t) > 0 \text{ для всех } t \in [0,T].$$

Выполнение условий теоремы 4.1 для $\beta_0(x,t,\varepsilon)$ и $\alpha_0(x,t,\varepsilon)$ доказывает, что задача (26), (27) имеет единственное классическое решение, имеющее предельный вид

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = \varphi(x,x_0(t)), \quad x \in [0,1] \setminus \{x_0(t)\},$$

для любой начальной функции такой, что

$$\alpha_0(x,t,\varepsilon) \leq u^0(x,\varepsilon) \leq \beta_0(x,t,\varepsilon)\,.$$

Проверка случая $n > 0$ для $\beta_n(x,t,\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,t,\varepsilon)$, где

$$\beta_n(x,t,\varepsilon) = U_n(x,y_\beta(t,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\overline{u}_{n+1}(x,y_\beta(t,\varepsilon)) + \varepsilon^{n+1}A^{(\pm)}(x,y_\beta(t,\varepsilon)) +$$
$$+\varepsilon^{n+1}P_{(n+1)\beta}^{(\pm)}u(\eta_\beta,x_0(t),\ldots,x_n(t),x_{(n+1)\beta}(t)) + \varepsilon^{n+1}(e^{-\kappa\tau} + e^{-\kappa\tau_*}),$$

$$\alpha_n(x,t,\varepsilon)=U_n(x,y_\alpha(t,\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon^{n+1}\overline{u}_{n+1}(x,y_\alpha(t,\varepsilon))-\varepsilon^{n+1}A^{(\pm)}(x,y_\alpha(t,\varepsilon))+$$
$$+\varepsilon^{n+1}P^{(\pm)}_{(n+1)\alpha}u(\eta_\alpha,x_0(t),...,x_n(t),x_{(n+1)\alpha}(t))-\varepsilon^{n+1}(e^{-\kappa\tau}+e^{-\kappa\tau_*}),$$

проводится аналогично.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* ***F1 – F5****. Тогда для достаточно малых* ε *задача (26), (27) с начальной функцией* $u^0(x,\varepsilon)$*, удовлетворяющей неравенству*

$$\alpha_0(x,0,\varepsilon)\le u^0(x,\varepsilon)\le \beta_0(x,0,\varepsilon),$$

имеет при $t\in[0,T]$ *единственное классическое решение* $u(x,t,\varepsilon)$ *такое, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon)=\varphi(x,x_0(t)),\quad x\in[0,1]\setminus\{x_0(t)\}.$$

Если же начальная функция $u^0(x,\varepsilon)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\alpha_n(x,0,\varepsilon)\le u^0(x,\varepsilon)\le \beta_n(x,0,\varepsilon),$$

то задача (26), (27) имеет при $t\in[0,T]$ *единственное классическое решение* $u(x,t,\varepsilon)$ *такое, что справедлива оценка*

$$\max_{[0,1]}\left| u(x,t,\varepsilon)-U_n(x,y_{n+1}(t,\varepsilon),\varepsilon)\right|\le C\varepsilon^n,$$

где $y_{n+1}(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i x_i(t)$.

Заключение

Основные результаты работы, полученные лично автором:

1. Построены асимптотические приближения решений для следующих новых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач:
– Начальные задачи с нелинейными интегральными операторами типа Вольтерра и Фредгольма, в том числе в случае смены устойчивости корня вырожденного уравнения.
– Краевые задачи для обыкновенных интегродифференциальных уравнений с пограничными и внутренними слоями (контрастными структурами типа ступеньки).
– Краевые задачи для эллиптических интегродифференциальных уравнений с пограничными и внутренними слоями (двумерными контрастными структурами типа ступеньки).
– Начально-краевые задачи для параболических интегродифференциальных уравнений с пограничными и движущимися внутренними слоями (фронтами).

2. С использованием асимптотического метода дифференциальных неравенств, развитого для указанных выше классов задач, доказаны теоремы существования, обоснованы асимптотические решения, доказана устойчивость этих решений и определены локальные области влияния устойчивых решений, имеющих пограничные и внутренние слои.

В заключение автор выражает глубокую признательность профессору Николаю Николаевичу Нефёдову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pao C.V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum, 1992.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
3. Васильева А.Б. К вопросу о близких к разрывным решениях в системе с малым параметром при производных условно устойчивого типа // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. N 9. С. 1560–1568.
4. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б. Об асимптотике решения типа контрастной структуры // Математические заметки. 1987. Т. 42. N 6. С. 831–841.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
6. Файф П., Гринли В. Внутренние переходные слои для эллиптических краевых задач с малым параметром // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29. N 4. С. 103–131.
7. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика.1998. Т.4. N 3. С. 799–851.
8. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. N 7. С. 1132–1139.
9. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. N 4. С. 719–722.
10. Васильева А.Б. Об устойчивости контрастных структур // Математическое моделирование. 1991. Т. 3. N 4. С. 114–123.
11. Бутузов В.Ф. О неустойчивости контрастных структур типа всплеска // Математические модели и методы в социальных науках. (Труды вторых математических чтений МГСУ 26 января -- 2 февраля 1994). М.: МГСУ. 1994. С. 14–18.
12. Angenent S., Mallet-Paret J., Peletier L. Stable transition layers in a semilinear boundary value problems // J. Diff. Equations. 1987. V. 67. N 2. P. 212–242.

13.Hale J. K., Sakamoto K. Existence and stability of transition layers// Japan J. of Appl. Math. 1988. V. 5. N 3. P. 367–405.
14. Бутузов В.Ф., Неделько И.В. О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями в двумерном случае // Известия РАН (серия математическая). 2002. Т. 66. N 1. С. 3–42.
15.Бутузов В.Ф., Неделько И.В. О формировании контрастной структуры типа ступеньки в параболической системе с разными степенями малого параметра // Доклады РАН. 2003. Т. 390. N 1. С. 15–18.
16. Raquepas J., Dockery J. Dynamics of a reaction-diffusion equation with nonlocal inhibition // Physica D. 1999. V. 134. P. 94–110.
17.Novick-Cohen A. The Cahn-Hilliard equation: Mathematical and Modelling Perspectives // Advances in Math. Sci. and Appl. 1998. V. 8, 965–985.
18. Rubinstein J., Sternberg P. Nonlocal reaction-diffusion equations and nucleation // IMA J. Appl. Math. 1992. V. 48. P. 249–264.
19. Okada K. Intermediate dynamics of internal layers for a nonlocal reaction-diffusion equation // Hiroshima Math. J. 2005. V. 35. P. 263–308.
20.Bates, P., Zhao, G. Existence, uniqueness and stability of the stationary solution to a nonlocal evolution equation arising in population dispersal // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 332. N 1, P. 428–440.
21. Bates, P., Chen, F. Spectral analysis of traveling waves for nonlocal evolution equations // SIAM J. Math. Anal. 2006. V. 38. N. 1. P. 116–126.
22. Kot M., Lewis M., Driessche P. Dispersal data and the spread of invading organisms // Ecology. 1996. V. 77. N 7. P. 2027–2042.
23. Medlock J., Kot M. Spreading disease: Integro-differential equations old and new // Mathematical Biosciences. 2003. V. 184. N 2. P. 201–222.
24. Butuzov V.F., Nefedov N.N., Schneider K.R. Singularly perturbed boundary value problems in case of exchange of stabilities // J. Math. Analys. and Appl. 1999. V. 229. P. 543–562.
25. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
26. Fife P., Hsiao L. Generation and Propagation of Internal Layers // Nonlinear Anal. 1988. V. 12. N 1. P. 19–41.
27. Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems. New York: Springer, 2001.
28.Amann H. Periodic Solutions of Semilinear Parabolic Equations, Nonlinear Analysis: a Collection of Papers in Honor of Erich Rothe. New York: Academic, 1978, pp. 1–29.
29. Sattinger D. Monotone Methods in Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. N 11. P. 979–1001.
30. Fife P., Tang M. Comparision Principles for Reaction-Diffusion systems: Irregular Comparision Functions and Applications to Question of Stability and Speed Propagation of Disturbances // J. Diff. Equations. 1981. V. 40, P. 168–185.

31. Михайлов А.П. Моделирование системы "власть-общество". М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

32. Никитин А.Г. Неустойчивость контрастных пространственных структур типа "всплеска" в системе реакции-диффузии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1992. Т. 31, N 3. С. 443–452.
33. Васильева А.Б., Никитин А.Г., Петров А.П. Асимптотический метод исследования контрастных структур и его приложения к теории гидромагнитного динамо // Математическое моделирование, т. 7, 1995, № 2, с. 61 – 71.
34. Vasil'eva A., Nikitin A., Petrov A. Stability of contrasting solutions of nonlinear hydromagnetic dynamo equations and magnetic fields reversals in galaxies // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, v. 78, 1995, pp. 261 – 279.
35. Васильева А.Б., Никитин А.Г. К вопросу об устойчивости периодических контрастных структур в пространственно двумерном случае // Дифференциальные уравнения, 1996. Т. 32. № 10. С. 1355-1361.
36. Никитин А.Г. О главной собственной функции одной сингулярно возмущенной задачи Штурма-Лиувилля // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1999, т. 39, № 4, с. 558–591.
37. Никитин А.Г., Петров А.П. О предельном переходе по малому параметру для собственных значений сингулярно возмущенной задачи Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, №6, с. 843-845
38. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Асимптотический метод дифференциальных неравенств для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2000, т.36, № 10, с. 1398-1404.
39. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для решений типа ступеньки в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2001, т. 41, № 7, с. 1057 –1066.
40. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Асимптотическая устойчивость контрастных структур типа ступеньки в сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнениях в двумерном случае // Математическое. моделирование, 2001, т. 13, № 12, с. 65–74.
41. Nikitin A.G. Contrast structures in the integro-differential equations // Progress of nonlinear science. Proceeding of international conference dedicated to the 100th Anniversary of A.A Andronov Vol. I. Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics,University of Nizhny Novgorod, 2002, 323-326
42. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения в случае сбалансированной нелинейности // Труды второй международной конференции "Нелинейные дифференциаль-

ные уравнения в частных производных» (Алушта, 2005), В сб.: Нелинейные граничные задачи, Институт прикладной математики НАН Украины, 2006, с. 186-192.

43. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г., Уразгильдина Т.А. Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, т. 46, №5, с. 805-812.
44. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Метод дифференциальных неравенств для контрастных структур типа ступеньки в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях в пространственно двумерном случае // Дифференциальные уравнения , 2006, т. 42, №5, с. 690-700.
45. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2007, т. 47, №4, с. 655-664.
46. Nefedov N.N., Nikitin A.G., Recke L. Moving Internal Layers in the Singular Perturbed Integro-Parabolic Reaction-Diffusion-Advection Equations // Preprint Nr. 2007-22. Humboldt University of Berlin, Institute of Mathematic, pp. 1-17.