УДК 521.13

ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ ДЛЯ ЛИНДБЛАДОВСКИХ РЕЗОНАНСОВ В СЛУЧАЕ БОЛЬШИХ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОВ

И. А. Герасимов, Б. Р. Мушаилов

(*ГАИШ*)

E-mail: brm@sai.msu.ru

В рамках ограниченного и неограниченного вариантов планетной задачи трех тел для орбитальной соизмеримости первого порядка (линдбладовских резонансов) без предположения о малости величин эксцентриситетов орбит получено аналитическое решение, описывающее эволюцию всех орбитальных элементов гравитирующих тел. Результаты обобщены на случай учета сжатия центрального тела.

Введение

Проблемам динамической неустойчивости (динамического хаоса) в рамках резонансной задачи трех тел в последнее время посвящается значительное число работ ([1–3] и др.). Как известно, основная особенность хаотических систем состоит в том, что малое возмущение начальных условий для динамической переменной или малое изменение параметров самой динамической системы приводит за конечное время к непредсказуемости результирующего движения.

Однако заметная неустойчивость может развиться лишь на интервалах $t \gg \mu^{-1}$, где μ — малый параметр динамической системы [4]. Поэтому в рамках резонансной задачи трех тел корректным является исследование гравитационных эффектов лишь на временах порядка $1/\mu$, когда применение строго обоснованных асимптотических методов позволяет построить аналитическое решение, интерпретирующее орбитальную эволюцию гравитирующих тел. Указанный подход, базирующийся на концепции «частичной детерминируемости», и лежит в основе рассматриваемой статьи.

Аналитическое решение в случае плоского варианта задачи

Будем считать, что движение трех взаимодействующих по закону тяготения Ньютона материальных точек P_i $(i = 0, 1, 2)$ с массами $m_0 = 1$, $m_j = \mu\alpha_j$ $(j = 1, 2;\ \mu \ll 1)$ соответственно происходит в фиксированной плоскости «экватора» тела P_0 и удовлетворяет в начальный момент времени t_0 условию линдбладовского резонанса вида

$$|pn_1 - (p+1)n_2| \leqslant O\left[\sqrt{\mu}\right]. \tag{1}$$

Здесь n_j — среднее движение тел P_j $(j = 1, 2)$, p — кратность соизмеримости. Рассмотрение будем вести в системе координат Якоби, т. е. движение P_1 отнесем к системе координат с началом в точке P_0, а движение P_2 — к системе с началом в центре масс точек P_0 и P_1. Единицу времени выберем так, чтобы гравитационная постоянная была равна единице.

Тогда уравнения рассматриваемой задачи с точностью до $O[\mu^2]$ представимы в виде канонической системы с четырьмя степенями свободы, гамильтониан которой имеет вид

$$F = F_0 + R, \quad F_0 = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j/(2a_j^2), \tag{2}$$

где α_j — большие полуоси орбит тел P_j $(j = 1, 2)$, а R определяется в виде [5]

$$R = \mu'\left(R_1 + R_2\right), \quad R_1 = 1/\Delta, \quad R_2 = -\left(r_1 \cos H\right)/r_2^2,$$

$$\Delta^2 = r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos H + r_2^2.$$

Здесь, в свою очередь, $\mu' = \alpha_1\alpha_2\mu$, $H = w_1 - w_2$, r_j и w_j $(j = 1, 2)$ — радиус-векторы и истинные долготы тел P_1 и P_2.

Возмущающую функцию R после исключения короткопериодических членов с учетом условия резонанса будем рассматривать как функцию переменных [5]

$$k_j + ih_j = e_j \exp\left(iS_j\right), \quad i^2 = -1, \tag{3}$$

где $S_1 = p\lambda_1 - (p+1)\lambda_2 + \bar{\omega}_1$, $S_2 = S_1 - \Delta\omega$, $\lambda_j = M_j + \bar{\omega}_j$ $(j = 1, 2)$, $\Delta\omega = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2$; e_j, M_j и $\bar{\omega}_j$ — эксцентриситет, средняя аномалия и долгота перицентра орбиты тела P_j $(j = 1, 2)$ соответственно. В области D^*, определенной в работе [5], разложение пертурбационной функции R можно представить в окрестности точки $(k_{j0}, h_{j0}) \in D^*$ абсолютно сходящимся рядом вида

$$\begin{aligned}
\frac{R}{\mu'} &= R_0 + R_{k_1}(k_1 - k_{10}) + R_{h_1}(h_1 - h_{10}) + \\
&+ \frac{1}{2}R_{k_1k_1}(k_1 - k_{10})^2 + R_{k_1h_1}(k_1 - k_{10})(h_1 - h_{10}) + \\
&+ \frac{1}{2}R_{h_1h_1}(h_1 - h_{10})^2 + \ldots + \left[R_{k_2} + R_{k_2k_1}(k_1 - k_{10}) + \right. \\
&\left. + R_{k_2h_1}(h_1 - h_{10}) + \ldots\right](k_2 - k_{20}) + \\
&+ \left[R_{h_2} + R_{h_2k_1}(k_1 - k_{10}) + R_{h_2h_1}(h_1 - h_{10}) + \ldots\right] \times \\
&\times (h_2 - h_{20}) + \frac{1}{2}R_{k_2k_2}(k_2 - k_{20})^2 +
\end{aligned}$$

$$+R_{k_2h_2}(k_2-k_{20})(h_2-h_{20})+\frac{1}{2}R_{h_2h_2}(h_2-h_{20})^2+\dots\,. \tag{4}$$

В правой части (4) не представлены слагаемые третьего и более высоких порядков относительно $(k_j - k_{j0})$, (h_j-h_{j0}) $(j=1,2)$, т. е. эти слагаемые, содержащие множители вида $\prod\limits_{j=1}^{2}\left[(k_j-k_{j0})^{m_j}(h_j-h_{j0})^{l_j}\right]$; $m_j, l_j = 0,1,2,\dots$, так что $\sum\limits_{i=1}^{2}(m_j+l_j)\geqslant 3$.

Для определения коэффициентов тейлоровского ряда (4) воспользуемся известными разложениями для оскулирующих элементов орбит $\xi_j+i\eta_j = r_j\exp\left[i\left(\nu_j-M_j\right)\right]$, $i^2=-1$ и $\zeta_j=1/r_j$ $(j=1,2)$ [6]:

$$\begin{aligned} z_{l_j} &= a_j\sum_{m=0}^{\infty} e_j^m P_{lm}\left(e_j^2\right)\exp\left[imM_j\right],\\ \zeta_j &= a_j^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} e_j^m P_{3m}\left(e_j^2\right)\cos\left(mM_j\right)\quad (l,j=1,2), \end{aligned} \tag{5}$$

где полиномы P_{1m}, P_{2m} приведены в работе [7], $\mathrm{Re}\left\{z_{1_j}\right\}=\xi_j$, $\mathrm{Im}\left\{z_{2_j}\right\}=\eta_j$,

$$P_{30}=1,\quad P_{3m}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(m/2)^{2n+m}}{n!\,(m+n)!}e_j^{2n},\quad m\geqslant 1.$$

Тогда, согласно (2), будем иметь:

$$\begin{aligned} &r_j^2=\xi_j^2+\eta_j^2\quad (j=1,2),\\ &(r_1/r_2^2)\cos H=\zeta_2^3\left(r_1r_2\cos H\right),\\ &r_1r_2\cos H=(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\cos\theta+(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)\sin\theta,\\ &\theta=\lambda_1-\lambda_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку из (3) следует, что $M_1=(p+1)\,\theta-S_1$, $M_2=p\theta-S_2$, то, полагая $\zeta_j=\mathrm{Re}\left(z_{3_j}\right)$, представим (5) в виде

$$\begin{aligned} z_{l_j} &= a_j^{q_l}\sum_{m=0}^{\infty}(k_j-ih_j)^m P_{lm}(k_j^2+h_j^2)\times\\ &\times\exp\left[im\left(p+2-j\right)\theta\right], \end{aligned} \tag{7}$$

$$q_l=3l-l^2-1\quad \left(l=\overline{1,3};\ j=1,2\right).$$

Если учесть далее, что

$$\begin{aligned} &\partial_n\left(R_1=1/\Delta\right)=-R_1^3\left(\partial_nR^*\right),\\ &\partial_n^2R_1=3R_1^5\left(\partial_nR^*\right)^2-R_1^3\partial_n^2R^*\quad (n=1,2),\\ &\partial_1\partial_2\left(R_1\right)=3R_1^5\left(\partial_1R^*\right)\left(\partial_2R^*\right)-R_1^3\left(\partial_1\partial_2R^*\right),\dots\\ &(\partial_1=\partial/\partial k_j,\quad \partial_2=\partial/\partial h_j;\quad j=1,2),\\ &R_1=\left(2R^*\right)^{-1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\xi_j^2+\eta_j^2)-(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\cos\theta-\\ &-(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)\sin\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

то вычисление коэффициентов ряда (4), определяемых в точке (k_{j0},h_{j0}), сводится, согласно (6), (7), к определению вещественных и мнимых частей выражений вида

$$\partial_n^m z_{l_j}\quad \left(n,j=1,2;\ \ l=\overline{1,3}\right),\quad m=0,1,2,\dots, \tag{9}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \partial_n z_{l_j} &= a_j^{q_l}\left\{c_n\sum_{m=0}^{\infty}(k_j-ih_j)^m P'_{lm}\exp\left[imc_{pj}\theta\right]+\right.\\ &\left.+\sum_{m=1}^{\infty}c'_n m\,(k_j-ih_j)^{m-1}P_{lm}\exp\left[imc_{pj}\theta\right]\right\},\\ \partial_n^2 z_{l_j} &= a_j^{q_l}\left\{s_l\sum_{m=1}^{\infty}(k_j-ih_j)^{m-1}\left[\left(2P'_{lm}+c_n^2P''_{lm}\right)\times\right.\right.\\ &\left.\times(k_j-ih_j)+2c_nc'_nmP'_{lm}\right]\exp\left[imc_{pj}\theta\right]+\\ &\left.+\sum_{m=2}^{\infty}(c'_n)^2m(m-1)(k_j-ih_j)^{m-2}P_{lm}\exp[imc_{pj}\theta]\right\}. \end{aligned}$$

Здесь $c_1=2k_j$, $c_2=2h_j$, $c'_1=1$, $c'_2=-i$, $c_{pj}=p+2-j$, $s_2=s_3=0$, $s_1=2P'_{10}+c_n^2P''_{10}$, $(j,n=1,2)$, штрихом отмечены частные производные $(\partial/\partial k_j^2,\ \partial/\partial h_j^2)$ по аргументу полиномов P_{lm}. В частности, для коэффициентов $R_{k_j}=\tilde R_1$, $R_{h_j}=\tilde R_2$ ряда (4) нетрудно получить следующие представления:

$$\begin{aligned} \partial_nR^* &= \left[\xi_j-\xi_{3-j}\cos\theta+(-1)^j\eta_{3-j}\sin\theta\right]\partial_n\xi_j+\\ &+\left[\eta_j-\eta_{3-j}\cos\theta+(-1)^j\,\xi_{3-j}\sin\theta\right]\partial_n\eta_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_nR_2 &= \zeta_2^2\Big\{3\partial_n\zeta_2\left[\cos\theta(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)+\right.\\ &\left.+(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)\sin\theta\right]+\\ &+\zeta_2\Big[\partial_n\xi_j\left(\xi_{3-j}\cos\theta-(-1)^j\,\eta_{3-j}\sin\theta\right)+\\ &+\partial_n\,\eta_j\left(\eta_{3-j}\cos\theta+\ (-1)^j\,\xi_{3-j}\sin\theta\right)\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\tilde R_n=-\left(R_1^3\partial_nR^*+\partial_nR_2\right)|_{k_{j0},h_{j0}},\quad (n=1,2),$$

$$\partial_1=\frac{\partial}{\partial k_j},\quad \partial_2=\frac{\partial}{\partial h_j},\quad j=1,2\quad (\partial_1\zeta_2=0\ \text{при}\ j=1).$$

Выражения (9), а следовательно, и величины, входящие в правые части (10), при фиксированной кратности резонанса p зависят помимо (k_{j0},h_{j0}) от a_j $(j=1,2)$ и $\theta=\lambda_1-\lambda_2$, причем, как следует из (6) и (7), по θ зависимость 2π-периодическая. Следовательно, после усреднения гамильтониана (2) по θ

(или исключения короткопериодических слагаемых с помощью асимптотических методов):

$$F^* = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F\, d\theta \qquad (11)$$

коэффициенты ряда (4), вычисляемые в точке (k_{j0}, h_{j0}), будут зависеть при фиксированном p лишь от больших полуосей a_j гравитирующих тел P_j, как и в классическом случае разложения возмущающей функции в окрестности e_j=0 $(j=1,2)$.

При $k_{20}=h_{20}=0$ $(e_{20}=0)$ в рамках ограниченного варианта задачи в случае, когда разложение возмущающей функции R ведется в окрестности нулевого эксцентриситета e_2 возмущающего тела P_2 («астероидная проблема»), выражения (4), (7)–(10) заметно упрощаются [8]. В этом случае из (7)–(10), в частности, следует, что слагаемое R_2 в (2) после усреднения (11) по θ вносит ненулевой вклад в коэффициенты R_{k_1}, R_{h_1} тейлоровского ряда (4) лишь при $m=1$ и $p=-2$ (что, согласно (1), формально соответствует внешнему варианту задачи), а в коэффициентах R_{k_2}, R_{h_2} отличные от нуля слагаемые, обусловленные слагаемым R_2 возмущающей функции R, отвечают условию $m=(p-1)/(1+p)$ в (7) и (9), т. е. $m=0$ при $p=1$, $m=3$ при $p=2$, $m=2$ при $p=3$.

В общем случае $(e_{20}\neq 0)$ после усреднения по θ ненулевые слагаемые в R_{k_1}, R_{h_1}, определяемые функцией R_2, отвечают условию вида $\pm np = m\pm 1$ $(j=1,2)$, где $n=\{0\div(m+1)\}$, $m\in N$ (n — целое число), p — кратность линдбладовского резонанса.

Если ограничиться в (4) величинами первой степени по k_j-k_{j0} и h_j-h_{j0}, т. е. пренебречь в гамильтониане (2) слагаемыми порядка $O[\mu(k_j-k_{j0})(h_j-h_{j0})]$ $(k_j, h_j \propto e_j;\ i,j=1,2)$ и выше и ввести аналогично тому, как это сделано в работе [9], «резонансную расстройку»

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_0 \leqslant O\left[\sqrt{\mu}\right], \qquad (12)$$

где $\Delta_1 = -\frac{p}{p+1}\alpha_2'\sqrt{a_2}$, $\alpha_2' = \alpha_2\Big/\sqrt{1+\mu\alpha_2}$, Δ_0 соответствует большой полуоси a_{20}, отвечающей точной соизмеримости, то после разложения в окрестности a_{j0} $(j=1,2)$ функций F_0, $\bar R = \left\{R_0, R_{k_j}, R_{h_j}\right\}$ в формальный ряд Тейлора по степеням Δ вида

$$F_0 = A_1 + A_2\Delta^2 + \ldots, \quad \bar R = \bar R\,(a_{10}, a_{20}) + \bar R'\Delta + \ldots .$$

для гамильтониана (2) получим с указанной выше точностью следующее представление:

$$F = A_0 + A_2\Delta^2 + \mu'\sum_{j=1}^{2}\left[R^0_{k_j}k_j + R^0_{h_j}h_j\right]. \qquad (13)$$

Здесь

$$A_0 = A_1 + \mu'\left\{R_0\,(a_{10}, a_{20}) - \sum_{j=1}^{2}\left[R^0_{k_j}k_{j0} + R^0_{h_j}h_{j0}\right]\right\},$$

$$R^0_{k_j} = R_{k_j}\,(a_{10}, a_{20}), \quad R^0_{h_j} = R_{h_j}\,(a_{10}, a_{20}) \quad (j=1,2),$$

а выражения для коэффициентов A_1, A_2 приведены в работе [9].

Учитывая далее, что

$$R^0_{k_j}e_j\cos S_j + R^0_{h_j}e_j\sin S_j = R^*_{0j}e_j\cos\left(S_j - S^*_{0j}\right), \qquad (14)$$

гамильтониан (13) можно преобразовать к виду

$$F = A_0 + A_2\Delta^2 + \mu'\sum_{j=1}^{2}R^*_{0j}e_j\cos\left(S_j - S^*_{0j}\right) \quad (j=1,2), \qquad (15)$$

аналогичному (с точностью до аддитивной замены $S^*_j = S_j - S^*_{0j}$) приведенному в работе [9] для случая малых эксцентриситетов.

Следовательно, получение в рассматриваемом случае аналитического решения, описывающего эволюцию орбитальных элементов гравитирующих тел P_j $(j=1,2)$, также сводится, по существу, к интегрированию канонической системы с одной степенью свободы относительно переменных x, y, решение которой представимо в $\wp$-функциях Вейерштрасса:

$$x = \frac{1}{2b_1}\left\{\wp\,(\tau+w) + \wp\,(\tau-w) - b_2\right\},$$

$$y = -\frac{i}{2b_1}\left\{\wp\,(\tau+w) - \wp\,(\tau-w)\right\}, \qquad i^2=-1.$$

Здесь b_1, b_2 — постоянные, по которым определяются вещественные инварианты $\wp$-функции, τ — линейная функция времени, w — комплексная постоянная, однозначно определяемая в основном параллелограмме периодов из условий $\wp\,(2w) = b_2/2$, $\wp'\,(2w) = -ib_1^2/2$ $(i^2=-1)$. Орбитальные элементы a_j, e_j, $\bar\omega_j$ оскулирующих орбит тел P_j $(j=1,2)$ непосредственно определяются по переменным x, y и выражаются через эллиптические функции Вейерштрасса [10], при этом лишь следует учитывать, что переход, согласно (14), от S_j к $S^*_j = S_j - S^*_{0j}$ эквивалентен замене в правой части (3) $\bar\omega_j$ на $\bar\omega_j - S^*_{0j}$ $(j=1,2)$.

Аналитическое решение в рамках неограниченного варианта задачи в отличие от идеализированного ограниченного варианта формально не предполагает разграничений между внутренним $(n_1 > n_2)$ и внешним $(n_1 < n_2)$ вариантами задачи, поскольку изначально всегда можно фиксировать исследуемые гравитирующие тела так, чтобы удовлетворялось неравенство (1). В случае ограниченного варианта задачи при $n_1 < n_2$, т. е. для внешнего варианта, когда материальная точка P_1 пассивно гравитирует в поле тел P_0 и P_2, в неравенстве (1) и далее следует формально положить $p=-1-p$.

Учет сжатия центрального тела

Как известно, резонансные явления широко распространены в спутниковых системах больших планет. Динамическая эволюция этих систем может быть достаточно корректно исследована при выборе модели центрального тела P_0 в виде гидростатически равновесного осесимметричного тела. В связи с этим рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек P_j с массами $m_j = \mu\alpha_j$ $(j = 1, 2;\ \mu \ll 1)$, гравитирующих в поле центрального тела P_0 так, что движения P_1 и P_2 происходят в плоскости его экватора. Массу тела P_0 примем за единицу, а гравитационный потенциал P_0 в прямоугольной системе координат с началом, совмещенным с его центром масс, определим в виде

$$U = \frac{1}{r}\left(1 + U'\right), \quad U' = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(r_0/r\right)^{2n} J_{2n} \tilde{P}_{2n}(0). \tag{16}$$

Здесь r_0 — экваториальный радиус тела P_0, J_{2n} — коэффициент зональной гармоники порядка $2n$, $\tilde{P}_{2n}$ — полином Лежандра одноименного порядка, единица времени выбрана так, чтобы гравитационная постоянная обратилась в единицу.

Если ограничиться далее в (15) зональной гармоникой J_4 $(J_4 \ll 1)$ и обозначить через $\chi = J_2 r_0^2/2$ коэффициент сжатия тела P_0 $(\chi \ll 1)$, то выражение для гамильтониана F рассматриваемой задачи будет отличаться от (2) лишь добавлением слагаемого вида $\hat{R} = \chi \sum\limits_{j=1}^{2} \alpha_j (r_j^{-3} - 3r_0^2 J_4/4J_2 r_j^5)$. Как следует из (5), для $\hat{R}$ имеем:

$$\hat{R} = \chi \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \zeta_j^3 \left(1 - 3r_0^2 J_4 \zeta_j^2/(4J_2)\right) \tag{17}$$

и, согласно [5], заключаем, что добавление в исходный гамильтониан системы слагаемого, обусловленного сжатием тела P_0, не изменяет области абсолютной сходимости полного гамильтониана F.

Вводя обозначения

$$\tilde{R}_{1(2)} = \hat{R}_{k_j(h_j)}, \quad \tilde{R}_{11(22)} = \hat{R}_{k_j k_j (h_j h_j)},$$

$$\partial_{1(2)} = \frac{\partial}{\partial k_j\,(h_j)}, \quad \zeta_{j0} = \zeta_j\left(k_{j0}, h_{j0}\right), \quad J' = \frac{5}{4} r_0^2 \frac{J_4}{J_2},$$

для коэффициентов разложения (16) в ряд вида (4) получим

$$\hat{R}_0 = \hat{R}\left(k_{j0}, h_{j0}\right), \quad \tilde{R}_n = 3\chi\alpha_j \zeta_{j0}^2 \left(\partial_n \zeta_{j0}\right)\left(1 - J'\zeta_{j0}^2\right),$$

$$\tilde{R}_{nn} = 3\chi\alpha_j\zeta_{j0}\left\{\zeta_{j0}\partial_n^2\zeta_{j0}\left(1 - J'\zeta_{j0}^2\right) + \right.$$
$$\left. + 2\left(\partial_n\zeta_{j0}\right)^2\left(1 - 2J'\zeta_{j0}^2\right)\right\},$$

$$\hat{R}_{k_j h_j} = 3\chi\alpha_j\zeta_{j0}\left\{\zeta_{j0}\left(1 - J'\zeta_{j0}^2\right)\left(\partial_1\partial_2\zeta_{j0}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\left(1 - 2J'\zeta_{j0}^2\right)\left(\partial_1\zeta_{j0}\right)\left(\partial_2\zeta_{j0}\right)\right\},$$

....

или, согласно (11), после усреднения по θ:

$$\hat{R}_0 = \chi \sum_{j=1}^{2} \frac{\alpha_j}{a_j^3}\left(1 - e_{j0}^2\right)^{-3/2} \times$$
$$\times \left[1 - \frac{3}{5}\frac{J'}{a_j^2}\left(1 + \frac{3}{2}e_{j0}^2\right) \Big/ \left(1 - e_{j0}^2\right)^2\right],$$

$$\tilde{R}_n = \frac{3}{2}\frac{\chi\alpha_j}{a_j^3} c_n \left(1 - e_{j0}^2\right)^{-5/2} \times$$
$$\times \left[1 - \frac{J'}{a_j^2}\left(2 + \frac{3}{2}e_{j0}^2\right) \Big/ \left(1 - e_{j0}^2\right)^2\right],$$

....

Здесь $c_1 = 2k_{j0}$, $c_2 = 2h_{j0}$, $e_{j0} = \sqrt{k_{j0}^2 + h_{j0}^2}$; $n, j = 1, 2$.

Так как коэффициент $\hat{R}_0$, зависящий от больших полуосей a_1 и a_2, с точностью до константы эквивалентен соответствующему слагаемому, приведенному в работе авторов [11], которая посвящена случаю малых эксцентриситетов, а $\tilde{R}_n$ $(n = 1, 2)$ учитывается аналогично представлению (13), то с рассматриваемой выше точностью получение аналитического решения, интерпретирующего орбитальную эволюцию гравитирующих тел P_j $(j = 1, 2)$ с учетом сжатия P_0, аналогично приведенному в работе [11].

Пространственный случай

В пространственном варианте задачи необходимо в пертурбационной функции (2) учитывать входящее в выражение для $\cos H$ слагаемое вида $-2\sigma^2 \sin w_1 \sin w_2$, где $w_j = \nu_j + \bar{\omega}_j$, ν_j и $\bar{\omega}_j$ — истинные аномалии и долготы перицентров орбит тел P_j $(j = 1, 2)$ соответственно, $\sigma = \sin(\Delta i/2)$, Δi — взаимное наклонение оскулирующих орбит тел P_1 и P_2.

Поскольку пертурбационная функция R является функцией от $\bar{\sigma} = \sigma^2$, то разложение R целесообразно осуществлять по степеням $\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0$, т. е. по $\left(\sigma^2 - \sigma_0^2\right)$. В рассматриваемом резонансном случае, когда выполняется неравенство (1), сохраняя обозначения, аналогичные (4), для коэффициентов при вековых слагаемых, содержащих $\bar{\sigma}$, возмущающей функции (в пренебрежении «перекрестными» членами вида $\bar{\sigma}^m\left(k_j^2 + h_j^2\right)^n$; $j = 1, 2;\ m, n \in N$) имеем:

$$\begin{gathered} R_{\bar{\sigma}} = \left(2r_1 r_2 \sin w_1 \sin w_2\right)\left[r_2^{-3} - R_1^3\right], \\ \frac{1}{2}R_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} = \frac{3}{2}\left(2r_1 r_2 \sin w_1 \sin w_2\right)^2 R_1^5, \ldots, \\ \frac{1}{n!}R_{\bar{\sigma}^n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!} \times \\ \times \left(2r_1 r_2 \sin w_1 \sin w_2\right)^n R_1^{2n+1}, \ldots, \end{gathered} \tag{18}$$

причем коэффициенты (18) и R_0 в (4) должны быть вычислены в точке $\left(k_{j0}, h_{j0}, \bar{\sigma}_0\right)$. Если воспользоваться представлениями (5), (6) и положить $\theta_1 = \theta$,

$\theta_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, то нетрудно установить, что справедливо выражение

$$r_1 r_2 \sin w_1 \sin w_2 = \sum_{j=1}^{2} \left[\left(\eta_1\eta_2 - (-1)^{j+1}\xi_1\xi_2 \right) \cos\theta_j + \right.$$
$$\left. + \left(\xi_1\eta_2 + (-1)^j \xi_2\eta_1 \right) \sin\theta_j \right]. \quad (19)$$

Таким образом, вычисление коэффициентов $R_{\bar\sigma^n}$ сводится, как и при $\sigma = 0$, к определению правых частей (7), однако усреднение этих коэффициентов следует проводить не только по $\theta_1 = \theta$, но и по $\theta_2 = \lambda_1 + \lambda_2$:

$$\langle R^n_{\bar\sigma} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_0^{2\pi} R_{\bar\sigma^n}\, d\theta_1 d\theta_2. \quad (20)$$

После усреднения (19), как нетрудно видеть из (17), ненулевые слагаемые в $R_{\bar\sigma}$, вызванные наличием «косвенного члена» R_2 возмущающей функции (2), также отвечают условию (13), а в случае ограниченного варианта задачи, когда $e_{20} = 0$, из (5) и (17) непосредственно следует, что ненулевая составляющая $\langle R_{\bar\sigma} \rangle$, обусловленная функцией R_2, появляется лишь при кратности соизмеримости $p = -2$ (внешний вариант задачи), причем $\langle R_{\bar\sigma} \rangle = a_1 k_{10} \left[P_{11}\left(e^2_{10}\right) + P_{21}\left(e^2_{10}\right) \right] / a_2^2$, где P_{11}, P_{21} — полиномы, определяемые в (5).

При вычислении коэффициентов $\langle R_{\bar\sigma^n} \rangle$, а также коэффициента $\langle R_0 \rangle$ целесообразно использовать полиномы Гегенбауэра (или полиномы Лежандра, являющиеся частным случаем многочленов Гегенбауэра $G_m^{(n/2)}$ и совпадающие с ними при $n = 1$), определяемые как коэффициенты разложения функции $\left(1 - 2\bar\psi \cos H + \bar\psi^2\right)^{-l}$ [12] в ряд по степеням $0 < \bar\psi < 1$. Тогда, полагая в рассматриваемом случае $\bar\psi = r_1/r_2$, $l = n/2$ $(n \in \mathbb{N})$, $\cos H = (1 - \bar\sigma)\cos(w_1 - w_2) + \bar\sigma \cos(w_1 + w_2)$, согласно (2) и (5), получим

$$(R_1)^n = (\zeta_2^n) \sum_{m=0}^{\infty} \bar\psi^m G_m^{(n/2)}(\cos H).$$

Используя (5) и классическое разложение для уравнения центра в тригонометрический ряд по кратным средней аномалии [6], на основании (19) с заданной точностью достаточно просто можно провести численное усреднение (20) и определить искомые коэффициенты разложения возмущающей функции задачи.

После определения коэффициентов разложения возмущающей функции, удержания в R векового слагаемого первого порядка по $(\sigma^2 - \sigma_0^2)$ и проведения далее преобразований вида (12)–(15) получение аналитического решения для элементов a_j, e_j, $\bar\omega_j$, Ω_j, $\bar\sigma$ оскулирующих орбит гравитирующих тел P_j $(j = 1, 2)$ сведется к случаю, рассмотренному в работе [9].

Заключение

Проведенное выше рассмотрение основано на неограниченном планетном варианте задачи, в котором массы тел P_j сопоставимы по величине, так что $m_j = \mu\alpha_j$ $(\mu \ll 1)$, $j = 1, 2$. Но, как видно, полученные результаты непосредственно распространяются и на случай ограниченного варианта задачи, когда одно из тел (например, P_1) пассивно гравитирует в поле центрального тела P_0 и возмущающего тела P_2.

В ряде случаев движение динамической системы может происходить вблизи «стационарных решений». При этом, очевидно, величины k_{j0}, h_{j0}, $\bar\sigma_0$ целесообразно выбирать совпадающими со стационарными решениями системы, например, можно положить $S_{j0} = \{0, \pi\}$, т.е. $h_{j0} = 0$ $(j = 1, 2)$.

И наконец, следует отметить, что поскольку структура полученного аналитического решения аналогична соответствующему случаю малых эксцентриситетов и наклонений, то качественные исследования аналитического решения, проведенные в работах [13, 14], сохраняют свою силу и для рассмотренного в данной работе случая больших эксцентриситетов и наклонений.

Применение полученного аналитического решения к конкретным небесно-механическим системам будет рассмотрено в следующих работах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-17744).

Литература

1. *Антонов В.А., Чернин А.Д.* // Письма в Астрон. журн. 1993. **19**, № 8. С. 768.
2. *Henrard J., Caranicolas N.* // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1990. **47**. P. 99.
3. *Engels J., Henrard J.* // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1994. **58**. P. 215.
4. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991.
5. *Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 6. С. 60 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 6).
6. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.
7. *Jarnagin M.* // Astron. Papers Amer. Ephem. 1965. **18**, No. 36. P. 659.
8. *Ferraz-Mello C., Sato M.* // Astron. Astrophys. 1989. **225**. P. 541.
9. *Мушаилов Б.Р.* // Астрон. вестн. 1995. **29**, № 1. С. 47.
10. *Мушаилов Б.Р.*// Астрон. вестн. 1995. **29**, № 4. С. 375.
11. *Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р.* // Астрон. вестн. 1995. **29**, № 1. С. 67.
12. *Аксенов Е.П.* Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986.
13. *Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р., Ракитина Н.В.* // Астрон. вестн. 1994. **28**, № 4–5. С. 186.
14. *Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р.* // Астрон. вестн. 1995. **29**, № 1. С. 58.

Поступила в редакцию
12.05.00