ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 537.611.43.: 530.145

О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЕ ЧАСТИЦ С МАГНИТНЫМИ МОМЕНТАМИ

П. А. Андреев, Л. С. Кузьменков

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: andrap@yandex.ru

Показано,что в двухкомпонентных системах частиц с собственными магнитными моментами наряду с поперечными электромагнитными и продольными волнами могут возбуждаться самосогласованные спиновые волны, а также независимые волны в каждом компоненте, вырождающиеся в колебания для бесспиновых систем. Для всех таких волн получены дисперсионные соотношения путем решения в линейном приближении уравнений квантовой гидродинамики и уравнений поля.

Введение

Наряду с равновесными свойствами парамагнитных систем [1] представляет интерес изучение волновых процессов, существующих в таких системах. Волны в парамагнитных системах рассматривались в работах [2–5]. В работах [3, 4] принималось во внимание движение только легкой электронной компоненты. Были получены дисперсионные соотношения, учитывающие наряду с кулоновскими взаимодействиями также взаимодействия собственных магнитных моментов электронов.

Ниже рассматривается дисперсия волн в системах, состоящих из двух сортов частиц помещенных во внешнее однородное постоянное магнитное поле, с учетом наличия у частиц обоих сортов собственных магнитных моментов. Пространственная дисперсия естественно появляется при представлении уравнений движения квантовой системы частиц в виде уравнений для материальных полей. Поэтому задача о собственных волнах в системах из двух сортов частиц со спином решается методом «квантовой гидродинамики», развитым в работах [6, 7], в которых получены фундаментальные уравнения баланса плотности энергии, плотности импульса, плотности числа частиц и плотности магнитного момента исходя из уравнения Шрёдингера для системы N взаимодействующих частиц, находящихся во внешнем электромагнитном поле.

1. Дисперсионное уравнение

Система уравнений квантовой гидродинамики в приближении самосогласованного поля имеет вид

$$\frac{\partial n_n}{\partial t} + \nabla_\alpha(n_n v_n^\alpha) = 0,$$

$$m_n n_n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_n \nabla\right) \boldsymbol{v}_n + \nabla p_n - \frac{\hbar^2}{4m_n}\nabla\triangle n_n + \frac{\hbar^2}{4m_n}\nabla^\beta\left(\frac{1}{n_n}(\nabla^\alpha n_n)(\nabla^\beta n_n)\right) = e_n n_n\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{B}]\right) + \mu_n^\alpha n_n \nabla B^\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_n\nabla\right)\mu_n = \frac{e_n}{m_n c}[\mu_n, \boldsymbol{B}],$$

$$\nabla\boldsymbol{E} = 4\pi\sum_n e_n n_n,$$

$$[\nabla, \boldsymbol{B}] = [\nabla, 4\pi\sum_n \mu_n n_n] + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sum_n e_n n_n \boldsymbol{v}_n,$$

$$[\nabla, \boldsymbol{E}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla\boldsymbol{B} = 0. \tag{1}$$

В этой системе уравнений и далее индекс n принимает значения e для электронов и i для ионов. Во второе уравнение системы (1) входят слагаемые, пропорциональные $\hbar^2$, называемые в литературе квантовым потенциалом Бома [6, 8].

Ниже рассматривается динамика малых возмущений материальных полей $n_n, \boldsymbol{v}_n, \mu_n$, электрического $\boldsymbol{E}$ и магнитного $\boldsymbol{B}$ полей:

$$n_n = n_{0n} + \delta n, \qquad \boldsymbol{E} = 0 + \boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_z + \delta\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{v}_n = 0 + \boldsymbol{v}_n,$$
$$\mu_n = \mu_{0n} + \delta\mu_n, \qquad \boldsymbol{M}_{0n} = n_{0n}\mu_{0n} = \chi\boldsymbol{B}_0,$$
$$n_{0e} = n_{0i}.$$

Здесь $\chi = \kappa/\mu$ — отношение равновестных значений магнитной восприимчивости вещества κ к магнитной проницаемости μ.

Подставляем эти соотношения в систему уравнений (1) и пренебрегаем квадратами возмущений по сравнению с их первыми степенями. В результате приходим к системе 22 линейных однородных уравнений в частных призводных с постоянными коэфициентами. Переходя к представлению Фурье, получаем следующую однородную систему алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
-i\omega\delta n_n + i n_{on}\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_n = 0,\\
m_e n_{0e}(-i\omega)\boldsymbol{v}_e + m_e\frac{1}{3}v_{Fe}^2 i\boldsymbol{k}\delta n_e + \frac{\hbar^2}{4m_e}ik^2\boldsymbol{k}\delta n_e =\\
= -en_{0e}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_e, \boldsymbol{B}_0]\right) + \chi_e B_0^\alpha i\boldsymbol{k}\delta B^\alpha,\\
m_i n_{0i}(-i\omega)\boldsymbol{v}_i + m_i v_{Ti}^2 i\boldsymbol{k}\delta n_i =\\
= en_{0i}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{B}_0]\right) + \chi_i B_0^\alpha i\boldsymbol{k}\delta B^\alpha,\\
(-i\omega)\delta\mu_n = \frac{e_n}{m_n c}[\delta\mu_n, \boldsymbol{B}_0] + \frac{e_n}{m_n c}\left[\frac{\chi_n}{n_{0n}}\boldsymbol{B}_0, \delta\boldsymbol{B}\right],\\
i[\boldsymbol{k}, \delta\boldsymbol{B}] = i\left[\boldsymbol{k}, 4\pi\sum_n\left(n_{0n}\delta\mu_n + \frac{\chi_n}{n_{0n}}\boldsymbol{B}_0\delta n_n\right)\right] -\\
-\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\sum_n e_n n_{0n}\boldsymbol{v}_n,\\
i[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}] = \frac{i\omega}{c}\delta\boldsymbol{B},\ i\boldsymbol{k}\boldsymbol{E} = 4\pi\sum_n e_n\delta n_n, \quad i\boldsymbol{k}\delta\boldsymbol{B} = 0. \qquad (2)
\end{gathered}
$$

Мы предполагаем, что вектор напряженности электрического поля в волне отличен от нуля.

Выражая все величины, входящие в систему уравнений, через компоненты вектора напряженности электрического поля, получаем систему трех уравнений

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\omega, k)E_\beta(\omega, k) = 0, \qquad (3)$$

где

$$
\begin{gathered}
\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{\omega^2}{c^2}\delta_{\alpha\beta} - k^2\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) +\\
+\sum_n\frac{\omega_n^2}{c^2}A_{\alpha\beta n} + 4\pi\sum_n\chi_n S_{\alpha\beta n} + 16\pi^2c^2\sum_n\chi_n^2 D_{\alpha\beta n}. \qquad (4)
\end{gathered}
$$

Далее для краткости используются обозначения

$$
v_e^2 = \frac{1}{3}v_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2}k^2, \quad v_i^2 = v_{Ti}^2, \quad \Omega_n = \frac{e_n B_0}{m_n c}, \quad \omega_n^2 = \frac{4\pi e_n^2 n}{m_n}.
$$

В выражение для матрицы $\Lambda_{\alpha\beta}$ входят матрицы $A_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$. Эти матрицы имеют вид соответственно

$$
\hat{A}_n = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}
-\left(\omega^2 - (k_y^2 + k_z^2)v_n^2\right) & -i\omega\Omega_n + \left(i\frac{\Omega_n}{\omega}k_z^2 - k_x k_y\right)v_n^2 & \left(-i\frac{\Omega_e}{\omega}k_y k_z - k_x k_z\right)v_n^2\\
i\omega\Omega_n - \left(k_x k_y + i\frac{\Omega_n}{\omega}k_z^2\right)v_n^2 & -\left(\omega^2 - (k_x^2 + k_z^2)v_n^2\right) & \left(i\frac{\Omega_n}{\omega}k_x k_z - k_y k_z\right)v_n^2\\
\left(i\frac{\Omega_n}{\omega}k_y k_z - k_x k_z\right)v_n^2 & \left(-i\frac{\Omega_n}{\omega}k_x k_z - k_y k_z\right)v_n^2 & -(\omega^2 - \Omega_n^2) + v_n^2(k_x^2 + k_y^2)
\end{pmatrix},
$$

где для компактности использовано обозначение

$$
\begin{gathered}
\Delta = (\omega^2 - \Omega_n^2) - \frac{v_n^2}{\omega^2}\left((k_x^2 + k_y^2)\omega^2 + (\omega^2 - \Omega_n^2)k_z^2\right);\\
S_n^{\alpha\beta} = S_n^{(1)\alpha\beta} + S_n^{(2)\alpha\beta},
\end{gathered}
$$

где

$$
\hat{S}_n^{(1)} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}
-2\Omega_n^2 k_y^2 & 2\Omega_n^2 k_x k_y - i\omega\Omega_n(k_x^2 + k_y^2) & -i\frac{\Omega_n}{\omega}k_y k_z(\omega^2 - \Omega_n^2)\\
2\Omega_n^2 k_x k_y + i\omega\Omega_n(k_x^2 + k_y^2) & -2\Omega_n^2 k_x^2 & i\frac{\Omega_n}{\omega}k_x k_z(\omega^2 - \Omega_n^2)\\
i\frac{\Omega_n}{\omega}k_y k_z(\omega^2 - \Omega_n^2) & -i\frac{\Omega_n}{\omega}k_x k_z(\omega^2 - \Omega_n^2) & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
\hat{S}_n^{(2)} = \begin{pmatrix}
-\frac{\Omega_n^2 k_z^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & -\frac{i\omega\Omega_n k_z^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & +\frac{\Omega_n^2 k_x k_z - i\omega\Omega_n k_y k_z}{\omega^2 - \Omega_n^2}\\
+\frac{i\omega\Omega_n k_z^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & -\frac{\Omega_n^2 k_z^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & +\frac{\Omega_n^2 k_y k_z - i\omega\Omega_n k_x k_z}{\omega^2 - \Omega_n^2}\\
+\frac{\Omega_n^2 k_x k_z + i\omega\Omega_n k_y k_z}{\omega^2 - \Omega_n^2} & +\frac{i\omega\Omega_n k_x k_z + \Omega_n^2 k_y k_z}{\omega^2 - \Omega_n^2} & -\frac{\Omega_n^2(k_x^2 + k_y^2)}{\omega^2 - \Omega_n^2}
\end{pmatrix};
$$

$$\hat{D}_n = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \frac{\Omega_n^2}{\omega_n^2}\left(-k_y^2(k_x^2+k_y^2) - k_y^2k_z^2\frac{\omega^2-\Omega_n^2}{\omega^2}\right) & \frac{\Omega_n^2}{\omega_n^2}\left(k_xk_y(k_x^2+k_y^2) + k_xk_yk_z^2\frac{\omega^2-\Omega_n^2}{\omega^2}\right) & 0 \\ \frac{\Omega_n^2}{\omega_n^2}\left(k_xk_y(k_x^2+k_y^2) + k_xk_yk_z^2\frac{\omega^2-\Omega_n^2}{\omega^2}\right) & \frac{\Omega_n^2}{\omega_n^2}\left(-k_x^2(k_x^2+k_y^2) + k_x^2k_z^2\frac{\omega^2-\Omega_n^2}{\omega^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Волны, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю

Рассмотрим волны, которые могут распространяться строго перпендикулярно внешнему магнитному полю $\boldsymbol{B_0}$. Для таких волн $k_z = 0$.

При вычислениях пренебрежем слагаемым, пропорциональным χ^2, которое не дает вклада в представленное ниже дисперсионное соотношение. Тогда матрица $\Lambda^{\alpha\beta}$ принимает вид

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{\omega^2}{c^2}\delta_{\alpha\beta} - k^2\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \sum_n \frac{\omega_n^2}{c^2}\tilde{A}_{\alpha\beta n} + 4\pi\sum_n \chi_n \tilde{S}_{\alpha\beta n}. \quad (5)$$

где

$$\hat{\tilde{A}}_e = \frac{1}{\Delta_1}\begin{pmatrix} -\left(\omega^2 - k_y^2\left(\frac{1}{3}v_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2}(k_x^2+k_y^2)\right)\right) & -i\omega\Omega_e - k_xk_y\left(\frac{1}{3}v_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2}(k_x^2+k_y^2)\right) & 0 \\ i\omega\Omega_e - k_xk_y\left(\frac{1}{3}v_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2}(k_x^2+k_y^2)\right) & -\left(\omega^2 - k_x^2\left(\frac{1}{3}v_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2}(k_x^2+k_y^2)\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\tilde{A}}_i = \begin{pmatrix} -\frac{\omega^2 - k_y^2v_{Ti}^2}{(\omega^2-\Omega_i^2) - (k_x^2+k_y^2)v_{Ti}^2} & \frac{-i\omega\Omega_i - k_xk_yv_{Ti}^2}{(\omega^2-\Omega^2) - (k_x^2+k_y^2)v_{Ti}^2} & 0 \\ \frac{i\omega\Omega_i - k_xk_yv_{Ti}^2}{(\omega^2-\Omega^2) - (k_x^2+k_y^2)v_{Ti}^2} & -\frac{\omega^2 - k_x^2v_{Ti}^2}{(\omega^2-\Omega_i^2) - (k_x^2+k_y^2)v_{Ti}^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\tilde{S}}_e = \begin{pmatrix} -\frac{2\Omega_e^2k_y^2}{\Delta_1} & \frac{2\Omega_e^2k_xk_y - i\omega\Omega_e(k_x^2+k_y^2)}{\Delta_1} & 0 \\ \frac{2\Omega_e^2k_xk_y + i\omega\Omega_e(k_x^2+k_y^2)}{\Delta_1} & -\frac{2\Omega_e^2k_x^2}{\Delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Omega_e^2}{\omega^2-\Omega_e^2}(k_x^2+k_y^2) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\tilde{S}}_i = \begin{pmatrix} -\frac{2\Omega_i^2k_y^2}{(\omega^2-\Omega_i^2) - (k_x^2+k_y^2)v_{Ti}^2} & \frac{2\Omega_i^2k_xk_y - i\omega\Omega_i(k_x^2+k_y^2)}{(\omega^2-\Omega_i^2) - (k_x^2+k_y^2)v_{Ti}^2} & 0 \\ \frac{2\Omega_i^2k_xk_y + i\omega\Omega_i(k_x^2+k_y^2)}{(\omega^2-\Omega_i^2) - (k_x^2+k_y^2)v_{Ti}^2} & -\frac{2\Omega_i^2k_x^2}{(\omega^2-\Omega_i^2) - (k_x^2+k_y^2)v_{Ti}^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Omega_i^2}{\omega^2-\Omega_i^2}(k_x^2+k_y^2) \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = (\omega^2-\Omega_e^2) - (k_x^2+k_y^2)\left(\frac{1}{3}v_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2}(k_x^2+k_y^2)\right).$$

В этом случае дисперсионное уравнение

$$\det\hat{\Lambda} = 0$$

распадается на два уравнения:

$$\Lambda^{xx}\Lambda^{yy} - \Lambda^{xy}\Lambda^{yx} = 0, \quad (6)$$

$$\Lambda^{zz} = -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \sum_n \frac{\omega_n^2}{c^2} - 4\pi\sum_n \frac{\Omega_n^2k^2\chi_n}{\omega^2-\Omega_n^2} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) содержит уже известные волновые решения для систем частиц без магнитного момента [9, 10]. При этом вклады от взаимодействия собственных магнитных моментов носят характер малых поправок. При условии $\Omega_n^2 < \omega_n^2$, справедливом для достаточно плотных систем или слабых магнитных полей, решениями уравнения (7) являются следующие дисперсионные соотношения:

$$\omega^2 = \omega_e^2 + k^2c^2 + 4\pi k^2c^2 \sum_n \frac{\Omega_n^2 \chi_n}{\omega_e^2 + k^2c^2 - \Omega_n^2}, \qquad (8)$$

$$\omega = |\Omega_n|\left(1 - \frac{2\pi k^2c^2\chi_n}{\omega_e^2 + k^2c^2 - \Omega_n^2}\right). \qquad (9)$$

Уравнение (8) описывает волну, которая без учета собственных магнитных моментов электронов и ионов совпадала бы с обыкновенной волной в магнитоактивной плазме [10]. Мы видим, что и в системе с собственными магнитными моментами волна остается поперечной, линейно поляризованной.

Уравнение (9) описывает новую волновую моду со слабой пространственной дисперсией и частотой, близкой к циклотронной частоте. Отклонение функции $\omega(\boldsymbol{k})$ от постоянной, соответствующей колебаниям системы как целого, является малым вследствие малости парамагнитной восприимчивости. Электрическое поле в такой волне является поперечным и эллиптически поляризованным.

3. Волны, распространяющиеся параллельно магнитному полю

Для волн, которые могут распространяться в двухкомпонентной системе частиц с собственными магнитными моментами в направлении внешнего магнитного поля, матрица $\Lambda^{\alpha\beta}$ принимает вид

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda'_{\alpha\beta} + 4\pi \sum_n \chi_n S'_{\alpha\beta n},$$

где

$$\hat{\Lambda}' = \begin{pmatrix} -k_z^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2} - \sum\limits_n \dfrac{\omega_n^2}{c^2} \dfrac{\omega^2 - k_z^2 v_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & \sum\limits_n \dfrac{\omega_n^2}{c^2} \dfrac{-i\omega\Omega_n + i\frac{\Omega_n}{\omega} k_z^2 v_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & 0 \\ \sum\limits_n \dfrac{\omega_n^2}{c^2} \dfrac{i\omega\Omega_n - i\frac{\Omega_n}{\omega} k_z^2 v_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & -k_z^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2} - \sum\limits_n \dfrac{\omega_n^2}{c^2} \dfrac{\omega^2 - k_z^2 v_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \sum\limits_n \dfrac{\omega_n^2}{\omega^2 - v_n^2 k_z^2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}'_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_z^2\Omega_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & \dfrac{-i\omega\Omega_n k_z^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & 0 \\ \dfrac{i\omega\Omega_n k_z^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & -\dfrac{k_z^2\Omega_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае из дисперсионного уравнения $\det\hat{\Lambda} = 0$ получаем

$$\omega^2 = \omega_e^2 + \frac{1}{3} v_{Fe}^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2} k^4, \qquad (10)$$

$$\frac{k_z^2c^2}{\omega^2} = \frac{1 - \sum_n \frac{\omega_n^2}{\omega(\omega \pm \Omega_n)}}{1 \mp \sum_n \frac{4\pi\Omega_n\chi_n}{\omega \pm \Omega_n}}. \qquad (11)$$

В силу малости отношения массы электрона к массе иона в выражении (10) пренебрегли ионным вкладом.

Если в формуле (10) пренебречь вкладом от квантового потенциала Бома, то эта формула будет описывать спектр высокочастотных ленгмюровских колебаний вырожденной плазмы во внешнем постоянном однородном магнитном поле. Формула (11) при тех же условиях, когда можно пренебречь влиянием собственных магнитных моментов, даст зависимость показателя преломления от частоты поперечных волн в магнитоактивной плазме [10].

4. Спиновые волны

Особый интерес представляют спиновые самосогласованные волны, для которых электрическое поле в волновом возмущении равно нулю, $E = 0$, но магнитное поле в волне отлично от нуля, $B \neq 0$.

В системе уравнений (2) положим $E = 0$. Тогда придем к следующему дисперсионному уравнению:

$$\Pi_{\alpha\beta}(\omega, k) B_\beta(\omega, k) = 0, \qquad (12)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} k^\gamma + 4\pi \sum_n \chi_n \pi_{\alpha\beta n}, \qquad (13)$$

$$\hat{\pi}_n = \begin{pmatrix} -k_z \dfrac{\omega\Omega_n}{\omega^2 - \Omega_n^2} & -ik_z \dfrac{\Omega_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & \dfrac{ik_y\chi_n B_0^2((k_x^2 + k_y^2)\omega^2 + k_z^2(\omega^2 - \Omega_n^2)) - \frac{1}{c} e_n n_{0n} B_0(\omega k_x + i\Omega_n k_y)\omega^2}{\omega^2(\omega^2 - \Omega_n^2) - v_n^2(\omega^2(k_x^2 + k_y^2) + (\omega^2 - \Omega_n^2)k_z^2)} \\ ik_z \dfrac{\Omega_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & -k_z \dfrac{\omega\Omega_n}{\omega^2 - \Omega_n^2} & \dfrac{-ik_x\chi_n B_0^2((k_x^2 + k_y^2)\omega^2 + k_z^2(\omega^2 - \Omega_n^2)) - i\frac{1}{c} e_n n_{0n} B_0(i\Omega_n k_x - k_y\omega)\omega^2}{\omega^2(\omega^2 - \Omega_n^2) - v_n^2(\omega^2(k_x^2 + k_y^2) + (\omega^2 - \Omega_n^2)k_z^2)} \\ \dfrac{k_x\omega\Omega_n - ik_y\Omega_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & \dfrac{k_y\omega\Omega_n + ik_x\Omega_n^2}{\omega^2 - \Omega_n^2} & \dfrac{\frac{1}{c} e_n n_{0n} B_0 k_z \omega(\omega^2 - \Omega_n^2)}{\omega^2(\omega^2 - \Omega_n^2) - v_n^2(\omega^2(k_x^2 + k_y^2) + (\omega^2 - \Omega_n^2)k_z^2)} \end{pmatrix}.$$

Для спиновых волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю,

$$\hat{\Pi}=\begin{pmatrix} -4\pi k\sum_n \chi_n \frac{\omega\Omega_n}{\omega^2-\Omega_n^2} & -ik\left(1+4\pi\sum_n \chi_n \frac{\Omega_n^2}{\omega^2-\Omega_n^2}\right) & 0 \\ ik\left(1+4\pi\sum_n \chi_n \frac{\Omega_n^2}{\omega^2-\Omega_n^2}\right) & -4\pi k\sum_n \chi_n \frac{\omega\Omega_n}{\omega^2-\Omega_n^2} & 0 \\ 0 & 0 & en_{0i}\frac{\chi_i\omega k}{\omega^2-v_{Ti}^2k^2}-en_{0e}\frac{\chi_e\omega k}{\omega^2-\frac{1}{3}v_{Fe}^2k^2-\frac{\hbar^2}{4m_e^2}k^4} \end{pmatrix}.$$

Дисперсионное уравнение

$$\det\hat{\Pi}=0$$

распадается на два уравнения. Решением одного из них является

$$\omega=|\Omega_n|(1-4\pi\chi_n). \tag{14}$$

Второе уравнение имеет вид

$$\frac{\chi_e}{\omega^2-(\frac{1}{3}v_{Fe}^2+\frac{\hbar^2}{4m_e^2}k^2)k^2}-\frac{\chi_i}{\omega^2-v_{Ti}^2k^2}=0. \tag{15}$$

Это уравнение не имеет решений при условии $\chi_i=\chi_e$. При условии $\chi_i\neq\chi_e$ уравнение имеет следующее решение:

$$\omega^2=k^2\frac{v_{Ti}^2\chi_e-(\frac{1}{3}v_{Fe}^2+\frac{\hbar^2}{4m_e^2}k^2)\chi_i}{\chi_e-\chi_i}. \tag{16}$$

Пренебрегая тепловым движением ионов, получаем

$$\omega^2=(\frac{1}{3}v_{Fe}^2k^2+\frac{\hbar^2}{4m_e^2}k^4)\frac{\chi_i}{\chi_i-\chi_e}. \tag{17}$$

Этой формулой представлена дисперсия самосогласованных спиновых волн в электрон-ионной системе частиц с собственными магнитными моментами. Вектор индукции магнитного поля такой волны перпендикулярен направлению ее распростронения и является эллиптически поляризованным. При $\chi_i<\chi_e$ частота становится мнимой и распространение волн невозможно. Эти результаты качественно согласуются с результатами численных вычислений, проведенных на основе модели Гейзенберга в работе [2], и с результатами экспериментальных измерений, представленых в [11].

Таким образом, мы получили количественные вклады в дисперсионные соотношения волн в двухкомпонентных системах частиц с собственными магнитными моментами. Для известных поперечных электромагнитных и продольных волн квантовые вклады являются поправочными. Вместе с тем могут возбуждаться волны, которые распространяются независимо (в линейном приближении) в электронной и ионной компонентах и дисперсия которых представлена формулой (9). Такие волны вырождаются в колебания для бесспиновых систем на циклотронной частоте. Мы получили также дисперсионное соотношение для самосогласованных спиновых волн (формула (16)), которые могут распространяться только при наличии у частиц собственных магнитных моментов.

Литература

1. *Ашкрофт Н., Мермин Н.* Физика твердого тела. М., 1979.
2. *Xiuping Tao, Landau D.P., Schulthess T.C., Stocks G.M.* // Phys. Rev. Lett. 2005. **95**. P 087207.
3. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г, Федосеев В.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 5. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 2000. N 5. P. 1).
4. *Кузьменков Л.С., Харабадзе Д.Э.* // Изв. вузов. Физика. 2004. № 4. С. 87.
5. *Ким Н.Е., Поляков П.А.* // Сб. трудов Межд. конф. МСС-04 «Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность». Москва, 23–25 ноября 2004. М., 2004.
6. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г.* // ТМФ. 1999. **118**, № 2. С. 287.
7. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г., Федосеев В.В.* // ТМФ. 2001. **126**, № 1. С. 110.
8. *Александров А.Ф., Рухадзе А.А.* Лекции по электродинамике плазмоподобных сред. М., 1999.
9. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В.* и др. Электродинамика плазмы. М., 1974.
10. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М., 1988.
11. *Lynn J.W.* // Phys. Rev. B. 1975. **11**. P 2624.

Поступила в редакцию
09.06.06