

На правах рукописи

Герасименко Татьяна Николаевна

ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К РАСЧЕТАМ
РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТОКОВ, ТЕМПЕРАТУР И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
ДВУМЕРНЫХ ПРОВОДНИКОВ

01.04.02 — Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на кафедре общей физики физического факультета
Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор П. А. Поляков

Официальные оппоненты: А. Н. Боголюбов,
доктор физико-математических наук, про-
фессор кафедры математики физического
факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

М. Л. Акимов,
кандидат физико-математических наук, до-
цент кафедры инновационного менеджмен-
та института управления в промышленно-
сти, энергетике и строительстве Государ-
ственного университета управления

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт проблем
управления им. В. А. Трапезникова Россий-
ской академии наук

Защита состоится 20 декабря 2012 г. в 16 ч. 30 мин. на заседании диссер-
тационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном универ-
ситете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские
горы, МГУ, дом 1, стр. 2, физический факультет, СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке МГУ
имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан «___» _____ 20__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.002.10
доктор физико-математических наук
профессор

П. А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Тонкопленочные проводники и резисторы являются важными элементами современных электронных устройств. В частности, они используются в интегральных микросхемах, без которых невозможно существование большинства современных приборов. Все большее распространение получают так называемые лаборатории на чипе (lab-on-a-chip) — миниатюрные приборы, позволяющие осуществлять несколько стадий биохимических процессов на одном чипе площадью порядка нескольких квадратных миллиметров. Все манипуляции в таких устройствах, как правило, ведутся с помощью электрических или магнитных полей, создаваемых миниатюрными проводами или магнитами.

Обладая активным сопротивлением, проводники и резисторы неизбежно нагреваются, причем нагрев может происходить неравномерно по поверхности проводника. Повышение температуры может приводить к размягчению поверхности проводника и нарушению его формы или к ускорению роста оксидных пленок на его поверхности и, как следствие, к изменению его свойств [Wang, Xu, 2007]. Знание распределения плотности тока и температуры по поверхности проводника крайне важно также и при работе с проводниками наноразмеров, в которых большие плотности тока и высокие температуры могут приводить к электромиграции материала проводников и, как следствие, к их разрушению и сбоям в работе схемы [Lai, Kao, 2006].

Отсюда вытекает естественная необходимость детального исследования некоторых свойств проводников, которые в силу их малой по сравнению с линейными размерами толщины можно считать двумерными.

На сегодняшний день такие задачи решаются в первую очередь численно с помощью универсальных программных пакетов. Такой подход при всех своих несомненных преимуществах обладает и рядом недостатков. В силу своей универсальности готовые программные пакеты не всегда дают оптимальное и, более того, верное решение поставленной задачи [Petersen, Carpenter, May, 2009]. Кроме того, решение полученное численным методом несет с собой только информацию, ограниченную набором исходных данных, что создает трудности при его анализе. В частности, анализ и устранение сингулярностей решения при численном расчете представляет собой целую проблему [Lai, Kao, 2006].

В то же время, аналитическое решение уже в силу своей аналитичности относительно свободно от задания конкретных значений параметров

исследуемой системы и потому описывает ситуацию в целом, что делает его более доступным для анализа. Результат численного расчета будет сопоставим по эффективности с аналитическим решением только в том случае, если он будет произведен многократно, что может привести к существенным трудозатратам.

Все это приводит к тому, что развитие аналитических методов и получение новых аналитических решений остается важной и актуальной задачей.

Цель диссертационной работы

Целью диссертационной работы является развитие аналитических методов решения задач электродинамики о распределении токов в двумерных проводниках различной формы и применение полученных результатов к расчетам температур и магнитных полей этих проводников.

Научная новизна

В диссертационной работе впервые предложен способ построения приближенных аналитических решений задачи о распределении комплексного потенциала в двумерных проводниках сложной формы с различными расширениями, сужениями и изгибами. Получены в аналитическом виде отображения, переводящие верхнюю комплексную полуплоскость в полосы, изогнутые под углами 30, 60 и 120 градусов и посчитаны распределения токов в соответствующих проводниках. Разработан способ скругления внутреннего угла проводника, позволяющий получить скругляющую дугу близкую по форме к дуге окружности.

На основе полученных решений создан оптимальный алгоритм расчета распределений температур в указанных проводниках и впервые найдены критерии физического подобия распределений температуры в геометрически подобных двумерных проводниках, нагреваемых постоянным током равной плотности.

На основе полученных аналитических формул для распределений токов разработан новый эффективный способ расчета магнитных полей рассмотренных проводников. Это позволило рассчитать пондеромоторные силы, действующие на магнитную микрогранулу в поле прямоугольного витка с током и определить вклад, который вносит в магнитное поле проводника печатной платы дефект прямоугольной формы.

Научная и практическая значимость работы

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в различных практических приложениях, таких как расчет сопротивлений

тонкопленочных резисторов, оценка времени работы микросхем, расчет пондеромоторных сил при работе с магнитными микро- и наногранулами, задачи о тестировании печатных плат и т.д.

Полученные аналитические решения могут быть также использованы и в чистом виде, к примеру для тестирования численных алгоритмов. Они позволяют делать выводы об общих закономерностях решения в проводниках более сложной формы, к примеру, предположить наличие сингулярностей.

Кроме того, аналитические решения для распределений комплексного потенциала могут быть использованы и в задачах гидродинамики при рассмотрении плоского безвихревого течения идеальной жидкости.

Апробация работы

Содержание различных разделов диссертационной работы представлялось в виде докладов на международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2006» (МГУ, Москва, 2006), «Ломоносов–2007» (МГУ, Москва, 2007), «Ломоносов–2009» (МГУ, Москва, 2009); на XV и XVI международных конференциях «Радиолокация и связь» (Фирсановка, Московская обл., 2007, 2008); на XVII международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие» (Фирсановка, Московская обл., 2009); на XVII, XIX и XX международных конференциях «Электромагнитное поле и материалы» (Фирсановка, Московская обл., 2010, 2011, 2012) на российских конференциях с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» УКИ'10 и УКИ'12 (ИПУ РАН, Москва, 2010, 2012); на 4-й международной научной конференции FMNS 2011 (South-West University «Neofit Rilski», Blagoevgrad, Bulgaria, 2011).

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 18 научных работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав основного текста, заключения, четырех приложений и списка цитируемой литературы. Полный объем диссертации составляет 144 страницы. Диссертация содержит 76 рисунков. Список литературы включает 115 ссылок.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 (Введение) содержит обзор направлений, в рамках которых возникают задачи, решаемые в последующих главах.

В **разделе 1.1** дано обоснование актуальности темы диссертации.

Раздел 1.2 посвящен обзору способов расчета сопротивлений и распределений тока в тонкопленочных проводниках и резисторах. Описана идея метода конформных преобразований и дан обзор работ, в которых для решения поставленных задач используется преобразование Шварца–Кристоффеля. Приведены примеры возникновения сингулярностей в распределении плотности тока в различных проводниках.

Раздел 1.3 посвящен описанию возможных приложений решения задач о распределении плотности тока. Рассмотрены задачи о нагреве тонкопленочных проводников и описаны возможные сложности при их численном решении. Описан ряд проблем, связанных с возникновением и обнаружением дефектов в проводниках, в частности, продемонстрирована необходимость вычисления магнитного поля проводника с дефектом при применении устройств с перемещаемыми зондами.

Описана концепция устройств на чипах (lab-on-a-chip) и свойства широко применяемых в них магнитных микро и наногранул. Записаны выражения для магнитного момента микрогранул и уравнение движения микрогранулы в вязкой жидкости под действием магнитного поля. Описаны практические приложения таких микро и наногранул и способы управления ими с помощью магнитных полей плоских проводников и постоянных магнитов.

В **разделе 1.4** сформулирована цель диссертационной работы и описана ее структура. В конце главы 1 приведен список публикаций, в которых изложены основные результаты исследований.

Целью **Главы 2** является поиск распределений комплексного потенциала и тока в плоских проводниках различной формы. Рассматриваются проводники в виде бесконечных полос с изгибами, расширениями или сужениями. С учетом отсутствия протекания тока через боковые границы проводника и в предположении, что суммарный ток через него известен, комплексный потенциал удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \\ \left. \frac{\partial \operatorname{Im}[W(x, y)]}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(x, y) \in \partial\Omega_1, \partial\Omega_2} = 0, \end{cases}$$

где $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ — две не соединяющиеся границы проводника. Для её решения используется метод конформных отображений. Решение поставлен-

ной задачи в верхней комплексной полуплоскости соответствует решению задачи о распределении комплексного потенциала точечного заряда, помещенного в начало координат

$$W(z_1) = K \ln(z_1),$$

где K — некоторая константа, зависящая от начальных условий. Отображением верхней комплексной полуплоскости на рассматриваемую область с помощью преобразования Кристоффеля–Шварца, получается решение исходной задачи.

Раздел 2.1 посвящен нахождению непосредственно отображений переводящих верхнюю комплексную полуплоскость в интересующие области. Использование преобразования Кристоффеля–Шварца позволяет получить решения в аналитическом виде лишь для ограниченного числа областей, в большинстве же случаев, в частности и для областей, приведенных на рис.1, приходится численно брать интеграл от функции комплексного переменного и численно находить константы преобразования. В связи с

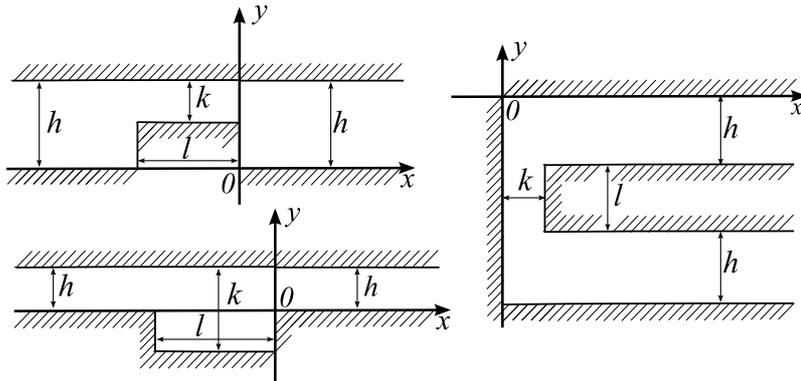


Рис. 1. Рассматриваемые проводники.

этим в **подразделе 2.1.1** разработан способ, позволяющий избежать этой трудности и получить приближенные аналитические решения для проводников, в которых есть области с относительно однородной плотностью тока по всей ширине. Для этого задача решается в области с меньшим числом углов, к примеру для полосы с уступом или для полосы, изогнутой под прямым углом. Отображения таких областей на верхнюю полуплоскость задаются в аналитических функциях. К примеру, для полосы с уступом оно имеет вид [Смайт, 1954]:

$$z = \frac{h}{\pi} \left[\ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) - \frac{1}{b} \ln \left(\frac{b+t}{b-t} \right) \right], \quad (1)$$

где

$$t = \sqrt{\frac{z_1 - b^2}{z_1 - 1}}, \quad b = \frac{h}{k}.$$

Это отображение позволяет построить картину силовых линий и эквипотенциалей в полосе с уступом. Затем эти картины обрезаются вдоль предполагаемой оси симметрии и отражаются. При точном решении задачи эк-

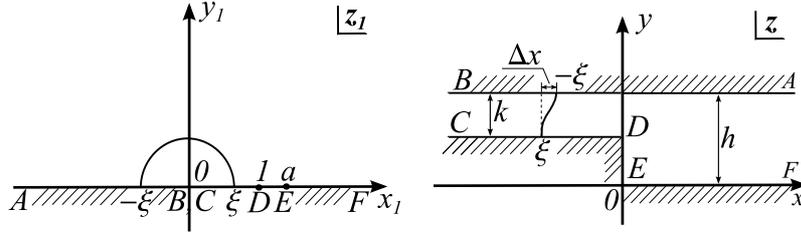


Рис. 2. Определение погрешности для проводника с прямоугольным вырезом.

випотенциаль, находящаяся в центре, в силу симметрии будет прямой линией. В случае приближенного решения она отклонится от перпендикуляра на некоторую величину Δx (рис. 2), которую мы использовали для оценки погрешности, разделив её на характерный размер в проводнике. Знание отображения (1) позволило найти в аналитическом виде связь между величиной погрешности и радиусом ξ полуокружности верхней комплексной полуплоскости, переходящей в центральную эквипотенциаль:

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \frac{b}{b-1} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + \xi} + \sqrt{1 + \xi}}{\sqrt{b^2 + \xi} - \sqrt{1 + \xi}} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 - \xi} + \sqrt{1 - \xi}}{\sqrt{b^2 - \xi} - \sqrt{1 - \xi}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{b} \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 - \xi} + b\sqrt{1 - \xi}}{\sqrt{b^2 - \xi} - b\sqrt{1 - \xi}} \right) - \frac{1}{b} \ln \left(\frac{b\sqrt{1 + \xi} + \sqrt{b^2 + \xi}}{b\sqrt{1 + \xi} - \sqrt{b^2 + \xi}} \right) \right].$$

Также аналитическом виде удалось найти связь между длиной выреза и радиусом этой полуокружности:

$$l = 2 \frac{h}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{b^2 - \xi} + \sqrt{1 - \xi}}{\sqrt{b^2 - \xi} - \sqrt{1 - \xi}} \right) - \frac{1}{b} \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 - \xi} + b\sqrt{1 - \xi}}{\sqrt{b^2 - \xi} - b\sqrt{1 - \xi}} \right) \right].$$

Последнее выражение при заданной длине l является уравнением относительно ξ . В силу взаимной однозначности конформного отображения, его можно решать численно простейшим методом половинного деления. Таким образом, найдя ξ по заданному l нетрудно вычислить погрешность α .

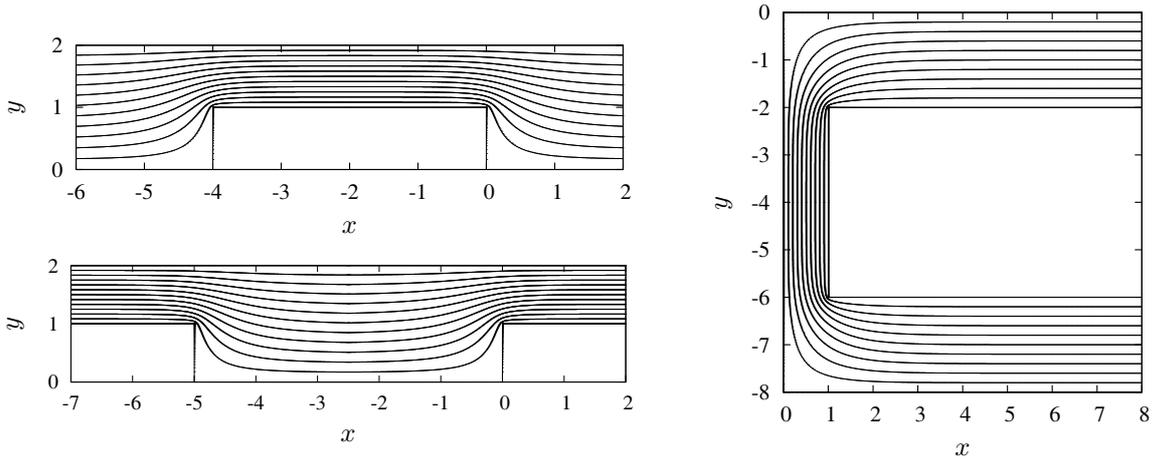


Рис. 3. Линии тока в проводниках, изображенных на рис. 1.

Линии тока, совпадающие с линиями равного уровня мнимой части комплексного потенциала, построенные таким способом, приведены на рисунке 3. Во всех случаях погрешность не превышает 1%.

В конце данного раздела формулируется общий алгоритм построения распределений комплексного потенциала в областях, которые могут быть составлены из четырехугольников, отображение верхней комплексной полуплоскости на которые известно в аналитическом виде. Для примера этот алгоритм применяется к построению линий тока в ловушке для магнитных микрогранул, имеющей вид прямоугольного витка с током. Результат приведен на рис. 4.

Подраздел 2.1.2 посвящен построению распределений комплексного потенциала в проводниках, изогнутых под различными углами. Поскольку любое иррациональное число можно со сколь угодно большой точностью приблизить рациональным, угол изгиба проводника α можно записать в виде $\alpha = \pi\beta$ и $1 - \beta = P/Q$, где P и Q — целые числа. В этом случае интеграл Кристоффеля–Шварца, отображающий верхнюю комплексную полуплоскость на полосу, изогнутую под

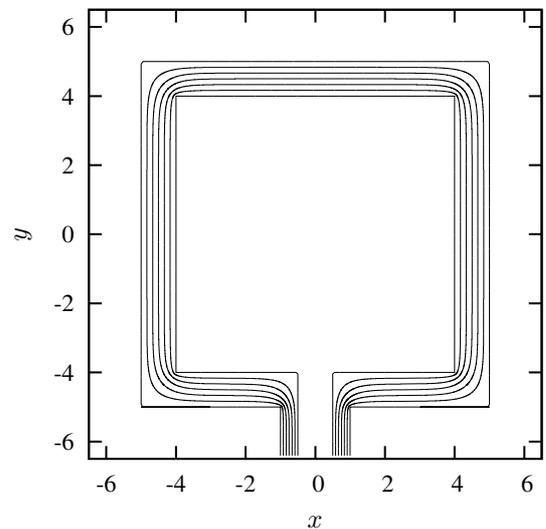


Рис. 4. Картина линий тока в прямоугольном витке

углом, можно свести к рациональному [Kober, 1957]:

$$z = -(1+a)QC \int \frac{t^{Q-1}}{t^P(t^Q+a)(t^Q-1)} dt, \quad (2)$$

где

$$t = \left(\frac{z_1 + a}{z_1 - 1} \right)^{\frac{1}{Q}}, \quad C = \frac{h}{\pi} (\sin \alpha - i \cos \alpha), \quad a = \left(\frac{h}{k} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Нами этот интеграл был взят для следующих углов (здесь k — ширина нижней части полосы, h — верхней):

$\alpha = 120^\circ$:

$$z = C \left\{ -\frac{1}{b} \ln(t+b) + \frac{1}{2b} \ln(t^2 - bt + b^2) - \ln(t-1) + \frac{1}{2} \ln(t^2 + t + 1) - \frac{i\sqrt{3}}{2b} \ln \left(\frac{2t - b - i\sqrt{3}b}{-2t + b - i\sqrt{3}b} \right) + \frac{i\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{2t + 1 - i\sqrt{3}}{-2t - 1 - i\sqrt{3}} \right) \right\} + C_1,$$

где

$$C = \frac{h}{2\pi} (\sqrt{3} + i), \quad C_1 = \frac{h-k}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{12} (7k+h),$$

$$t = \left(\frac{z_1 + b^3}{z_1 - 1} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad b = \frac{h}{k}.$$

$\alpha = 60^\circ$:

$$z = C \left\{ \frac{1}{b^2} \ln(t+b) - \frac{1}{2b^2} \ln(t^2 - bt + b^2) - \ln(t-1) + \frac{1}{2} \ln(t^2 + t + 1) + \frac{i\sqrt{3}}{2b^2} \ln \left(\frac{-2t + b - i\sqrt{3}b}{2t - b - i\sqrt{3}b} \right) + \frac{i\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{-2t - 1 - i\sqrt{3}}{2t + 1 - i\sqrt{3}} \right) \right\} + C_1,$$

где

$$C = \frac{h}{2\pi} (\sqrt{3} - i), \quad C_1 = -\frac{h+k}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{12} (7k-h),$$

$$t = \left(\frac{z_1 + b^3}{z_1 - 1} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad b = \sqrt{\frac{h}{k}}.$$

$\alpha = 30^\circ$:

$$z = C \left\{ \frac{i}{b^5} \ln \left(\frac{t+ib}{-t+ib} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2b^5} \ln \left(\frac{t^2 + \sqrt{3}bt + b^2}{t^2 - \sqrt{3}bt + b^2} \right) \right. \\ + \frac{i\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{2t+1+i\sqrt{3}}{-2t-1+i\sqrt{3}} \right) + \frac{i\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{2t-1+i\sqrt{3}}{-2t+1+i\sqrt{3}} \right) \\ + \frac{i}{2b^5} \ln \left(\frac{2t+\sqrt{3}b+ib}{-2t-\sqrt{3}b+ib} \right) + \frac{i}{2b^5} \ln \left(\frac{2t-\sqrt{3}b+ib}{-2t+\sqrt{3}b+ib} \right) \\ \left. + \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1} \right) \right\} + C_1,$$

где

$$C = \frac{h}{2\pi}(1 - i\sqrt{3}), \quad C_1 = k - h\frac{\sqrt{3}}{2} - i \left(\frac{h}{2} + k\sqrt{3} \right), \\ t = \left(\frac{z_1 + b^6}{z_1 - 1} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad b = \left(\frac{h}{k} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Картины линий тока, построенные с помощью этих отображений приведены на рис. 5.

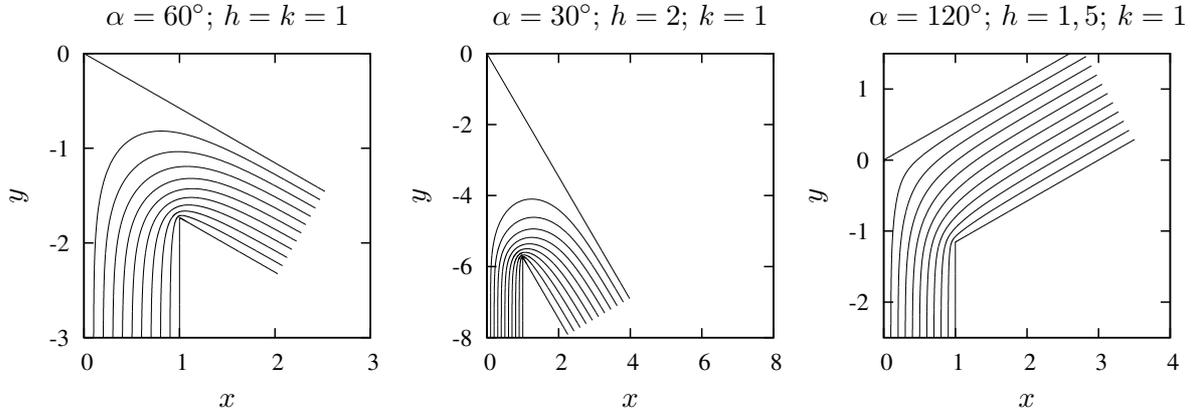


Рис. 5. Линии тока в проводниках, изогнутых под различными углами.

В разделе 2.2 показано, что распределения тока в рассмотренных проводниках будут определяться следующими выражениями:

$$j_x = A \operatorname{Re} [\mathfrak{J}(z_1(z))], \quad j_y = -A \operatorname{Im} [\mathfrak{J}(z_1(z))], \quad j = A |\mathfrak{J}(z_1(z))|,$$

где $A = J/(\pi\tau)$, $\tau \ll h, k$ — толщина проводника, J — сила тока в нем,

$$\mathfrak{J}(z_1) = \frac{1}{z_1} \frac{dz_1}{dz}.$$

Продемонстрировано, что плотность тока будет стремиться к бесконечности во внутренних углах проводников (под внутренними понимаются углы большие π). Для того, чтобы избежать этой сингулярности, рассматриваются проводники с небольшим скруглением во внутреннем угле. Для этого конформное преобразование для области, изогнутой под углом, записывается в следующем виде:

$$z = C \int \frac{1}{z_1} \left(\frac{z_1 - 1}{z_1 + a} \right)^{1-\beta} dz_1 + C\gamma \int \frac{1}{z_1} \left(\frac{z_1 - 1 + \delta_1}{z_1 + a} \right)^{1-\beta} dz_1 + \\ C\gamma \int \frac{1}{z_1} \left(\frac{z_1 - 1 - \delta_2}{z_1 + a} \right)^{1-\beta} dz_1,$$

здесь δ_1 , δ_2 и γ — параметры, зависящие от радиуса скругления; $\delta_1 < 1$; δ_2 и γ могут принимать значения как большие, так и меньшие 1. Показано, что при допущении $1 - \beta = P/Q$ это выражение может быть сведено к следующему:

$$z = I(1) + \gamma I(1 - \delta_1) + \gamma I(1 + \delta_2),$$

где

$$I(m) = -(1 + b_m^Q)QC \int \frac{t_m^{Q-1}}{t_m^P(t_m^Q + b_m^Q)(t_m^Q - 1)} dt, \quad (3) \\ t_m = \left(\frac{z_1 + a}{z_1 - m} \right)^{\frac{1}{Q}}, \quad b_m = \left(\frac{a}{m} \right)^{\frac{1}{Q}}.$$

Формальная эквивалентность выражений (2) и (3) позволяет использовать для расчетов результаты, полученные ранее при рассмотрении нескругленных углов.

Для определения неизвестных параметров при известном радиусе скругления ρ получена следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[z(1)] \cong k + \rho \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\ \operatorname{Im}[z(1)] \cong -\frac{h + k \cos \alpha}{\sin \alpha} - \rho \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \\ |z(1) - z(1 - \delta_1)| = |z(1) - z(1 + \delta_2)|, \end{cases}$$

которая решается численно. Результаты применения этой техники приведены на рис. 6

Выражения для $\mathfrak{J}(z_1)$ в случае скругленного внутреннего угла имеют вид:

$$\mathfrak{J}(z_1) = \frac{\pi(1 + 2\gamma)}{h(\sin \alpha - i \cos \alpha)} \frac{[z_1 + a]^{1-\beta}}{[z_1 - 1]^{1-\beta} + \gamma[z_1 - 1 + \delta_1]^{1-\beta} + \gamma[z_1 - 1 - \delta_2]^{1-\beta}}$$

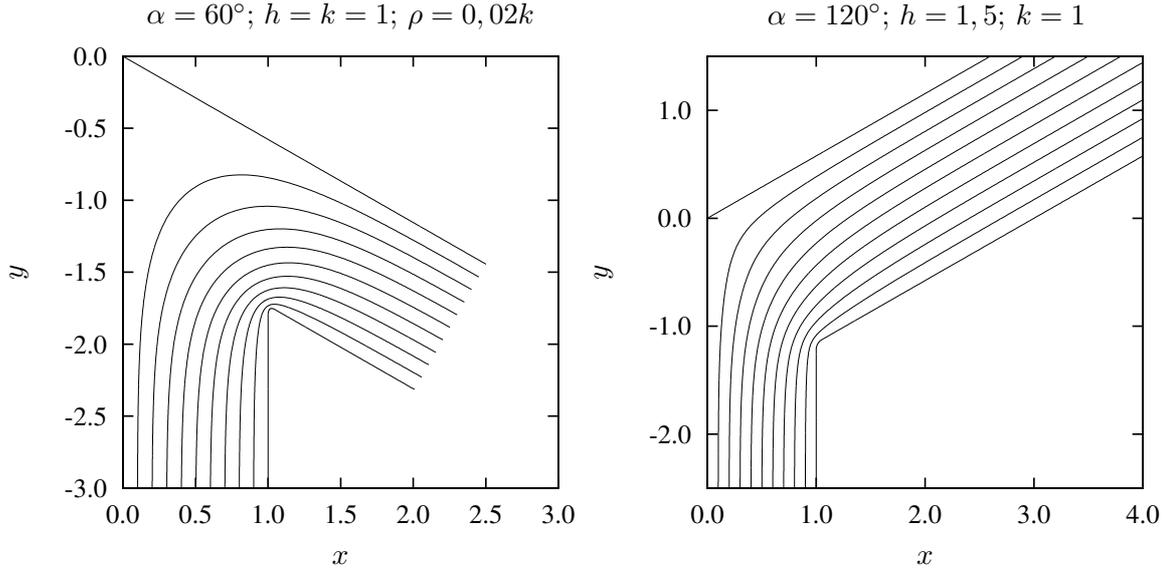


Рис. 6. Примеры линий тока в проводниках со скругленным углом.

для проводников, изогнутых под углом и

$$\mathfrak{J}(z_1) = \frac{\pi(1 + 2\gamma)}{h} \frac{\sqrt{z_1 - a}}{\sqrt{z_1 - 1} + \gamma\sqrt{z_1 - 1 + \delta_1} + \gamma\sqrt{z_1 - 1 - \delta_2}}$$

для полосы с уступом.

Целью **главы 3** является исследование распределений температуры, возникающих в проводниках, плотность тока в которых существенно неоднородна. Для этого в **разделе 3.1** рассматривается модельная задача о распределении тока в тонком проводящем диске радиуса A , нагреваемом постоянным током. Предполагается, что ток силой J_0 подводится тонким проводом радиуса $a \ll A$. Предполагается также, что температура на границе диска совпадает с температурой окружающей среды, и нет теплообмена между подводящим проводом и диском. Решение такой задачи имеет вид:

$$u(r) = \frac{\alpha}{\beta} \left[K_0(\kappa r) \int_{\kappa a}^{\kappa r} \frac{I_0(x)}{x} dx - I_0(\kappa r) \int_{\kappa a}^{\kappa r} \frac{K_0(x)}{x} dx \right] - C_1 I_0(\kappa r) + C_2 K_0(\kappa r), \quad (4)$$

где $u(r)$ — разность между температурой диска и температурой окружающей среды, r — радиус диска, $\alpha = J_0^2 \rho / (4\pi^2)$, $\kappa = \sqrt{h_T / \beta}$, β — коэффициент теплопроводности, h_T — коэффициент теплоотдачи с поверхности, ρ — удельное сопротивление (β и ρ пересчитаны на единицу площади поверх-

ности),

$$C_1 = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{I_0 \xi - K_0 \eta}{K_0 i_1 + I_0 k_1} k_1, \quad C_2 = \frac{\alpha}{\beta} \frac{I_0 \xi - K_0 \eta}{K_0 i_1 + I_0 k_1} i_1,$$

$$\int_{\kappa a}^{\kappa A} \frac{K_0(x)}{x} dx \equiv \xi, \quad \int_{\kappa a}^{\kappa A} \frac{I_0(x)}{x} dx \equiv \eta,$$

$$K_n(\kappa A) \equiv K_n, \quad I_n(\kappa A) \equiv I_n,$$

$$K_n(\kappa a) \equiv k_n, \quad I_n(\kappa a) \equiv i_n.$$

Исследованы предельные случаи, соответствующие преобладанию различных механизмов отвода тепла от наиболее нагретых участков проводника. В случае преобладания теплоотвода а счет теплопроводности вдоль диска асимптотика выражения (4) имеет вид:

$$u(r) \approx \frac{\alpha}{2\beta} \left(\ln^2 \frac{A}{a} - \ln^2 \frac{r}{a} \right)$$

в нулевом порядке по κ и

$$u(r) \approx \frac{\alpha}{\beta} \left\{ \frac{1}{2} \left(\ln^2 \frac{A}{a} - \ln^2 \frac{r}{a} \right) + \frac{\kappa^2 a^2}{4} \ln \frac{A}{r} \ln^2 \frac{A}{a} + \frac{\kappa^2 r^2}{8} \left(\ln^2 \frac{A}{a} - \ln^2 \frac{r}{a} \right) - \frac{\kappa^2}{4} \left(A^2 \ln \frac{A}{a} - r^2 \ln \frac{r}{a} \right) - \frac{\kappa^2 a^2}{8} \ln \frac{A}{r} + \frac{3}{16} \kappa^2 (A^2 - r^2) \right\}$$

во 2-м порядке (слагаемые первого порядка отсутствуют).

В случае преобладания механизма теплоотдачи с поверхности, асимптотика следующая:

$$u(r) \approx \frac{\alpha}{hr^2} + \left(u_0 - \frac{\alpha}{ha^2} \right) \frac{\text{sh}(\kappa(A-r))}{\text{sh}(\kappa(A-a))} \sqrt{\frac{a}{r}} - \frac{\alpha}{hA^2} \frac{\text{sh}(\kappa(r-a))}{\text{sh}(\kappa(A-a))} \sqrt{\frac{A}{r}},$$

где u_0 — разница между температурой в центре проводника и температурой окружающей среды. В последнем случае видно, что распределение температуры зависит от радиуса так же, как распределение источников тепла, однако, для реальных металлов реализуется первый случай, когда распределение температуры существенно сглаживается по сравнению с распределением тепловых источников.

В разделе 3.2 решаются задачи о распределении тепла в проводниках, рассмотренных в главе 2. Предполагается, что сопротивление линейно зависит от температуры и отсутствует теплоотвод через боковые границы проводников. Задачи решаются численно, в связи с этим в проводниках выделяется некоторая конечная область. Она выбирается так, что ее границы

перпендикулярны границам проводника и находятся на таких расстояниях от угла, где распределение тока уже можно считать однородным. Это позволяет предположить, что в силу равномерности распределения тока, а следовательно, и источников тепла, градиент температуры на границах можно считать пренебрежимо малым. Т.е. на всей границе заданы условия Неймана. Окончательно задача записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) - [\kappa^2 - f(x, y)\alpha]u(x, y) = -f(x, y), \text{ при } (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ при } (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь Ω — рассматриваемый участок проводника и

$$f(x, y) = \frac{j^2(x, y)}{\beta} \rho_\theta.$$

Для решения этой задачи используется метод конечных элементов. При этом учитывается тот факт, что все рассматриваемые области получены из верхней комплексной полуплоскости с помощью конформных преобразований. Это позволяет задавать узлы триангуляции в верхней комплексной полуплоскости и сразу ставить им в соответствие функцию правой части. Такой подход дает возможность избежать трудоемкой процедуры задания границ области из геометрических соображений и автоматически дает сгущение узлов вблизи внутренних углов, где функция правой части может сильно возрастать. **Подраздел 3.2.1** посвящен получению системы уравнений метода конечных элементов для рассматриваемой задачи. В **подразделе 3.2.2** описана техническая реализация используемого алгоритма.

В **разделе 3.3** исследуются размерные эффекты в двумерных проводниках. Установлено, что распределения температур в геометрически подобных проводниках с равными плотностями тока будут физически подобными лишь в том случае, когда у этих проводников совпадают следующие параметры, являющиеся критериями подобия:

$$\Pi_1 = \frac{\mathcal{L}^2 h_T}{\tau \beta}, \quad \Pi_2 = \frac{\mathcal{L}^2 j^2 \rho_\theta}{\mathcal{T} \beta}, \quad \Pi_\alpha = \alpha \mathcal{T},$$

где \mathcal{L} — характерный линейный размер в системе, \mathcal{T} — характерный масштаб температуры, α — температурный коэффициент сопротивления.

Примеры распределений температуры в геометрически подобных проводниках, по которым течет ток равной плотности приведены на рис. 7.

Раздел 3.4 посвящен экспериментальной проверке некоторых из полученных результатов. В качестве образцов для измерения использовались

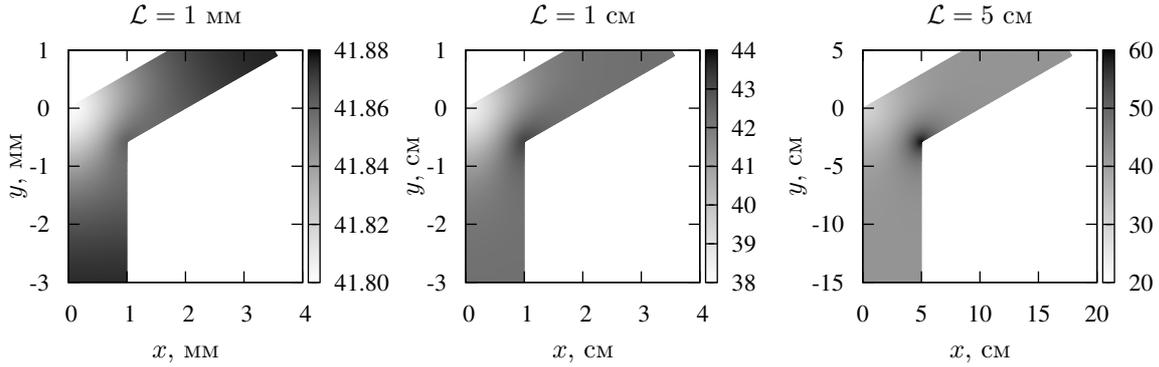


Рис. 7. Распределения температуры в геометрически подобных алюминиевых проводниках.

проводники двух типов: проводник с прямоугольным вырезом размерами $h = 1,5$ см, $k = 2$ мм, $l = 2$ мм и проводник, изогнутый под прямым углом с $h = k = 1$ см. Проводники были изготовлены из алюминиевой фольги толщиной 10 мкм.

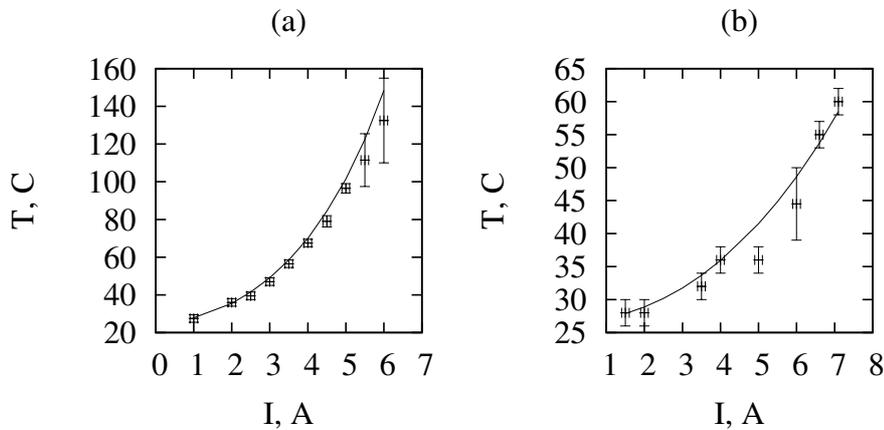


Рис. 8. Зависимость температуры перемычки (а) и температуры вблизи внутреннего угла (б) от пропускаемого тока. Точками отмечены экспериментальные данные, сплошная линия — результаты расчета.

Нагрев производился постоянным электрическим током, распределение температуры по поверхности образцов определялось оптическим методом при помощи ИК-термографа SAT-S160, позволяющим получать как картину распределения температуры, так и температуру в отдельных точках проводника. На рисунке 8 приведены экспериментальные и теоретические зависимости температуры перемычки и температуры вблизи внутрен-

него угла проводника от пропускаемого тока.

Эксперимент ставил своей целью проверку качественного соответствия реальных распределений температуры с теорией, однако было установлено, что имеет место также и количественное в пределах 30% совпадение теоретических результатов с экспериментом.

Глава 4 посвящена расчету магнитных полей, создаваемых двумерными проводниками. В **разделе 4.1** описан общий подход к расчету магнитного поля от рассмотренных проводников. Суть его заключается в том, чтобы, как и в главе 3, отделить ту область проводника, в которой происходит перераспределение плотности тока, от полубесконечных полос, в которых плотность тока однородна. Магнитное поле от конечной части проводника рассчитывается численно с помощью закона Био–Савара–Лапласа. При этом вновь используется тот факт, что выделенная область проводника получена известным отображением из полукольца в верхней комплексной полуплоскости. Поэтому интегрирование велось в переменных (v, φ) , где $v = \ln r$, r и φ — модуль и аргумент комплексной переменной в исходном полукольце (рис. 9). Модуль якобиана преобразования $(x, y) \rightarrow (v, \varphi)$ имеет

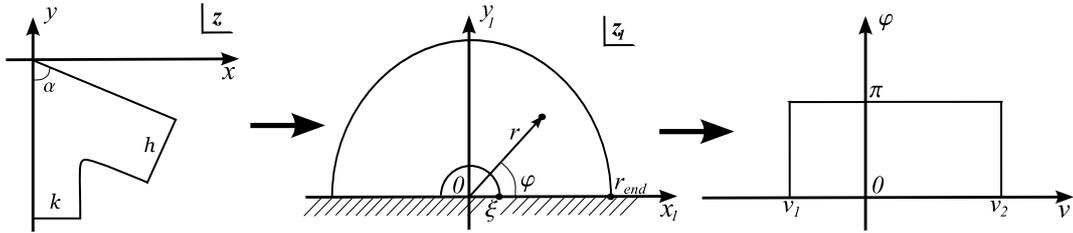


Рис. 9. Преобразование области интегрирования.

вид

$$|J(v, \varphi)| = \frac{A^2}{j^2(v, \varphi)},$$

где $A = J/(\pi\tau)$. Магнитное поле конечного участка проводника вычисляется как:

$$\mathbf{H}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{c} \int_{v_1}^{v_2} \int_0^\pi \frac{[\mathbf{j}(v, \varphi), \mathbf{R}(v, \varphi)]}{R^3(v, \varphi)} \frac{A^2}{j^2(v, \varphi)} dv d\varphi,$$

где (ξ, η, ζ) — координаты точки наблюдения. Такой переход позволяет избежать необходимости задавать сетку в области сложной формы и дает возможность использовать один и тот же алгоритм для всех рассматриваемых проводников.

Поле от полубесконечных полос рассчитывалось аналитически в виде. Пример расчета магнитного поля от проводника, изогнутого под углом 60° , приведен на рис. 10

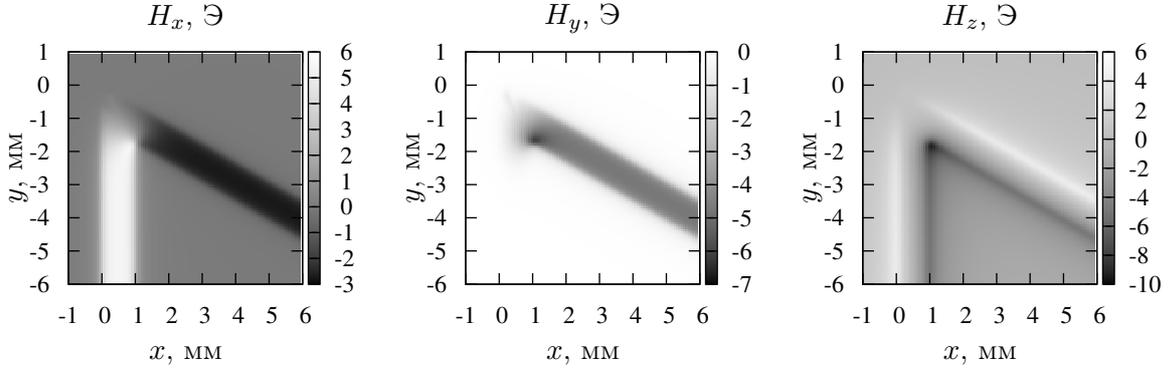


Рис. 10. Компоненты поля проводника, изогнутого под углом 60° с параметрами $h = k = 1$ мм, по которому течет ток 1 А, на высоте 100 мкм над проводником.

Раздел 4.2 посвящен приложению полученных результатов к задаче об управлении магнитными микрогранулами. Уравнение движения магнитной микрогранулы в вязкой жидкости:

$$M\mathbf{a} = M\mathbf{g} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_f \mathbf{g} - 6\pi\eta r \mathbf{v} + \mathbf{F}_{pond},$$

где M — масса микрогранулы, r — ее радиус, \mathbf{v} и \mathbf{a} — скорость ее движения и ускорение, соответственно, ρ_f — плотность жидкости, в которую помещена микрогранула, η — динамическая вязкость этой жидкости. Пондеромоторная сила, действующая на микрогранулу во внешнем магнитном поле, имеет вид [Кузьменков, Харабадзе, 2004]:

$$F_j^{pond} = m_i \partial_j B_i,$$

где \mathbf{m} — магнитный момент гранулы. В связи с этим важным этапом в решении задач о движении магнитной микрогранулы является расчет магнитного поля управляющей системы и его производных. Методика расчета описанная в **разделе 4.1** позволила рассчитать поле сил, действующих на микрогранулу в поле прямоугольного витка с током, рассмотренного в главе 2. На рис. 11 приведены картины этих полей на различных высотах над витком. Из них видно, что точка, в которой окажется микрогранула, зависит от высоты подложки над ловушкой.

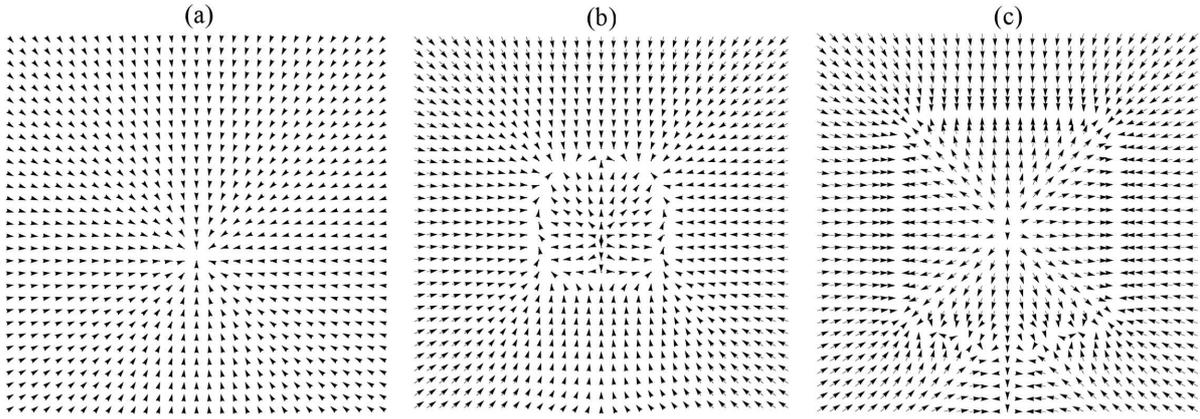


Рис. 11. Силовое поле в плоскости xy на высотах 5 см (а), 5 мм (b) и 500 мкм (с) над ловушкой размерами 10×10 мм.

Системы токов требуемых размеров не способны создать больших магнитных полей, поэтому пондеромоторная сила, создаваемая ими оказывает заметное влияние на микрогранулу лишь на небольших (порядка ширины проводника) расстояниях от провода. Для того, чтобы получить возможность влиять на движение микрогранул на больших расстояниях используются постоянные магниты. В связи с этим в **подразделе 4.2.1** рассматривается принципиальная возможность усиления внешнего магнитного поля полем постоянного магнита. Демонстрируется, что с помощью тонкой ферромагнитной пластинки среднее по объему датчика значение напряженности поля может быть усилено в 18-19 раз. Такие концентраторы могут быть использованы в первую очередь для регистрации микрогранул после того, как они попали в нужную точку над датчиком. В том же случае, когда усиливается поле проводника с током, постоянный магнит существенно искажает поле, поэтому в **подразделе 4.2.2** рассматривается движение микрогранулы в поле постоянного прямоугольного магнита. Установлено, что в этом случае существует три точки, в которые микрогранула может попасть в результате своего движения. Все они лежат на линии, проходящей через центр магнита в направлении вектора намагниченности. Точки, в которых положение микрогранулы будет устойчивым, при уменьшении расстояния между дном кюветы, в которую помещены микрогранулы, смещаются от центра магнита к его граням. Точка неустойчивого равновесия находится в центре.

Исследуется возможность ускорения осаждения микрогранул полем постоянного цилиндрического магнита, размеры которого существенно превышают размеры кюветы с микрогранулами. В этом случае одна из точек устойчивого равновесия замещается точкой неустойчивого, а точка

неустойчивого равновесия в центре пропадает. Обе точки при уменьшении расстояния между дном кюветы и магнитом смещаются от периферии к краям магнита неустойчивого равновесия замещает собой точку устойчивого.

Раздел 4.3 посвящен еще одному практическому приложению полученных результатов, а именно, задаче о тестировании печатных плат. Рассматривался прямолинейный проводник платы шириной $h = 1$ мм с дефектом в виде прямоугольного выреза размерами $k = 200$ мкм, $l = 400$ мкм толщиной 18 мкм, по которому течет ток силой 1 А.

Поскольку реальная плата содержит проводники конечных размеров, и проводник, содержащий дефект, может иметь изгибы и сужения, предусмотренные конструкцией, более удобным оказалось искать не все поле проводника с дефектом, а то возмущение, которое вносит в него дефект. Для этого вычислялось поле от части проводника, содержащей дефект, а затем из него вычиталось поле, которое создавал бы проводник без дефекта такой же длины, ток в котором направлен в противоположную сторону. Таким образом, рассматривалось поле, создаваемое вихревым током, локализованным в ограниченной области пространства. Дополнительно вычисляется дипольный момент, создаваемый соответствующим вихревым током. Сравнение z-х компонент этих полей (которые на практике измеряет датчик) на различных высотах над проводником приведено на рис. 12.

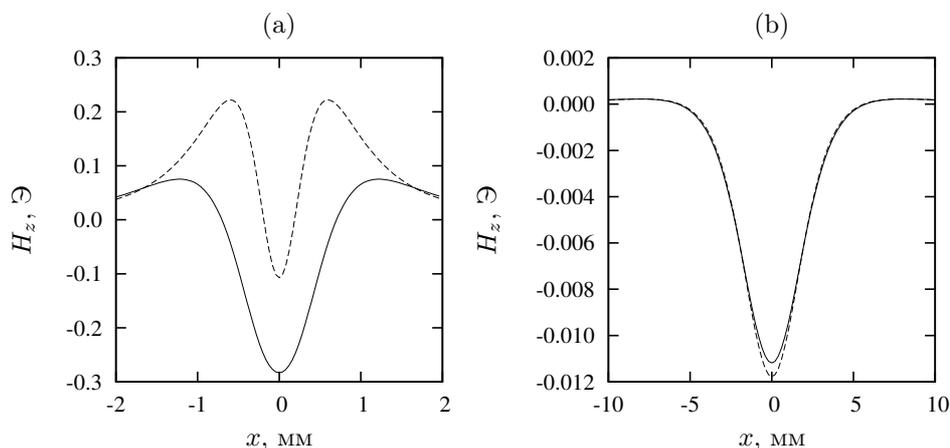


Рис. 12. Распределение z-составляющей магнитного поля вдоль проводника со стороны дефекта на высотах 400 мкм (а) и 4 мм (б) над проводником.

Было установлено, что уже на высотах в 2-3 раза превышающих размеры дефекта возмущение поля, обусловленное дефектом, можно моделировать полем эффективного диполя.

В **Главе 5 (Заключении)** подведены итоги диссертационной работы

и сформулированы **основные положения, выносимые на защиту:**

1. Разработан метод, позволяющий получать приближенные аналитические решения для распределений тока в двумерных проводниках содержащих участки, плотность тока в которых можно считать однородной по всей ширине проводника.
2. Получены в аналитическом виде отображения, переводящие верхнюю комплексную полуплоскость в полосы, изогнутые под углами 30° , 60° и 120° , с помощью которых найдены новые аналитические решения задачи о распределении токов в соответствующих проводниках.
3. Разработан способ построения отображения верхней комплексной полуплоскости на полосу, изогнутую под углом, в которой внутренний угол скруглен симметричной дугой. Данный способ позволил получить аналитические решения для распределений плотности тока, в которых отсутствуют нефизические сингулярности.
4. Найдено точное аналитическое решение задачи о распределении температуры в тонком проводящем диске, по которому протекает постоянный ток и исследованы предельные случаи, соответствующие преобладанию различных механизмов теплоотвода.
5. Предложена эффективная схема численного решения задачи о распределении температуры в двумерных проводниках методом конечных элементов, использующая полученные конформные преобразования для оптимизации задания узлов триангуляции в областях сложной формы.
6. Показано, что точки экстремума температуры в проводнике, могут не совпадать с точками, в которых выделяется максимальное джоулево тепло. Найдены критерии физического подобия распределений температуры в геометрически подобных проводниках, нагреваемых токами с равной плотностью.
7. В рамках разработанного подхода рассчитаны магнитные поля для ряда прикладных задач. Получено поле пондеромоторных сил, действующих на магнитную микрогранулу в поле прямоугольного витка с током. Установлена возможность точного позиционирования микрогранулы полем постоянного магнита.
8. Рассчитан вклад, который вносит в магнитное поле проводника печатной платы дефект прямоугольной формы и исследована возможность его аппроксимации полем эффективного диполя.

В **Приложения** вынесены громоздкие вычисления, несущественные для понимания основного текста диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Герасименко Т. Н., Поляков, П. А. Распределение температуры в тонком проводящем диске, нагреваемом постоянным током. — *Вестник Моск. ун-та. Физ., Астрон.* — 2012. — № 3. — С. 63–66.
2. Герасименко Т. Н., Поляков П. А., Касаткин С. И., Амеличев В. В. Новый метод управления магнитными наногранулами в магниторезистивном биосенсоре. — *Датчики и системы* — 2012. — №1. — С.3–6.
3. Амеличев В. В., Герасименко Т.Н., Поляков П. А., Касаткин С. И. Градиентное магнитное поле для управления магнитными микро- и наногранулами в вязкой среде. — *Датчики и системы* — 2011. — №1. — С.15–19.
4. Герасименко Т. Н., Иванов В. И., Поляков П. А., Попов В. Ю. Применение конформных преобразований к краевым задачам расчета токов в полосковых проводниках. — *Фундамент. и прикл. матем.* — 2009. — Т. 15, № 6. — С. 3–14.
5. Вагин Д. В., Герасименко Т. Н., Поляков П. А. Точное аналитическое выражение для индукции магнитного поля образца прямоугольной формы. — *Вестник Моск. ун-та. Физ., Астрон.* — 2008. — № 6. — С. 54–56.
6. Программа для ЭВМ «Расчет распределений температур в плоских проводниках, нагреваемых постоянным током. Версия 1»: свидетельство о регистрации электронного ресурса №18614 от 25.10.2012 г. /Т. Н. Герасименко, П. А. Поляков. Инв. номер ВНТИЦ №50201251288 от 02.11 2012 г.
7. Герасименко Т. Н., Поляков П. А. Особенности распределений температуры в плоских проводниках различной конфигурации //Сборник трудов XX международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». (16-18 ноября 2012 г., Фирсановка, Московская обл.) — М.: изд-во «Альянсинвест», 2012. — С.371–378.

8. Герасименко Т. Н., Поляков П. А., Касаткин С. И. Новый метод управления магнитными наногранулами в магниторезистивном биосенсоре. //Труды и пленарные доклады участников конференции УКИ'12 / Научное издание. Электрон. текстовые дан. - М.:ИПУ РАН, 2012 — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) — ISBN 978-5-91450-100-3 — С. 000688-000694
9. Герасименко Т. Н., Поляков П.А. Точное аналитическое решение задачи о нагреве тонкого проводящего диска постоянным током. //Сборник трудов XIX международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». (18-20 ноября 2011 г., Фирсановка, Московская обл.) — М.: изд-во МЭИ, 2011. — С.291–300.
10. Герасименко Т. Н., Поляков П. А. Исследование влияния пондеромоторной магнитной силы на движение микроскопической частицы в вязкой жидкости. //Сборник трудов XIX международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». (18-20 ноября 2011 г., Фирсановка, Московская обл.) — М.: изд-во МЭИ, 2011. — С.280–290.
11. Polyakov P. A., Gerasimenko T. N., Giudjenov I. Application of conformal mapping technique to problems of direct current distribution in thin film wires. //Proceedings of the Fourth International Scientific Conference — FMNS2011(8 – 11 June 2011, Faculty of Mathematics and Natural Science South-West University «Neofit Rilski» Blagoevgrad, Bulgaria), 2011. — Vol.1. — Pp.367–372.
12. Герасименко Т.Н., Поляков П.А., Касаткин С.И. Управление процессом осаждения и удаления магнитных микрогранул в вязкой среде. //Сборник трудов Второй российской конференции с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения (теория, методы, алгоритмы, исследования и разработки)» / Научное издание. Электрон. текстовые дан. - М.:ИПУ РАН, 2010 — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) — ISBN 978-5-91450-061-7 — С. 000332–000340
13. Герасименко Т. Н., Поляков П. А. Аналитический метод расчета распределения плотности тока в плоских проводниках, изогнутых под произвольным углом. //Сборник трудов XVIII международной конференции «Электромагнитное поле и материалы» (19-21 ноября 2010 г., Фирсановка, Московская обл.). — М.: изд-во МЭИ, 2010. — С.252–265.

14. Герасименко Т. Н., Поляков П. А. Точное аналитическое решение задачи о двумерном распределении токов, обтекающих прямоугольную область в ленточном проводнике. //Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и связь» (14-16 ноября 2008 г., Фирсановка, Московская обл.). — М.: изд-во МЭИ, 2008. — С.214–219.
15. Вагин Д. В., Герасименко Т. Н., Поляков О.П., Поляков П. А., Русаков А. Е., Русакова Н. Е. Расчет магнитного поля одноосевого домена. //Сборник статей по материалам Международной конференции «Радиолокация и связь» (9-11 ноября 2007 г., Фирсановка, Московская обл.). — М.: изд-во МЭИ, 2007. — С. 131–133.
16. Герасименко Т. Н., Поляков П. А., Герасименко Н. И., Касаткин С. И. Теория усилителя магнитного поля на основе ферромагнитной пластинки. //Сборник трудов 17-й международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие» (20-22 ноября 2009 г., Фирсановка, Московская обл.). — М.: изд-во МЭИ, 2009. — С.152–158.
17. Герасименко Т. Н. Аналитический метод расчета статического магнитного поля плоского проводника с прямоугольным дефектом //Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2009». Секция «Физика». Сборник тезисов. — М.: Физический факультет МГУ, 2009. — С.12–13.
18. Вагин Д. В., Герасименко Т. Н. Точное аналитическое решение задачи магнитостатики в случае однородно намагниченного параллелепипеда. //Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2007». Секция «Физика». Сборник тезисов. — М.: Физический факультет МГУ, 2007. — С.245–246.