

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

На правах рукописи
УДК 534.2 : 517.9

АЛЕКСЕЕНКО Николай Васильевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МЕТОДОВ
РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ**

Специальность: 01.04.06 – акустика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре акустики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Валентин Андреевич БУРОВ

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Петр Георгиевич ГРИНЕВИЧ,
Институт Теоретической физики им. Л.Д.Ландау

кандидат физико-математических наук,
ассистент Иван Михайлович ПЕЛИВАНОВ,
физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова

Ведущая организация: Институт проблем управления
Российской Академии наук, г.Москва

Защита диссертации состоится “ 19 ” июня 2008 г. в 16-00 часов на заседании Специализированного Совета Д.501.001.67 в МГУ им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, МГУ, физический факультет, Центральная физическая аудитория им. Р.В.Хохлова.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке физического факультета МГУ им М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан “ 15 ” мая 2008 г.

Ученый секретарь
Специализированного Совета Д.501.001.67
кандидат физико-математических наук

А.Ф. КОРОЛЕВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Решение обратных волновых задач представляет собой активно развивающееся направление как математической, так и прикладной физики (акустики и оптики). В акустике под обратными волновыми задачами понимается восстановление источников звука (обратная задача излучения) или характеристик неоднородностей, рассеивающих первичное поле (обратная задача рассеяния), по измерениям акустического поля. Наиболее актуальными направлениями применения на практике результатов разработок в теории обратных задач рассеяния являются медицинская диагностика и акустика океана. Проблемам разработки медицинских акустических томографов, решающих задачу ранней диагностики, более безопасных, чем рентгеновские, и менее дорогостоящих, чем ЯМР-томографы, посвящено в последнее время большое количество как теоретических, так и экспериментальных исследований. Помимо медицинских приложений, результаты исследований различных обратных задач рассеяния имеют широкое применение в задачах создания систем промышленной диагностики (дефектоскопии), решения прикладных проблем геоакустики и акустики океана.

Существует два крупных класса подходов к решению обратной задачи рассеяния, один из которых основан на итерационных методах, а другой – на методах функционального анализа. Преимуществом итерационных методов является то, что они могут базироваться на фрагментарных данных, полученных при различной геометрии эксперимента, различных частотах. В этих методах не накладывается жестких требований на полноту данных рассеяния отдельно для каждой из частот или каждой конфигурации падающего поля в эксперименте, любая априорная и апостериорная информация может быть также использована. Основные же преимущества функционального подхода заключаются как в получении строгого (или почти строгого) решения, так и (в ряде случаев) в меньшем количестве вычислительных операций, по сравнению с итерационными методами.

Функционально-аналитические методы имеют свои корни в математических и физико-теоретических работах, исследовавших процессы квантовой теории рассеяния и, соответственно, решения прямых и обратных задач потенциального рассеяния. В силу ряда принципиальных отличий природы потенциального рассеяния в квантовой механике и рассеяния волн на неоднородностях фазовой скорости, такие методы не всегда применимы в полной мере к обратным задачам акустики. Однако в последние годы наблюдается стремление разработать общие подходы, пригодные для решения обратных задач рассеяния различной физической природы (как квантово-механических, так и акустических, электродинамических, эластодинамических), в том числе изоэнергетических (монохроматических) обратных задач. Проведенные исследования опираются на методы

функционального и многомерного комплексного анализа и отличаются высокой математической строгостью.

Анализ возможности применения на практике разработанных в последние десятилетия функционально-аналитических методов решения двумерных обратных задач рассеяния был подробно проведен в последнее время в работах сотрудников кафедры акустики физического факультета МГУ. Созданы работоспособные компьютерные программы, позволяющие достаточно быстро восстанавливать двумерные рассеиватели любой формы по данным рассеяния на основе функционально-аналитического двумерного монохроматического алгоритма Новикова-Гриневича [1, 2, 3], и показано, что область работоспособности этого алгоритма реально намного больше, чем первоначально предполагалось [4]. Тем не менее, при увеличении силы рассеяния, на модельных численных решениях двумерных задач наблюдалось возникновение неустойчивости и повышенной чувствительности к ошибкам в данных рассеяния. Основная и принципиальная причина этого явления кроется в избыточности данных рассеяния для двумерной монохроматической задачи. А именно, массив таких данных соответствует двумерной параметрической области углов падения и рассеяния $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. Той же размерностью характеризуется искомая двумерная неоднородность конечных размеров. Отсутствие размерностной избыточности данных для монохроматической задачи определяет более ограничительный характер условий многочисленных теорем и утверждений относительно единственности решения таких задач [5, 6].

Импульсный, или, во многом эквивалентный ему, многочастотный режим снимает это ограничение (поскольку в параметризации данных рассеяния появляется дополнительное измерение – частота). Однако простое аддитивное объединение множества решений монохроматических задач не является эффективным методом и не эквивалентно решению *единой* задачи, в котором используется факт общности рассеивателя для каждой монохроматической задачи. Поэтому необходим более полный метод объединения решений, который не лежит «на поверхности» и нуждается в дополнительном исследовании.

Обратные задачи рассеяния в трех измерениях обладают размерностной избыточностью даже в монохроматическом случае. Поэтому проблемы обеспечения единственности, свойственные двумерной задаче, здесь не возникают [6, 7]. В настоящее время основным методом синтеза трехмерных акустических томограмм является простое объединение послойных двумерных изображений. В этом методе пренебрегается «обменом» рассеянными полями между слоями. Между тем, ошибки, вызываемые этим пренебрежением, имеют порядок второго борновского члена (при разложении рассеянного поля в ряд Борна-Неймана), т.е. достаточно существенны.

Строгое решение трехмерной обратной задачи рассеяния функциональными методами не удается получить простой модификацией двумерных алгоритмов, что требует разработки новых методов решения.

Результаты этих исследований появились в самое последнее время, но их практическая пригодность в акустических системах отнюдь не очевидна, а требуемый объем вычислений в настоящее время представляется чрезвычайно большим. Тем не менее, быстрый прогресс в данной области позволяет поставить вопрос о первых попытках реализации этих новых подходов при решении трехмерных обратных задач акустического рассеяния (хотя бы самых простых). Любой способ решения обратных задач рассеяния на практике требует детального исследования алгоритмов восстановления рассеивателей с целью их наилучшего функционального и технического согласования с измерительной установкой (томографом), методом получения первичных данных рассеяния и способами отображения итоговых результатов. При этом с одной стороны, функциональные методы являются наиболее продвинутыми и мощными в теоретическом и принципиальном плане, а с другой стороны, их применение для решения обратных задач рассеяния классических полей находится только в начальной стадии исследования, что делает несомненно важным дальнейшее продвижение в этом направлении. Поэтому *актуальность* представляемой работы заключается в создании метода решения единой акустической многочастотной двумерной задачи томографического типа, основанной на функциональном подходе. Это открыло возможность применения данного метода для импульсного режима медицинских томографов, повысив, тем самым, информативность и расширив область их работоспособности. Вторая часть работы носит исключительно пионерский характер и открывает цикл исследований по применению в решении трехмерных обратных задач акустического рассеяния строгих функциональных методов их решения. Эти исследования направлены, в конечном счете, на создание трехмерных систем акустоскопии принципиально нового типа.

Можно выделить следующие основные **цели диссертационной работы**:

1. Найти и апробировать на численных моделях метод органичного объединения многочастотных данных и методов решения множества монохроматических двумерных обратных задач акустического рассеяния в виде единого функционального алгоритма, базирующегося на монохроматических вариантах решения, развитых в работах С.П.Новикова, Л.Д.Фаддеева, П.Г.Гриневича, С.В.Манакова и включающих последние результаты Р.Г.Новикова.
2. Реализовать и апробировать на простейших моделях функциональный метод решения обратной трехмерной задачи акустического рассеяния, основываясь на результатах исследований и алгоритмах Г.М.Хенкина и Р.Г.Новикова.
3. Провести сравнительную оценку практической области работоспособности указанных подходов.

Задачи диссертационной работы можно разбить на две группы.

По первой части работы (немонохроматическому двумерному функциональному алгоритму):

1. Найти метод объединения последовательности операций при решении монохроматических частных задач в единый взаимосвязанный процесс.
2. Продемонстрировать расширение области работоспособности немонохроматического двумерного алгоритма решения обратной задачи акустического рассеяния по сравнению с простой суммой монохроматических решений.
3. Оценить вычислительную сложность алгоритмической реализации этого метода и физические ограничения на область его применимости.
По второй части работы (трехмерным функциональным алгоритмам) задачи соответствуют начальному этапу исследований:
4. Реализовать трехмерные функциональные алгоритмы в виде конкретных работающих программ и исследовать с их помощью восстановление характерных рассеивателей простейшей формы.
5. Оценить возможности и перспективы реализации этих алгоритмов для практических целей.

Научная новизна работы

1. Поставлена не рассматривавшаяся ранее задача поиска методов объединения не взаимосвязанных решений множества монохроматических задач акустического рассеяния в единый процесс согласованного использования всей совокупности данных рассеяния. Найдено обобщение двумерного метода Новикова-Гриневича и модифицированного метода Новикова на немонохроматический случай.
2. Проведен цикл модельных исследований возможностей предложенного метода решения полихроматической обратной задачи томографического типа. Полученные результаты позволяют прийти к выводу о перспективности использования модифицированного полихроматического двумерного алгоритма Новикова для прикладных задач акустического томографирования медицинской направленности. Полихроматический алгоритм более устойчив и информативен, чем результат аддитивного синтеза одночастотных решений при тех же исходных данных.
3. Впервые выполнена конкретная реализация математических алгоритмов решения трехмерной обратной задачи акустического рассеяния и проведено исследование возможностей этих методов на примерах различных модельных задач на основе алгоритмов Новиокова-Хенкина и нового алгоритма Новикова.
4. Проведен цикл численных модельных экспериментов, продемонстрировавший широкие возможности нового функционально-аналитического трехмерного алгоритма Новикова и выявивший его работоспособность для рассеивателей произвольной силы.

Достоверность результатов, представленных в диссертации, подтверждается решением обратных модельных задач, давших оценки, близкие

к исходным характеристикам двумерных и трехмерных рассеивателей, использованным при синтезе тестовых данных рассеяния.

Практическая ценность работы:

1. Показана практическая реализуемость и широкие прикладные возможности предложенного обобщения двумерного функционально-аналитического метода на немонохроматический случай, что открывает возможность его применения в реальных ультразвуковых томографах, работающих в импульсном или многочастотном режиме.
2. Показана практическая реализуемость алгоритма решения трехмерной монохроматической обратной задачи, а также возросшая устойчивость решения по сравнению с двумерной задачей, что позволяет говорить о практической перспективности данного направления, требующего, однако, высокой производительности используемых вычислительных средств.
3. На численных примерах исследована помехоустойчивость перечисленных алгоритмов, которая оказалась достаточно высокой для практических целей медицинской диагностики.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Совокупность отдельных (независимых) процедур решения монохроматических обратных задач акустического рассеяния может быть объединена предложенным в диссертации образом во взаимосвязанный единый процесс поиска решения, приспособленного для применения в акустических томографических системах, работающих в импульсном режиме. Результат такого объединения – возросшая информативность и помехоустойчивость томограмм.
2. Трехмерная обратная задача рассеяния имеет практически реализуемый и промоделированный в диссертации путь решения, учитывающего всю сложность многократного рассеяния сильными неоднородностями, пригодный к практическому применению в системах акустоскопии, снабженных многоэлементной приемно-излучающей системой и высокопроизводительными вычислительными устройствами.

Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на конференции «Ломоносов-2004» (Москва, апрель 2004), XV сессии Российского Акустического Общества (Нижний Новгород, ноябрь 2004), конференции «Ломоносов-2007» (Москва, апрель 2007), XIX сессии Российского Акустического Общества (Нижний Новгород, сентябрь 2007) и семинарах кафедры акустики физического факультета МГУ.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в семи работах (две из них – в рецензируемых журналах), список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы, включающего 108 наименований. Общий объем работы составляет 155 страниц, включая 130 страниц текста и 23 рисунка.

Личный вклад автора заключается в проведении физического анализа основных методов решения обратной задачи акустического рассеяния в двумерном и трехмерном пространстве, позволившего найти органичное объединение монохроматических методов в единый процесс нахождения полихроматического решения, в анализе физического смысла операций многошагового процесса решения трехмерной обратной задачи и в разработке конкретных численных схем всех обсуждаемых в работе подходов и их конкретной реализации. Большинство работ по моделированию и анализу полученных результатов проведены им лично.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первой главе** (введении) обсуждается актуальность темы диссертационной работы, определяются ее цели, формулируется постановка задач, излагаются результаты диссертации, выносимые на защиту. Приведена краткая характеристика научных работ по теме, также кратко описана история и специфика существующих функциональных методов решения обратной задачи рассеяния, рассказано о работах по моделированию таких методов.

Вторая глава состоит из шести разделов и посвящена решению двумерной обратной акустической задачи рассеяния в полихроматическом режиме.

В **разделе 2.1** приводится общая характеристика основных понятий, уравнений и обозначений, принятых в современной литературе, посвященной решению обратных задач методами функционального анализа.

В первой части раздела описана процедура формального распространения действительных волновых векторов падающего и рассеянного полей на область комплексных значений при заданной ориентации их действительных и мнимых частей. Решение монохроматической обратной задачи рассеяния заключается в восстановлении функции рассеивателя

$$v(\mathbf{r}, \omega) = \omega^2 (c_0^{-2} - c^{-2}(\mathbf{r})) - 2i\omega\alpha(\mathbf{r}, \omega)/c(\mathbf{r}),$$

где c_0 – скорость звука в однородном непоглощающем фоне, а неоднородность характеризуется отклонением скорости звука $c(\mathbf{r})$ и амплитудного

коэффициента поглощения $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ внутри области рассеяния от их значений в фоновой среде. Падающая плоская монохроматическая волна описывается волновым вектором $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$, рассеянная волна в дальней зоне – волновым вектором $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$, где $\mathbf{k}^2 = \mathbf{l}^2 = k_0^2$, n – размерность пространства; $k_0 = \omega/c_0$. Для решения поставленной задачи проводится (следуя методу Л.Д.Фаддеева [8, 9]) формальное распространение волновых векторов на область комплексных значений $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^n$, считая, что $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}_R + i\mathbf{l}_I$. При таком переходе остается справедливым соотношение $\mathbf{k}^2 = \mathbf{l}^2 = k_0^2$, где $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^n$, что означает одновременное выполнение следующих условий:

$$\mathbf{k}_I \perp \mathbf{k}_R, \quad \mathbf{k}_R^2 - \mathbf{k}_I^2 = k_0^2; \quad \mathbf{l}_I \perp \mathbf{l}_R, \quad \mathbf{l}_R^2 - \mathbf{l}_I^2 = k_0^2. \quad (1)$$

Из (1), следует, что в двумерном случае существуют только две возможные ориентации вектора $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm$, ортогонального фиксированному вектору \mathbf{k}_R (рис.1а). Взаимная ориентация векторов \mathbf{l}_R и \mathbf{l}_I аналогична.

В трехмерном случае вводится дополнительное требование

$$\mathbf{k}_I = \mathbf{l}_I. \quad (2)$$

Из (1), (2) вытекает:

$$\mathbf{k}_I \perp \mathbf{k}_R, \quad \mathbf{k}_I \perp \mathbf{l}_R, \quad |\mathbf{l}_R| = |\mathbf{k}_R|. \quad (3)$$

Поэтому \mathbf{k}_I ортогонален к плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{k}_R и \mathbf{l}_R , а, следовательно, и вектор $\mathbf{p} \equiv \mathbf{k} - \mathbf{l} = \mathbf{k}_R - \mathbf{l}_R$. Тогда количество возможных ориентаций вектора \mathbf{k}_I относительно этой плоскости становится равным двум (рис.1б), так же как в двумерном пространстве.

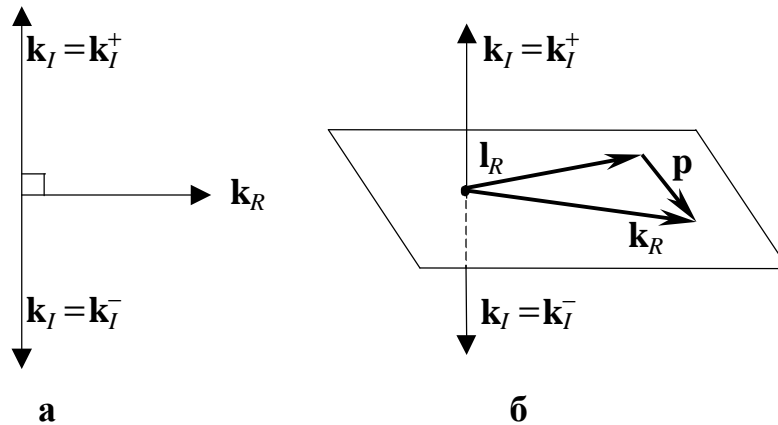


Рис.1. Ориентация взаимно-ортогональных действительной и мнимой компонент волновых векторов в двумерном (а) и трехмерном (б) случаях.

Во второй части раздела определены классическая и обобщенная амплитуды рассеяния, рассмотрены обобщенное уравнение типа Липпмана-Швингера и уравнение Фаддеева. Экспериментальными данными является классическая амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, где $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$. При переходе в область комплексных волновых векторов, она переходит в обобщенную

амплитуду рассеяния $h(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, где $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^n$. Мнимую часть волнового вектора можно представить в виде $\mathbf{k}_I \equiv |\mathbf{k}_I| \boldsymbol{\gamma}$, где $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор. При $|\mathbf{k}_I| \rightarrow 0$ предельные значения обобщенных функций зависят от направления $\boldsymbol{\gamma}$. Так, предельными значениями функции $h(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ являются $h_\gamma(\mathbf{k}_R, \mathbf{l}_R) \equiv \lim_{|\mathbf{k}_I| \rightarrow 0} h(\mathbf{k}_R + i|\mathbf{k}_I| \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{l}_R)$. Величины $h_\gamma(\mathbf{k}_R, \mathbf{l}_R) \equiv h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, где

$\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$, взаимнооднозначно связаны с $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ следующим соотношением [8]:

$$h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) + 2\pi i \int_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n} h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{m}) \Theta[(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})] \delta(\mathbf{m}^2 - \mathbf{k}^2) f(\mathbf{m}, \mathbf{l}) d\mathbf{m}, \quad (4)$$

где $\Theta[(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})]$ – функция Хевисайда, аргументом которой является скалярное произведение векторов $\mathbf{m} - \mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\gamma}$.

Поскольку как в двумерном, так и в трехмерном случае количество возможных ориентаций мнимой части \mathbf{k}_I волнового вектора \mathbf{k} равно двум, предельные значения $h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, отвечающие таким двум ориентациям, будут обозначаться как $h^+(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ и $h^-(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, соответственно.

В последующих разделах дано подробное описание, с физической точки зрения, модифицированного монохроматического двумерного алгоритма Новикова [10], и приведены соображения о возможном расширении его возможностей за счет введения немнохроматичности в алгоритм.

В разделе 2.2 показано, как дополнительно к основным уравнениям вводятся уравнения связи при использовании совокупности данных рассеяния для набора частот. При моделировании впервые применялся монохроматический модифицированный алгоритм Новикова, являющийся серьезной модификацией известного ранее алгоритма Новикова-Гриневича. Первым этапом модифицированного алгоритма является нахождение предельных значений обобщенной амплитуды рассеяния $h^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ из классических значений амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$:

$$h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) - \pi i \int_0^{2\pi} h^\pm(\varphi, \varphi''; \omega_j) \Theta[\pm \sin(\varphi'' - \varphi)] f(\varphi'', \varphi'; \omega_j) d\varphi'' = f(\varphi, \varphi'; \omega_j).$$

Данное соотношение является записью уравнений Фаддеева (4) в терминах классических углов: в двумерном пространстве волновые векторы представимы как $\mathbf{k} = \{k_{0j}, \varphi\}$ и $\mathbf{l} = \{k_{0j}, \varphi'\}$; $k_{0j} \equiv \omega_j / c_0$ – волновое число фоновой среды; ω_j – частота (в дальнейшем при введении полихроматичности $j = \overline{1, J}$; J – общее количество частот).

На втором этапе алгоритма находится классическое запаздывающее волновое поле $u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$, а точнее, модулирующая функция

$\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$. Для этого последовательно находятся несколько вспомогательных функций:

$$h^{\pm}(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \equiv h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j) \exp[ik_{0j} \{x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)\}];$$

$$Q^{\pm}(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \equiv h^{\pm}(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \Theta[\pm \sin(\varphi' - \varphi)];$$

$$B(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) =$$

$$= \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} Q^{-}(\mathbf{r}, \varphi'', \varphi'; \omega_j) \chi^{+}(\varphi - \varphi'') d\varphi'' - \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} Q^{+}(\mathbf{r}, \varphi'', \varphi'; \omega_j) \chi^{-}(\varphi - \varphi'') d\varphi'',$$

где $\mathbf{r} = \{x, y\}$; $\chi^{\pm}(\varphi) \equiv 1 / [1 - (1 \mathbf{m} 0) \exp(i\varphi)]$; и далее решается система линейных уравнений

$$\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) + \int_0^{2\pi} B(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j) d\varphi' = 1.$$

На третьем этапе из классического поля $\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$ рассчитываются предельные значения обобщенного поля $\mu^{-}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$:

$$\mu^{-}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) = \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) + \pi i \int_0^{2\pi} Q^{-}(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j) d\varphi',$$

после чего на последнем, четвертом этапе вычисляется искомая функция рассеивателя:

$$v(\mathbf{r}, \omega_j) = \frac{k_{0j}}{2\pi} \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^{2\pi} \mu^{-}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) \exp(i\varphi) d\varphi.$$

Модифицированный алгоритм Новикова сохраняет все достоинства алгоритма Новикова-Гриневича: локальность по пространственной координате \mathbf{r} , возможность получения решения безытерационным способом, учет эффектов перерассеяния; оба алгоритма имеют одни и те же пределы работоспособности. Эквивалентность оценки функции рассеивателя модифицированным алгоритмом и алгоритмом Новикова-Гриневича удобно проиллюстрировать на примере несимметричного рефракционно-поглощающего рассеивателя (рис.2), выбранного в качестве одной из моделей в [4]: восстановление с помощью обоих алгоритмов в монохроматическом режиме практически идеальное (рис.2а) благодаря учету перерассеяний. В то же время, модифицированный алгоритм имеет ряд преимуществ по сравнению с алгоритмом Новикова-Гриневича. Первое такое преимущество – меньшее число вычислительных операций. Второе – возможность восстановить классическое поле $u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$, и, как следствие, рассчитать вторичные источники $F^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv v(\mathbf{r}, \omega_j) u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$ и оценить ширину области локализации их пространственного спектра. Для упоминавшегося рассеивателя, модуль поля $|u^{\text{cl}}|$, изображенный на рис.2б для направления распространения падающей волны вдоль оси Oy (т.е. $\varphi = \pi/2$), уменьшается по мере

проникновения волны внутрь рассеивателя, главным образом, за счет достаточно сильного поглощения. Эффекты перераспределения изменяют форму пространственного спектра вторичных источников и приводят к расширению области локализации этого спектра, по сравнению со случаем борновских вторичных источников $F_{\text{born}}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$. Данное обстоятельство иллюстрируется на примере пространственных спектров, рассчитанных для центральных сечений $x=0$ вторичных источников при распространении падающей волны вдоль оси Oy (рис.2в):

$$\tilde{F}^{\text{cl}}(x=0, \xi_y; \varphi = \pi/2) \equiv \int F^{\text{cl}}(x=0, y; \varphi = \pi/2) \exp(-i\xi_y y) dy;$$

$$\tilde{F}_{\text{born}}^{\text{cl}}(x=0, \xi_y; \varphi = \pi/2) \equiv \int F_{\text{born}}^{\text{cl}}(x=0, y; \varphi = \pi/2) \exp(-i\xi_y y) dy.$$

Третьим преимуществом модифицированного алгоритма является возможность более кардинального обобщения его на полихроматический режим, также следующее из возможности найти полные классические поля на одном из этапов алгоритма. Такое обобщение впервые разработано в диссертационной работе. Рассеиватель восстанавливается на основе совокупности полихроматических данных, полученных на разных частотах ω_j . Связующим звеном является общность рассеивателя для всех частот, поэтому в решение алгоритма вводятся уравнения связи, имеющие, в простейшем случае одинаковой частотной зависимости $\text{Re } v$ (эта часть отвечает за рефракционные эффекты) и $\text{Im } v$ (ответственна за поглощение), вид

$$v(\mathbf{r}, \omega_j) / (k_{0j})^2 - v(\mathbf{r}, \omega_{j+1}) / (k_{0, j+1})^2 = 0, \quad j = \overline{1, J-1}.$$

Итогом полихроматического варианта алгоритма являются оценки $\hat{v}_{\text{poly}}(\mathbf{r}, \omega_j)$ функции рассеивателя $v(\mathbf{r}, \omega_j)$, рассчитанные для каждой из частот в отдельности. Однако, в силу введенных условий связи, отношения

$$\hat{w}_{\text{poly}}(\mathbf{r}) \equiv \hat{v}_{\text{poly}}(\mathbf{r}, \omega_j) / k_{0j}^2$$

не зависят от частоты, и получаемая далее оценка $\hat{w}_{\text{poly}}(\mathbf{r})$ будет называться полихроматической оценкой функции рассеивателя.

При подготовке диссертационной работы была впервые разработана программная реализация данного полихроматического метода. Алгебраизация монохроматического алгоритма и изменения в численной реализации алгоритма при введении немонахроматичности приведены в **разделе 2.3**.

Далее приведены решение прямой задачи для цилиндрических рассеивателей (**раздел 2.4**) и результаты восстановления полихроматическим алгоритмом (**раздел 2.5**) цилиндрических рассеивателей с заданным показателем преломления, обладающих как рефракцией, так и поглощением. Использование при численном моделировании полихроматического режима двумерных рассеивателей цилиндрической формы никак не ограничивает общности результатов их восстановления и связано только с тем, что для таких рассеивателей существует точное аналитическое решение прямой задачи, и при этом сила рассеивателя может быть сколь угодно большой.

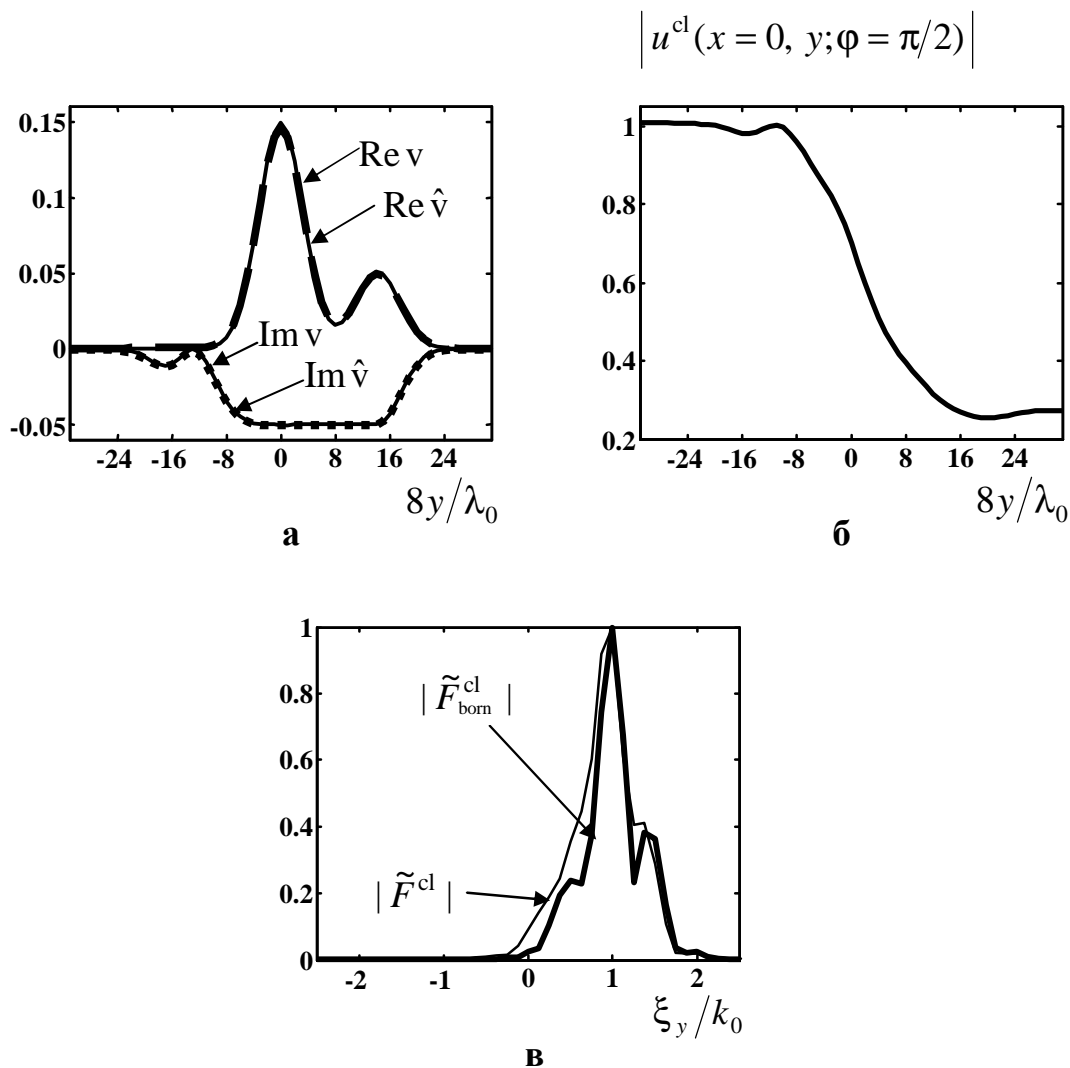


Рис.2. Несимметричный рефракционно-поглощающий рассеиватель (относительный контраст скорости $\Delta c/c_0$ изменяется в диапазоне от -0.073 до 0.15 ; максимальный дополнительный набег фазы $\Delta\psi \approx 0.35\pi$; максимальное амплитудное поглощение в рассеивателе – в 3.7раза):

- центральное сечение $x=0$ рассеивателя (а): истинный рассеиватель v (тонкие линии) и рассеиватель \hat{v} , восстановленный при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний (действительная часть – толстая пунктирная линия, мнимая часть – толстая линия в виде точек);
- центральное сечение $x=0$ абсолютных значений классического полного поля (б) при распространении падающего поля вдоль оси Oy ;
- абсолютные нормированные значения пространственного спектра для центрального сечения $x=0$ вторичных источников с учетом многократных рассеяний ($|\tilde{F}^{\text{cl}}(x=0, \xi_y; \varphi = \pi/2)|$ – тонкая линия) и в приближении однократного рассеяния ($|\tilde{F}_{\text{born}}^{\text{cl}}(x=0, \xi_y; \varphi = \pi/2)|$ – толстая линия) (в) при том же направлении падающего поля.

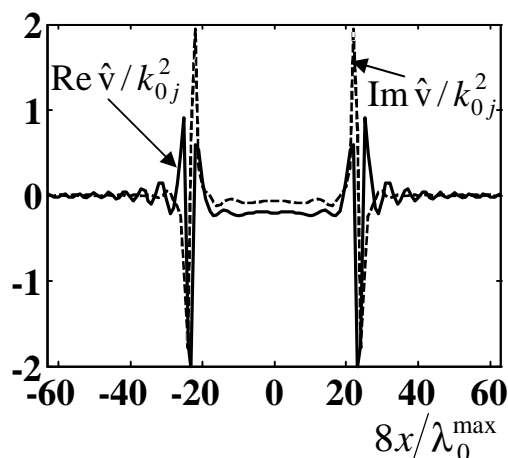
Рис.3 позволяет сравнить результат восстановления рефракционно-поглощающего цилиндрического рассеивателя в монохроматическом режиме на одной из длин волн, среднее арифметическое (по частотам) результатов восстановления в наборе монохроматических режимов и результат восстановления в полихроматическом режиме. Выяснено, что влияние рассеяния назад обобщенных волн искажает картину восстановления. Рассеянное назад поле всегда присутствует в таких рассеивателях за счет резкого изменения скорости звука на их границе. Для уменьшения его влияния обобщенная амплитуда рассеяния $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ подвергалась фильтрации по углам функцией $F(|\varphi - \varphi'|) = 0.5(1 + \cos|\varphi - \varphi'|)$, после чего в последующих шагах алгоритма везде участвовала функция $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)F(|\varphi - \varphi'|)$.

Рассеиватель на рис.3 достаточно сильный, и при его восстановлении в монохроматическом режиме появляется неустойчивость (сильные флуктуации и даже резкие выбросы на рис.3а). Полихроматическая оценка (рис.3б, слева) устраняет неустойчивость и в целом дает результат, близкий к истине. Для иллюстрации принципиальной роли уравнений связи, на рис.3б приводится, для сравнения, результат простого усреднения (в виде среднеарифметического) соответствующих монохроматических решений $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega_j)/k_{0j}^2$. Здесь и далее условно полагается $\lambda_0^{\max} = 8$ единиц дискретизации длины. Часть осцилляций в такой оценке компенсирована, по сравнению с отдельными монохроматическими решениями, однако присутствующие сильные выбросы свидетельствуют, что проблема неустойчивости решения здесь не ликвидирована.

Рис.4 демонстрирует результаты восстановления рефракционного цилиндрического рассеивателя теми же методами, что и на рис.3, но с введением зашумления. Уровень шумов брался настолько большим, что погрешности монохроматической оценки сравнимы или даже значительно превышают истинные значения функции рассеивателя (рис.4а). В этой ситуации помехоустойчивость полихроматического решения оказалась достаточно высокой: оно не только усредняет влияние случайных шумов, как это делает оценка в виде среднеарифметического монохроматических решений, но и стабилизирует решение, устраняя неустойчивость, в отличие от среднего монохроматических решений (рис.4б).

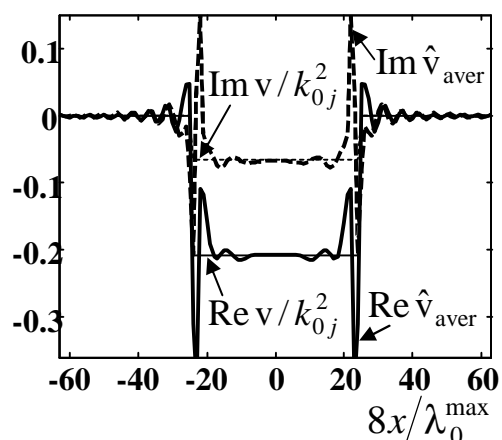
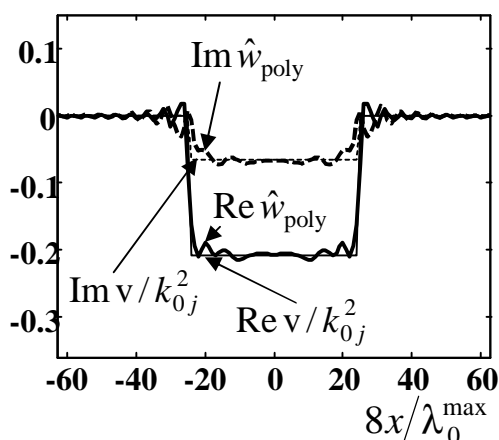
В разделе 2.6 приводятся выводы о перспективности применения полихроматического алгоритма в акустических обратных задачах. При достаточно большом количестве частот метод обеспечивает значительно более устойчивое восстановление, чем монохроматические решения или их среднеарифметическое, и предоставляет возможность органичного объединения многочастотных данных и методов решения множества монохроматических обратных задач.

$\lambda_{0j} = 7.5$ ед. дискр. длины



а

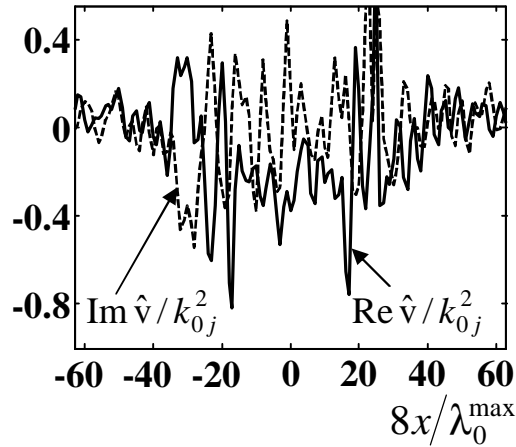
9 частот



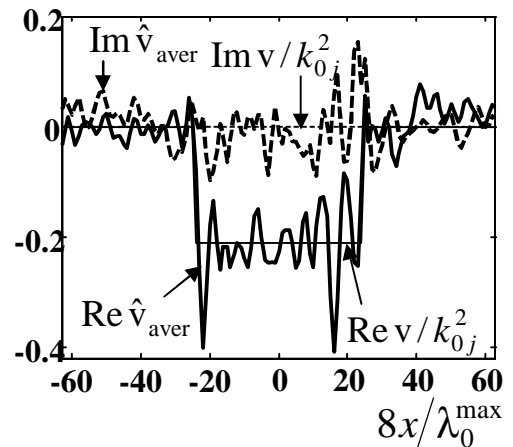
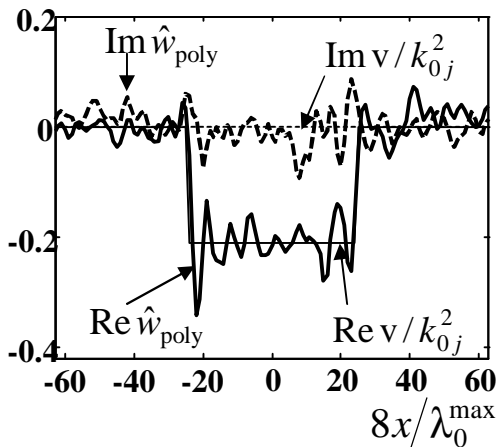
б

Рис.3. Рефракционно-поглощающий рассеиватель цилиндрической формы радиуса $a = 3\lambda_0^{\max}$ с фокусирующим контрастом скорости $\Delta c/c_0 \approx -0.09$; набег фазы $\Delta\psi \approx 1.2\pi \div 1.4\pi$ и амплитудное поглощение в рассеивателе – в $3 \div 3.6$ раза в рабочем диапазоне $\lambda_{0j} \in [7.5; 8]$ ед. дискр. длины:

- действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части монохроматической оценки рассеивателя $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega_j)/k_{0j}^2$ (а) при длине волны $\lambda_{0j} = 7.5$ ед. дискр. длины в отсутствие шумовых помех;
- полихроматическая оценка \hat{w}_{poly} (б, слева) в сравнении со среднеарифметическим значением монохроматических оценок \hat{v}_{aver} (б, справа) при использовании девяти длин волн; истинные значения v/k_{0j}^2 действительной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей рассеивателя изображены более тонкой линией соответствующего типа.



а



б

Рис.4. Рефракционный рассеиватель цилиндрической формы радиуса $a = 3\lambda_0^{\max}$ с фокусирующим контрастом скорости $\Delta c/c_0 \approx -0.09$; набег фазы $\Delta\psi \cong 1.2\pi \div 1.4\pi$ в рабочем диапазоне $\lambda_{0j} \in [7; 8]$ ед. дискр. длины. В данных рассеяния присутствует шум со стандартным амплитудным отклонением $\sigma_{ns}(\omega_j) = 0.5 \overline{f(\omega_j)}$:

- действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части монохроматической оценки рассеивателя $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega_j)/k_{0j}^2$ при $\lambda_{0j} = 7$ ед. дискр. длины в присутствии шума (а);
- полихроматическая оценка рассеивателя (б, слева) и среднеарифметическое монохроматических оценок (б, справа) при зашумленных данных; истинные значения действительной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей рассеивателя изображены более тонкой линией соответствующего типа.

Третья глава состоит из четырех разделов. В ней анализируется решение трехмерной обратной акустической задачи рассеяния алгоритмом Новикова-Хенкина [11].

В **разделе 3.1** приведены основные уравнения и обозначения алгоритма, введены необходимые приближения и упрощения, проведен анализ уравнений Фаддеева (4) для нахождения обобщенной амплитуды рассеяния в трехмерии, а также проанализированы решения прямой задачи, уравнений Фаддеева и конструкции данного алгоритма в приближении сферической симметрии. Оценен вклад отдельных слагаемых основного соотношения алгоритма

$$\tilde{v}(-\mathbf{p}) = H(\mathbf{k}_*, \mathbf{p}) + Z_1[H(\mathbf{k}, \mathbf{p})|_{\mathbf{k}_l \neq 0}, \mathbf{k}_*] + Z_2[H(\mathbf{k}, \mathbf{p})|_{\mathbf{k}_l \rightarrow 0}, \mathbf{k}_*]. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{v}(-\mathbf{p} \equiv \mathbf{l} - \mathbf{k})$ – пространственный спектр рассеивателя; $H(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv h(\mathbf{k}, \mathbf{l} = \mathbf{k} - \mathbf{p})$ – обобщенные данные рассеяния, получаемые из (4); \mathbf{k}_* – произвольное фиксированное значение вектора из множества всех векторов $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$, которые при любом фиксированном $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяют условиям $\mathbf{k}^2 = k_0^2$ и $2\mathbf{k}\mathbf{p} = \mathbf{p}^2$ (аналог условий (1) и (2)).

На первом этапе компьютерного моделирования функциональный член Z_1 не рассматривался в силу большого количества вычислительных операций и, главное, неустойчивости процедуры нахождения $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$. Кроме того, как следует из уравнений Фаддеева, для трехмерного сферически симметричного рассеивателя $h^+(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv h^-(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, т.е. $H^+(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv H^-(\mathbf{k}, \mathbf{p})$, и, следовательно, другой функциональный член $Z_2 \equiv 0$, поэтому моделирование алгоритма свелось к моделированию решения уравнений Фаддеева. Следует отметить, что сферическая симметрия здесь упрощает модель, но не ограничивает общности получаемых результатов.

Раздел 3.2 посвящен алгебраизации уравнений при сборе экспериментальных данных и численной реализации алгоритма: приведена алгебраизация решений прямой задачи, уравнений Фаддеева, основного соотношения алгоритма, а также схема получения «обрезанного» пространственного спектра и оценки функции рассеивателя для такого спектра в случае сферически-симметричного рассеивателя.

Результаты восстановления данным алгоритмом сферически-симметричных рассеивателей разной силы приведены в **разделе 3.3**. В силу того, что в реализованном приближенном варианте алгоритма пространственный спектр $\tilde{v}(-\mathbf{p})$ оценивался на основе предельных значений H^\pm обобщенной амплитуды рассеяния только для пространственных компонент $|\mathbf{p}| \leq 2k_0$, результат восстановления $\hat{v}(\mathbf{r})$ сравнивался с функцией $v_{\text{cut}}(\mathbf{r})$, пространственный спектр которой совпадает со спектром истинного рассеивателя $v(\mathbf{r})$ внутри сферы радиуса $2k_0$ и равен нулю вне этой сферы. За счет того, что нелинейная связь между обобщенной амплитудой рассеяния и классической обеспечивает учет многократных рассеяний, получаемая оценка

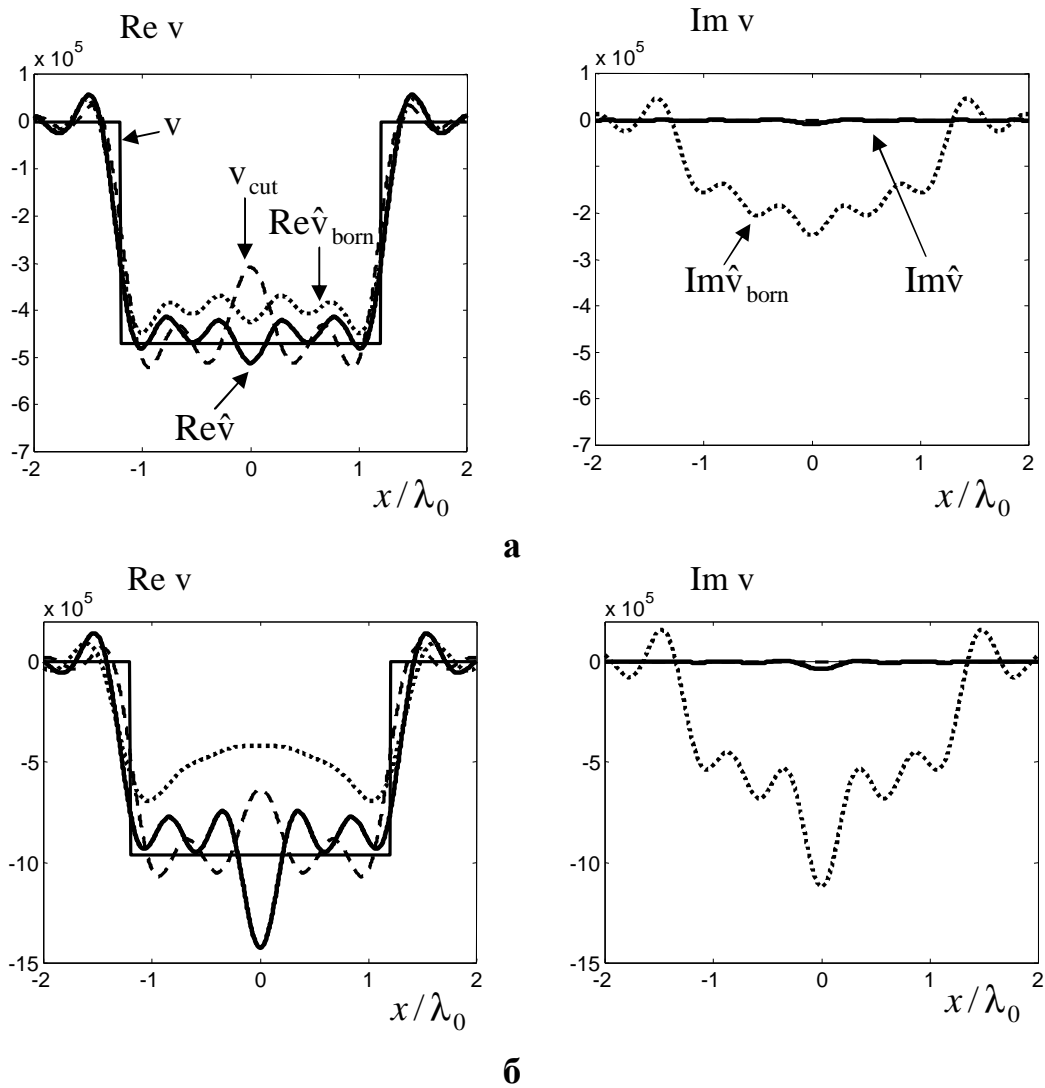


Рис.5. Центральные сечения действительной (слева) и мнимой (справа) частей рефракционных рассеивателей в виде шара с одинаковым радиусом $a = 1.2 \lambda_0$ при контрасте скорости звука $\Delta c/c_0 \approx -0.050$ и дополнительном набеге фазы $\Delta\psi \approx \pi/4$ (а); $\Delta c/c_0 \approx -0.116$, $\Delta\psi \approx \pi/2$ (б):

- истинный рассеиватель v (тонкая сплошная линия);
- форма рассеивателя v_{cut} после ограничения полосы частот его пространственного спектра сферой радиуса $2k_0$ (пунктирная линия);
- оценка рассеивателя при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний (\hat{v} – толстая сплошная линия) и в приближении Борна (\hat{v}_{born} – линия в виде точек).

$\hat{v}(\mathbf{r})$ оказывается более точной, чем оценка $\hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$ в первом приближении Борна. В случае слабых рассеивателей обобщенная амплитуда рассеяния совпадает с классической, и обе оценки совпадают между собой: $\hat{v}(\mathbf{r}) = \hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$. Однако, как только рассеиватель перестает быть слабым, в борновской оценке возникает ложная мнимая часть $\text{Im} \hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$, возрастающая по мере увеличения

силы рассеивателя. При набеге фазы волны, достигающем $\Delta\psi \approx \pi/4$, амплитуды функций $\text{Re } \hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$ и $\text{Im } \hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$ уже сравнимы по величине (рис.5а). В то же время, аналогичная ложная мнимая часть $\text{Im } \hat{v}(\mathbf{r})$, но обусловленная пренебрежением в (5) членом Z_1 , становится лишь немного заметной только для рассеивателей, создающих дополнительный набег фазы более $\Delta\psi \approx 3\pi/4$, т.е. приближающихся к сильным рассеивателям. При $\Delta\psi \leq \pi/2$ оценка рассеивателя $\hat{v}(\mathbf{r})$ лучше воспроизводит функцию $v_{\text{cut}}(\mathbf{r})$, чем оценка $\hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$ (рис.5а). Однако при $\Delta\psi$ около $\pi/2$ и более, искажения, вносимые в оценку $\hat{v}(\mathbf{r})$, становятся уже более существенными и выражаются в увеличении относительной амплитуды осцилляций (рис.5б), что свидетельствует о возрастающем влиянии неучтенного члена Z_1 .

В разделе 3.4 обсуждается вывод о применимости алгоритма Новикова-Хенкина для восстановления рассеивателей средней силы. В общем случае пренебрежение членом Z_1 сделать нельзя, хотя для не слишком сильных рассеивателей обобщенная амплитуда рассеяния восстанавливает пространственный спектр рассеивателя существенно лучше, чем классическая амплитуда рассеяния (борновское приближение). Алгоритм также обладает хорошей помехоустойчивостью: относительная погрешность в оценке рассеивателя не намного превышает относительную погрешность в данных рассеяния, а размерностная избыточность данных рассеяния в трехмерном случае приводит к дополнительному повышению помехоустойчивости решения.

Четвертая глава состоит из трех разделов и посвящена второму (новому) алгоритму Новикова [12] решения трехмерной обратной акустической задачи рассеяния.

Описаны новые вводимые переменные и векторы, установлено взаимнооднозначное соответствие между пространством трехмерных комплексных волновых векторов и комплексной λ -плоскостью. Приведены основные уравнения алгоритма и схема их итерационного решения. Проведен анализ итерационного решения уравнений алгоритма применительно к случаю сферически-симметричного рассеивателя (раздел 4.1).

При построении своего функционально-аналитического алгоритма автор алгоритма использует комплексную λ -плоскость ($\lambda \in \mathbb{C}$), где между каждой парой (\mathbf{k}, \mathbf{p}) и парой (λ, \mathbf{p}) устанавливается взаимнооднозначное соответствие. Первым этапом решения алгоритма снова является нахождение обобщенной амплитуды рассеяния из уравнений Фаддеева (4), которая затем приводится к виду $H^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv H^\pm(\lambda, \mathbf{p})$. После этого интегрированием значений $H^\pm(\zeta, \mathbf{p})$, определенных на $|\zeta|=1$, вычисляется член $H_0(\lambda, \mathbf{p})$, участвующий в основном уравнении алгоритма

$$H(\lambda, \mathbf{p}) = H_0(\lambda, \mathbf{p}) + P(\{H, H\}; \lambda, \mathbf{p}).$$

Данное уравнение решается итерационно, так как член $P(\{H, H\}; \lambda, \mathbf{p})$ нелинейным образом зависит от значений H , вычисленных на предыдущем этапе. При численной реализации вводится дополнительная фильтрующая функция $F(|\mathbf{p}|)$, при использовании которой схема итерационного решения выглядит как

$$\hat{H}_j(\lambda, \mathbf{p}) = F(|\mathbf{p}|) H_0(\lambda, \mathbf{p}) + F(|\mathbf{p}|) P\left(\{\hat{H}_{j-1}, \hat{H}_{j-1}\}; \lambda, \mathbf{p}\right),$$

где $\hat{H}_{j=0}(\lambda, \mathbf{p}) = F(|\mathbf{p}|) H_0(\lambda, \mathbf{p})$, $\hat{H}_j = (1 - \varepsilon)\hat{H}_{j-1} + \varepsilon\hat{H}_j$, $0 < \varepsilon \leq 1$ – весовой множитель, \hat{H}_j – оценка функции H , получаемая на итерации с номером $j \geq 1$.

Заключительным этапом является оценка пространственного спектра рассеивателя из соотношения

$$\tilde{v}(-\mathbf{p}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} H(\lambda, \mathbf{p}).$$

В разделе 4.2 выполняется алгебраизация уравнений при численной реализации алгоритма в общем случае и в случае сферической симметрии рассеивателя, а также приведены результаты восстановления рассматриваемым алгоритмом сферически-симметричных рассеивателей разной силы и размера.

На примере рассеивателя на рис.6 можно сравнить качество восстановления приближенным вариантом алгоритма Новикова-Хенкина и трехмерным алгоритмом Новикова. Для центрально-симметричных рассеивателей оценка приближенным алгоритмом Новикова-Хенкина совпадает с фаддеевской оценкой \hat{v}_{fad} , которая заметно уступает итоговой итерационной оценке \hat{v} . Об этом же свидетельствует и сравнение итоговой оценки данного рассеивателя с результатом восстановления приближенным алгоритмом рассеивателя, изображенного на рис.5б (оба рассеивателя близки по контрасту $\Delta c/c_0$ и, следовательно, по создаваемому дополнительному набегу фазы $\Delta\psi \approx \pi/2$). При увеличении силы рассеивателя отличие \hat{v}_{fad} от истинной функции рассеивателя v возрастает, в то время как \hat{v} остается близкой к истине (рис.7).

Выяснено, что помехоустойчивость алгоритма к случайным ошибкам в экспериментальных данных рассеяния достаточна для практических целей диагностики. Так, на рис.8 представлен восстановленный пространственный спектр рассеивателя в отсутствие и присутствии шума в данных при относительном коэффициенте зашумления $v_{\text{ns}} = 0.09$. Погрешность восстановления составила $\mu \approx 0.11$. В случае полностью некоррелированной помехи погрешность μ будет уменьшаться благодаря избыточности трехмерных данных.

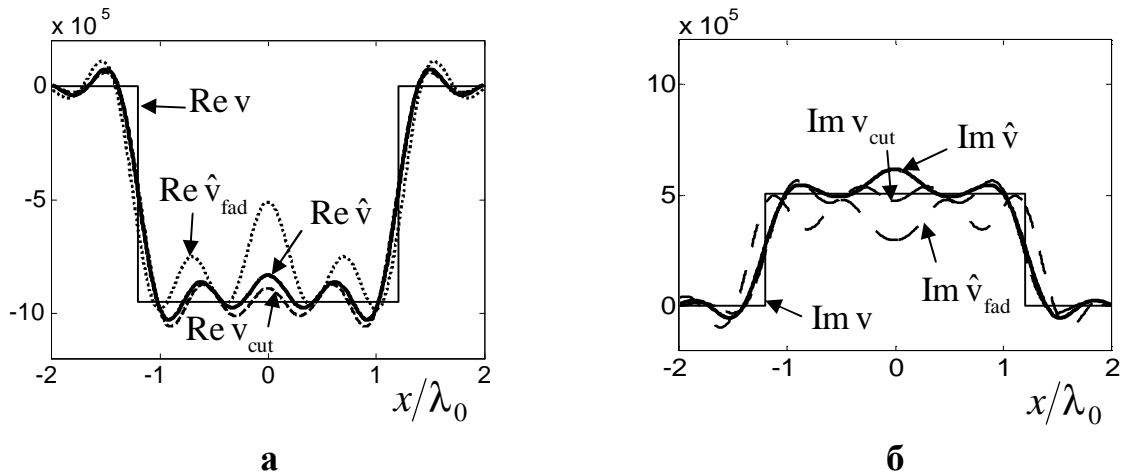


Рис.6. Рефракционно-усиливающий шарообразный рассеиватель радиуса $a = 1.2\lambda_0$; фокусирующий контраст скорости $\Delta c/c_0 \approx -0.094$, набег фазы $\Delta\psi \approx \pi/2$, амплитудное усиление в рассеивателе – в 2.2 раза, действительная (а) и мнимая (б) части рассеивателя: истинный рассеиватель v (тонкая сплошная линия); форма рассеивателя v_{cut} после ограничения ширины его пространственного спектра (пунктирная линия); оценка рассеивателя из уравнения Фаддеева \hat{v}_{fad} (линия из точек) и оценка по алгоритму Новикова \hat{v} (толстая сплошная линия) при отсутствии шумовых помех.

В настоящее время не выявлено жестких ограничений на силу рассеивателя, нужных для обеспечения работоспособности алгоритма. Объекты, сильно отличающиеся от фоновой среды как показателем преломления, так и поглощением, были восстановлены с хорошим качеством. Чисто рефракционный рассеиватель на рис.7 является весьма сильным, создавая $\Delta\psi \approx 3\pi$. Его фаддеевская оценка \hat{v}_{fad} существенно отличается от v_{cut} по амплитуде и ширине, в то время как оценка \hat{v} отличается от v_{cut} только небольшой осцилляцией, являющейся следствием присутствия рассеяния назад.

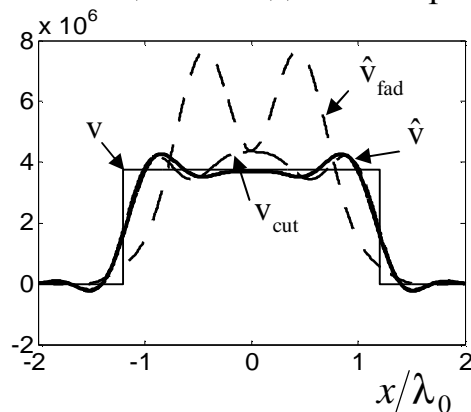


Рис.7. Чисто рефракционный шарообразный рассеиватель радиуса $a = 1.2\lambda_0$; дефокусирующий контраст скорости $\Delta c/c_0 \approx 1.67$, набег фазы $\Delta\psi \approx 3\pi$: центральные сечения действительной части рассеивателя, тип линий аналогичен рисунку б.

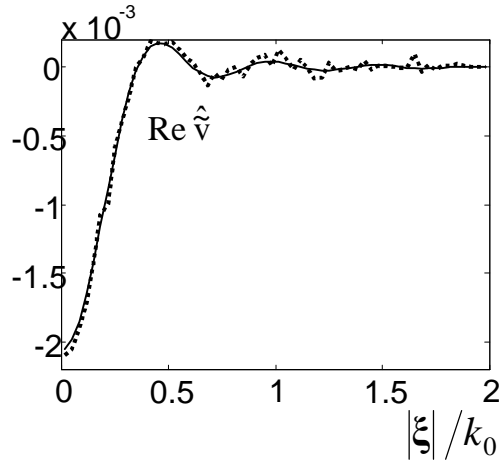


Рис.8. Чисто рефракционный шарообразный рассеиватель радиуса $a = 2\lambda_0$; фокусирующий контраст скорости $\Delta c / c_0 \approx -0.059$, набег фазы $\Delta\psi \approx \pi/2$: центральное сечение оценки действительной части пространственного спектра рассеивателя, восстановленной алгоритмом Новикова при отсутствии шумовых помех (сплошная линия) и по зашумленным данным со стандартным амплитудным отклонением $\sigma_{ns} = 0.09 \bar{f}$ (линия из точек).

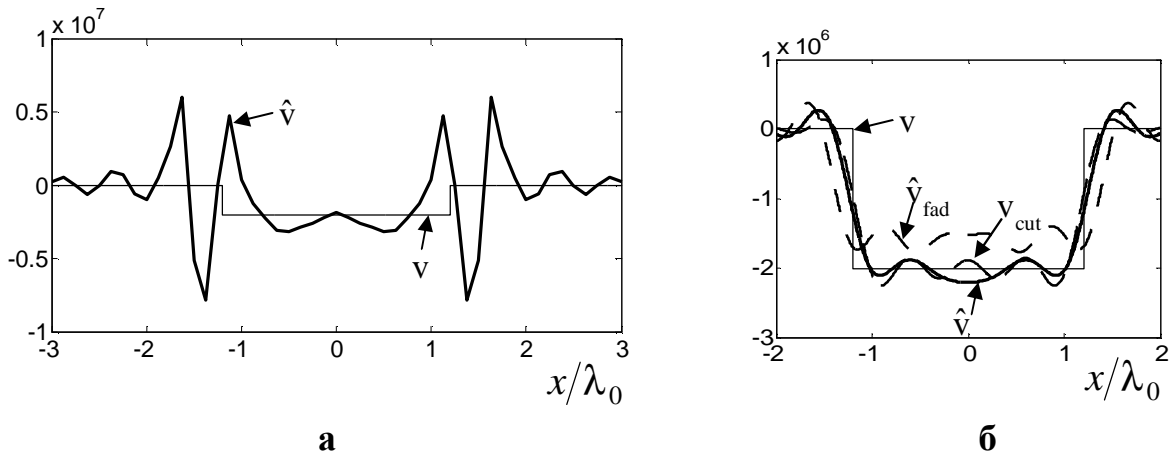


Рис.9. Результат восстановления двумерного цилиндрического рассеивателя (а) и трехмерного шарообразного рассеивателя (б) с одинаковым радиусом $a = 1.2\lambda_0$ и фокусирующим контрастом скорости $\Delta c / c_0 \approx -0.172$, дающими набег фазы $\Delta\psi \approx \pi$; тип линий аналогичен рисунку 6.

Алгоритм Новикова позволяет численно проиллюстрировать тот факт, что в трехмерной монохроматической задаче рассеяния единственность и устойчивость восстановления могут быть обеспечены для рассеивателей произвольной силы, в отличие от двумерной монохроматической задачи. Для иллюстрации были рассмотрены два чисто рефракционных фокусирующих рассеивателя. Один – двумерный, цилиндрической формы с радиусом $a = 1.2\lambda_0$; другой – трехмерный, шарообразный, с тем же радиусом. Оба рассеивателя имеют $c/c_0 \approx 1.208$, $\Delta c / c_0 \approx -0.172$ и относятся к классу сильных

рассеивателей: дополнительный набег фазы вдоль диаметра каждого из них составляет $\Delta\psi \approx \pi$. Оценка цилиндрического рассеивателя, полученная двумерным алгоритмом Новикова-Гриневича, искажена даже в центральной части, а на периферии возникают сильные осцилляции – признак неустойчивости решения обратной задачи (рис.9а). В то же время, шарообразный рассеиватель с той же искажающей силой воспроизводится алгоритмом Новикова вполне удовлетворительно (рис.9б).

Раздел 4.3 содержит выводы о применимости нового алгоритма Новикова для рассеивателей достаточно большой силы.

В **пятой главе** (заключении) сформулированы основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Проведено детальное исследование модифицированного двумерного монохроматического алгоритма Новикова, предназначенного для решения обратных задач рассеяния. Показано, что этот алгоритм имеет ряд преимуществ по сравнению с предшествовавшим ему алгоритмом Новикова-Гриневича: меньшее число вычислительных операций, возможность оценить ширину области локализации пространственного спектра вторичных источников, допускает результативное обобщение на полихроматический режим.
2. Впервые разработано обобщение модифицированного алгоритма Новикова на полихроматический режим. Разработана и апробирована на содержательном наборе модельных акустических рассеивателей программная реализация этого обобщения. Полученные результаты восстановления рассеивателей полихроматическим алгоритмом свидетельствуют о перспективности его использования. Алгоритм обеспечивает значительно более устойчивое восстановление акустических характеристик рассеивателя, чем одночастотные решения или результат их аддитивного синтеза.
3. Определена основная трудность при восстановлении цилиндрических рассеивателей полихроматическим алгоритмом: влияние рассеяния назад обобщенных волн. Картину восстановления удастся улучшить путем фильтрации обобщенной амплитуды рассеяния.
4. Проведено детальное исследование трехмерного монохроматического алгоритма Новикова-Хенкина. Впервые осуществлена программная реализация и выполнено численное моделирование приближенной версии алгоритма, получены результаты восстановления акустических рефракционно-поглощающих рассеивателей разной силы, размера и знака контраста. Выявлено, что для рассеивателей средней силы качество восстановления существенно лучше, чем в борновском приближении.

Адекватное же восстановление сильных рассеивателей возможно только при использовании строгой версии алгоритма.

5. Исследование и проведенное впервые численное моделирование трехмерного модифицированного алгоритма Новикова показало, что этот алгоритм, строго учитывающий процессы многократного рассеяния, работоспособен для рассеивателей любой силы, однако требует большого количества вычислительных операций как в силу трехмерности задачи, так и за счет итерационной процедуры решения.
Выявлено, что дополнительная пространственно-спектральная фильтрация является регуляризацией решения. Достоинство алгоритма состоит в том, что критичность итоговой оценки рассеивателя к деталям такой регуляризации невысока.
6. Проиллюстрировано, что, в отличие от двумерной монохроматической задачи рассеяния, трехмерная монохроматическая задача снимает ограничение на силу восстанавливаемого рассеивателя при обеспечении единственности и устойчивости решения задачи.
7. Во всех случаях применения исследованных алгоритмов помехоустойчивость к случайным ошибкам в экспериментальных данных рассеяния достаточно высока для их практического использования в системах медицинской диагностики.

Список цитируемой литературы

1. Гриневич П.Г., Манаков С.В. Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера, $\bar{\delta}$ -метод и нелинейные уравнения // Функцион. анализ и его прил., 1986, т.20, № 2, с.14-24.
2. Новиков Р.Г. Восстановление двумерного оператора Шредингера по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии // Функцион. анализ и его прил., 1986, т.20, № 3, с.90-91.
3. Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение двумерной обратной задачи акустического рассеяния на основе функционально-аналитических методов. II. Область эффективного применения // Акустич. журн., 1993, т.39, № 5, с.793-803.
4. Burov V.A., Morozov S.A., Rumyantseva O.D. Reconstruction of fine-scale structure of acoustical scatterer on large-scale contrast background // Acoust. Imag., 2002, V.26, p.231-238.
5. Новиков Р.Г. Многомерная обратная спектральная задача для уравнения $-\Delta\psi + (v(\mathbf{x}) - Eu(\mathbf{x}))\psi = 0$ // Функцион. анализ и его прил., 1988, т.22, № 4, с.11-22.
6. Буров В.А., Румянцева О.Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния // Акустич. журн., 2003, т.49, № 5, с.590-603.
7. Weder R. Global uniqueness at fixed energy in multidimensional inverse scattering theory // Inverse problems, 1991, V.7, p.927-938.

8. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния II // Сб.: Современ. проблемы математики, М.: ВИНТИ, 1974, т.3, с.93-180.
9. Фаддеев Л.Д. Растущие решения уравнения Шредингера // ДАН СССР, 1965, т.165, № 3, с.514-517.
- 10.Новиков Р.Г. Приближенное решение обратной задачи квантовой теории рассеяния при фиксированной энергии в размерности 2 // Труды Мат. Инст. Стеклова, 1999, т.225, с.301–318.
- 11.Новиков Р.Г., Хенкин Г.М. $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния // УМН, 1987, т.42, № 3 (255), с.93-152.
- 12.Novikov R.G. The $\bar{\partial}$ -approach to approximate inverse scattering at fixed energy in three dimensions // International Mathematics Research Papers, 2005, V.6, p.287-349.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

1. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина // Акустич. журн., 2005, т.51, № 4, с.437-446.
2. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова // Акустич. журн., 2008, т.54, № 3, с.469-482.
3. Буров В.А., Алексеенко Н.В., Румянцева О.Д. Многочастотное обобщение функционального метода решения обратной двумерной монохроматической задачи рассеяния // Препринт физического факультета МГУ, № 10/2008, 36 с.
4. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Моделирование решения трехмерной обратной задачи рассеяния по алгоритму Новикова-Хенкина // Сборник трудов XV сессии Российского Акустического Общества, М: ГЕОС, 2004, т.1, с.192-195.
5. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи рассеяния по модифицированному алгоритму Новикова // Сборник трудов XIX сессии Российского Акустического Общества, М: ГЕОС, 2007, т.1, с.211-215.
6. Алексеенко Н.В. Моделирование решения трехмерной обратной задачи акустического рассеяния по алгоритму Новикова-Хенкина // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам “Ломоносов-2004”. Секция “Физика”. Сборник тезисов, М.: Физический факультет МГУ, 2004, с. 32-34.
7. Алексеенко Н.В. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния по модифицированному алгоритму Новикова // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам “Ломоносов-2007”. Секция “Физика”. Сборник тезисов, М.: Физический факультет МГУ, 2007, с. 77-78.