Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

На правах рукописи

Баев Андрей Валерьевич

Применение Принципа Лагранжа для построения оптимальных алгоритмов решения линейных обратных задач математической физики

Специальность 01.01.03 — математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Ягола А. Г.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Леонов А. С.
	доктор физико-математических наук, профессор Магарил-Ильяев Г. Г.
Ведущая организация:	МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского.

Защита диссертации состоится 20 ноября 2008 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: Россия, 119992, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, Северная физическая аудитория.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан «16» октября 2008 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета профессор Грац Ю. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Настоящая диссертация посвящена специальным вопросам математической теории обратных задач и задач оптимального восстановления. Существенная часть прикладных физических задач сводится к решению линейных обратных задач. Развитие теории обратных задач началось более века назад. На данный момент разработаны многочисленные методы их исследования, и построено много методов решения.

Все прикладные задачи имеют неточные входные данные. В связи с этим необходимо классифицировать обратные задачи по тому, как влияет погрешность входных данных на ответ задачи и на его погрешность. К примеру, Ж. Адамар ввёл классификацию обратных задач по так называемому свойству корректности [3]. *Корректной* (*корректно поставленной*) задачей он называл любую задачу, у которой решение

1) существует,

2) единственно и

3) непрерывно зависит от входных данных.

Все остальные задачи Ж. Адамар называл *некорректными* (*некорректно поставленными*). Т.е. *некорректной задачей* считалась задача, у которой нарушается хотя бы одно из трёх свойств корректной задачи.

Оказывается, что абсолютное большинство обратных задач, к которым сводятся прикладные задачи, являются некорректно поставленными. В связи с этим в середине XX века начала развиваться теория некорректных задач, и начали разрабатываться методы их решения. Приближение для точного решения можно находить разными методами. Но в большинстве случаев сами некорректные задачи решать не имеет смысла. Именно на это обратил внимание Ж. Адамар. Однако, необходимость решать эти задачи осталась. Основные результаты исследований можно найти в работах [17, 12, 13, 2, 9, 19, 20, 1, 14] и в библиографии к ним.

Линейную обратную задачу можно представить в виде следующей задачи поиска элемента z:

$$Az = u, \quad z \in M. \tag{1}$$

Здесь z — "неизвестная характеристика" рассматриваемой задачи, u — "известная характеристика", $A : Z \to U$ — "известный" линейный непрерывный оператор из нормированного пространства Z в нормированное пространство U, $M \subset Z$ — "известное" *множество априорных ограничений.*

Для обратной задачи очень часто невозможно оценить погрешность решения. Это связано с тем, что информации о решении слишком мало. Но в ряде случаев возможно введение такого множества априорных ограничений, что существует конечная оценка погрешности решения. Основные результаты об исследовании априорной информации в обратных задачах можно найти в работах [13, 18, 9, 10].

Если множество априорных ограничений позволяет восстанавливать решение с конечной погрешностью, то в этом случае можно искать метод решения задачи, который имеет наименьшую погрешность среди всех возможных методов решения. Для этого обратной задаче сопоставляется задача *оптимального восстановления*. Основные результаты исследований задач оптимального восстановления можно найти в работах [6, 5, 21, 8, 4] и в библиографии к ним. Применение задачи оптимального восстановления даёт "наилучшее" приближение к решению, т.е. приближение с минимально возможной *априорной погрешностью*.

Пусть в рассматриваемой задаче (1) требуется найти приближение для точного решения и погрешность этого приближения. А точнее, требуется найти приближение для *информации о точном решении* и погрешность этого приближения по *информации о данных* u, A, M. Смысл здесь следующий. В большинстве задач линейные пространства Z и U являются бесконечномерными. В связи с этим принципиально невозможно получить в качестве входной информации сами объекты u, A, M. Возможно лишь задание некоторой конечной информации о них. Таким же образом обстоит дело с бесконечномерным вектором z, который мы рассматриваем как решение задачи.

В большинстве прикладных работ по задачам оптимального восстановления рассматривается ситуация, когда множество M является бесконечномерным подмножеством линейного пространства Z. В связи с этим удавалось находить метод и погрешность оптимального восстановления лишь для конкретных задач. Более того, во многих публикациях рассматривается ситуация, когда область значений оператора A также бесконечномерна, т.е. пространство $\operatorname{span} \operatorname{Im} A$ бесконечномерно, а элемент u является бесконечномерным вектором. Заметим, что в прикладных задачах область значений оператора A всегда конечномерна.

Развитие теории задач оптимального восстановления длится около полувека, однако, лишь недавно были получены результаты, позволяющие эффективно решать линейные задачи оптимального восстановления по информации определённого типа. В теории экстремальных задач давно был известен *Принцип Лагранжа*. Но лишь недавно была доказана связь *множителей Лагранжа*, фигурирующих в Принципе Лагранжа, с алгоритмом решения задачи оптимального восстановления [16].

Во многих прикладных задачах нет возможности найти приближение для решения с конечной погрешностью. Эта ситуация характерна, если известное множество априорных ограничений слишком широко, а информация об элементе u достаточно скудна. В этом случае можно применять, например, регуляризацию А. Н. Тихонова, т.е. строить так называемый *регуляризирующий алгоритм*. На данный момент построено большое множество регуляризирующих алгоритмов, введено много их классификаций, доказаны многочисленные теоремы об их свойствах.

Основной целью теории регуляризации некорректных задач является построение и исследование регуляризирующих алгоритмов. В этой теории известно, что в любой обратной задаче регуляризирующий алгоритм не единственный (если он существует). В связи с этим возникает проблема выбора того или иного алгоритма и проблема сравнения алгоритмов. Уже построено много так называемых *оптимальных по порядку регуляризирующих алгоритмов*. Но наиболее интересна задача построения *оптимального регуляризирующего алгоритма* и его эффективная реализация в компьютерной программе.

Понятийный аппарат и методы исследования. Работа опирается на терминологию и результаты из работ по теории множеств, по топологии, функциональному анализу, теории линейных операторов, по теории дифференциальных и интегральных уравнений, по теории обратных и некорректных задач, по выпуклому анализу и теории экстремальных задач, по теории оптимального восстановления, по линейному программированию, по численным алгоритмам решения математических задач и их реализации в компьютерных программах, по языкам программирования, по классической теории электромагнитного поля.

В качестве основного инструмента исследования обратных задач автором диссертации были выбраны методы теории оптимального восстановления и теория регуляризации для некорректных задач. *Принцип Лагранжа для задач оптимального восстановления* используется автором настоящей диссертации в качестве фундаментальной теоремы, на основе которой доказываются многие теоремы и строятся алгоритмы решения задач.

Цели диссертации. Для настоящей работы ставилась задача достижения следующих целей.

1. Построение и обоснование алгоритма решения линейной задачи оптимального восстановления с множеством априорных ограничений, являющимся множеством непрерывных функций на отрезке, с известной константой Липшица и ограниченных по модулю известным числом.

2. Построение и математическое обоснование оптимального регуляризи-

рующего алгоритма для линейных обратных задач с истокопредставимым решением. Также ставилась цель нахождения *апостериорной оценки погрешности* для искомого алгоритма.

3. Применение разработанной теории и построенных алгоритмов к решению задач с линейными интегральными уравнениями первого и второго рода. В данном случае рассматриваются только те задачи, в постановке которых присутствует выпуклое уравновешенное множество априорных ограничений.

4. Применение разработанной теории и построенных алгоритмов к решению прикладной физической задачи.

Среди целей имеются как чисто теоретические направления исследования, так и прикладные задачи.

Научная новизна. В настоящей работе представлено несколько результатов, которые впервые были получены автором. Их краткая характеристика приведена в следующих двух списках. Первый список посвящён теоретическим результатам, второй посвящён результатам, относящимся к непосредственному применению теории для решения задач.

Теоретические результаты представлены в следующем списке.

1. Известно много форм постановки обратной задачи, таких что в задаче учитывается и используется то, что информация об операторе A и о правой части u уравнения в задаче (1) задана с погрешностью. Считается, что погрешности задания правой части и оператора известны. Ранее было известно, как сводить обратную задачу с точно известным оператором A к задаче оптимального восстановления. Для случая неточного задания оператора таких результатов не было. Для этого случая автором впервые найдена такая форма постановки обратной задачи, что её можно свести к задаче оптимального восстановления. Эта форма постановки обратной задачи была названа *сэт-постановкой*. Автору удалось объединить всю информацию о погрешностях задачи в один объект, который был назван *окрестностью погрешности*, и свести обратную задачу в сэт-постановке к задаче оптимального восстановления. Сформулирована связь задачи оптимального восстановления и обратной задачи в сэт-постановке.

2. Сформулированы и доказаны достаточные условия существования решения так называемой *ассоциированной* задачи. Ассоциированная задача — важная с исследовательской точки зрения задача; она применяется в Принципе Лагранжа, о котором было упомянуто выше.

3. Впервые построен, описан, обоснован и реализован в компьютерной программе многоэтапный алгоритм решения линейной задачи оптимального восстановления с ограниченным, выпуклым, уравновешенным множеством априорных ограничений. Автору удалось построить такой алгоритм, который применим к широкому классу задач. Суть алгоритма состоит в
   a) применении конечномерной аппроксимации,
   b) исследовании связи исходной задачи и её конечномерного аналога и
   c) решении задачи оптимального восстановления в конечномерном пространстве (в работе полностью исследованы случаи, когда в задаче присутствуют ограничения линейного или квадратичного вида).
   На всех трёх этапах фундаментальную роль играет Принцип Лагранжа. На нём основываются все теоремы, на которые опирается алгоритм.

Результаты применения теории представлены в следующем списке.

1. Разработанная теория и построенные алгоритмы применены для построения *оптимального регуляризирующего алгоритма* для линейных обратных задач с *истокопредставимым* решением. Автором не только построен оптимальный регуляризирующий алгоритм, но и доказаны его оптимальность и регуляризирующее свойство, а также найдена *апостериорная оценка погрешности*. Построенный алгоритм базируется на результатах работ по оптимальному восстановлению и по построению регуляризирующих алгоритмов [16, 7].

2. Разработанная теория применена к решению задач с линейными интегральными уравнениями, в постановке которых присутствует выпуклое уравновешенное множество априорных ограничений. Автором описаны оптимальные алгоритмы решения
   a) интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода с непрерывным ядром,
   b) интегрального уравнения Абеля.
   Работа алгоритмов проиллюстрирована на примере решения обратной задачи для уравнения теплопроводности.

3. Построенные алгоритмы применены к решению прикладной задачи нахождения вектора намагниченности (плотности магнитного момента) тела по информации о магнитном поле вне тела.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту. На защиту выносятся положения теоретического и прикладного характера. Теоретические положения приведены в следующем списке.

1. Для случая, когда оператор A и правая часть u задачи (1) заданы с погрешностью, линейная обратная задача (1) с выпуклым уравновешенным множеством M сведена к задаче оптимального восстановления. Для этого понадобилось ввести сэт-постановку обратной задачи.

2. Показана связь обратной задачи в сэт-постановке и задачи оптимального восстановления.

3. Найдены достаточные условия существования решения ассоциированной задачи, которые широко применимы в решении практических задач.

4. Построен, обоснован и реализован в виде компьютерной программы алгоритм решения задачи оптимального восстановления, применимый в большинстве прикладных задач.

5. Показана универсальность Принципа Лагранжа для рассматриваемых задач: он используется при доказательстве большого числа теорем.

Положения прикладного значения приведены в следующем списке.

1. Разработан оптимальный регуляризирующий алгоритм для задачи (1) с множеством априорных ограничений вида $M = \operatorname{Im} V$, где V — линейный инъективный компактный оператор, действующий из некоторого гильбертова пространства в пространство Z. Алгоритм позволяет решать задачи из рассмотренного семейства, не используя конечномерную аппроксимацию.

2. Многоэтапный алгоритм решения задачи оптимального восстановления применён для задач с интегральными уравнениями и для прикладной обратной задачи поиска намагниченности тела по информации о магнитном поле вне тела.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в работе результаты актуальны для математических исследований, задач физики и задач обработки результатов физического эксперимента.

Среди направлений математического исследования выделяются теория обратных задач, теория некорректных задач, теория задач оптимального восстановления, теория задач математической физики. Доказанные в работе теоремы и построенные алгоритмы вносят существенный вклад в развитие перечисленных математических направлений.

Среди физических задач отметим обратные задачи механики, задачи томографии, обратные задачи астрофизики, обратные задачи геофизики, задачи спектроскопии, обратные задачи линейной оптики, обратные задачи линейной акустики, обратные задачи радиофизики, задачи исследования материалов и дефектов в них, задачи по обработке изображений. Описанные в работе методы решения применимы к линейным обратным задачам, встречающимся в перечисленных областях.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на научном семинаре “Обратные задачи математической физики” под руководством А. Б. Бакушинского, А. В. Тихонравова и А. Г. Яголы, проводящемся в Научно-исследовательском вычислительном центре МГУ (28 февраля 2007 г., 3 октября 2007 г.); на научном семинаре кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (23 марта 2007 г.). Результаты работы докладывались на следующих конференциях.

- XIV-ая Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по фундаментальным наукам “Ломоносов–2007”, секция “Физика” (Россия, Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет, 12 апреля 2007 г.).

- Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвящённая 75-летию академика М. М. Лаврентьева (Россия, Новосибирск, Дом Учёных СО РАН, 22 августа 2007 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ (2 статьи в электронном научном журнале, 3 статьи в печатных научных журналах и 2 тезиса конференций). В журналах из перечня ВАК опубликовано 2 статьи. Ещё 1 статья принята к публикации в печатном научном журнале из перечня ВАК.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из титульного листа, оглавления, введения, шести глав, заключения и списка литературы. Объём диссертации составляет 140 страниц. В ней имеется 15 рисунков. В списке литературы 133 наименования.

Ключевые слова. Обратные задачи, некорректные задачи, оптимальное восстановление, априорная информация о решении задачи, Принцип Лагранжа, конечномерная аппроксимация, линейные интегральные уравнения Фредгольма первого и второго рода, интегральное уравнение Абеля, истокопредставимое решение обратной задачи, оптимальный регуляризирующий алгоритм, апостериорная оценка погрешности, задача размагничивания кораблей.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** кратко описаны основные моменты истории развития теории обратных задач и теории задач оптимального восстановления. Акцент в изложении делается на нерешённые вопросы, причём те, которые исследовались автором. Отмечены основные пути развития теорий, а также последние результаты. Даются многочисленные ссылки на литературу, где можно найти описание теорий, их применение и теоремы. Описываются цели диссертации, её основные научные результаты и области их применения. Рассказывается о докладах и публикациях автора, посвящённых вопросам, исследуемым в диссертации. Приводится краткое содержание диссертации по главам.

В **первой** главе приводятся различные варианты постановок обратных задач и задач оптимального восстановления. Рассматривается линейная обратная задача, и ей сопоставляются задачи оптимального восстановления линейного функционала, которые в разной степени учитывают погрешность данных в обратной задаче. Проделаны предварительные построения, приведены примеры и указаны соображения, приводящие к постановке задач в наиболее общей форме. Окончательная чёткая формулировка задач и их исследование отложены до следующей главы.

Во **второй** главе приведены сэт-постановка обратной задачи, формулировка задачи оптимального восстановления и формулировка ассоциированной задачи. Приведём эти формулировки [29].

Пусть Z и U — действительные линейные пространства, $A : Z \to U$ — линейный оператор. Рассмотрим множество $M \subset Z$ и элемент $\bar{z} \in M$. Обозначим $\bar{u} := A\bar{z}$ и рассмотрим задачу поиска элемента $\bar{z}$ из уравнения:

$$Az = \bar{u}, \quad z \in M. \tag{2}$$

Многие физические задачи могут приводить к обратным задачам такого вида. Но на практике не всегда точно известны элемент $\bar{u}$ и оператор A.

Для решения конкретных прикладных задач необходимо модифицировать постановку задачи (2). Одной из особенностей практического решения этой задачи является то, что вне зависимости от размерности пространства U об элементе $\bar{u}$ известна лишь конечная информация, и она является неточной, т.е. задана с погрешностью. Пусть информация об элементе $\bar{u}$ задаётся набором из m действительных чисел. Далее всюду будем пользоваться обозначением $Y := \mathbb{R}^m$. Введём линейный оператор $Q_m : U \to Y$. Пусть в задаче приближённо известен m-мерный вектор $Q_m\bar{u}$, а именно, точно задан элемент $v \in Y$ и известно выпуклое уравновешенное множество $\Omega \subset Y$, такие что $v - Q_m\bar{u} \in \Omega$. Это включение эквивалентно неравенству $\|v - Q_m\bar{u}\| \leqslant \varepsilon$, если Ω является замкнутым шаром радиуса ε с центром в нуле. Также будем считать, что вместо оператора A мы умеем точно вычислять лишь линейный оператор $F : Z \to Y$, являющийся приближением для оператора Q_mA. Пусть в задаче известно выпуклое уравновешенное подмножество $\mathcal{O} \subset Y$, такое что

$$\mathcal{O} \supset \Omega + (Q_mA - F)(M).$$

Легко проверить, что $v - F\bar{z} \in \mathcal{O}$. Это можно интерпретировать следующим образом: считаем, что оператор Q_mA известен точно и равен F, а правая часть обратной задачи известна с погрешностью, задаваемой уже не множеством Ω, а множеством $\mathcal{O}$. Всю информацию о погрешности задания оператора A и правой части $\bar{u}$ объединим в множество $\mathcal{O}$.

Итак, считаем, что в обратной задаче поиска элемента $\bar{z}$ известны множество $M \subset Z$, оператор $F : Z \to Y$, вектор $v \in Y$ и множество $\mathcal{O} \subset Y$, такие что

$$\bar{z} \in M, \qquad v - F\bar{z} \in \mathcal{O}. \tag{3}$$

Эту постановку обратной задачи будем называть *сэт-постановкой* обратной задачи.

В качестве ответа задачи имеет смысл требовать лишь конечный набор чисел. Разобьём задачу их поиска на несколько задач поиска одного числа. Эти задачи сформулируем в виде следующей задачи: найти приближение для числа $\ell(\bar{z})$, где ℓ — линейный функционал на Z. Вместо поиска элемента $\bar{z}$ из условий (3) будем решать задачу *оптимального восстановления функционала ℓ по информации* $(M, F, \mathcal{O})$, а именно, пусть известны функционал ℓ, множество M, оператор F и множество $\mathcal{O}$, а требуется найти решение такой экстремальной задачи:

$$\sup_{\substack{z \in M,\\ y \in Y:\, y - Fz \in \mathcal{O}}} |\langle \ell, z\rangle - \varphi(y)| \to \min_{\varphi}, \quad \varphi \in Y^*. \tag{4}$$

Множество M называется *множеством априорных ограничений*, оператор F называется *информационным оператором*, множество $\mathcal{O}$ назовём *окрестностью погрешности*. Элемент $\widehat{\varphi}$, на котором достигается минимум в задаче (4) называется *методом оптимального восстановления*, а значение минимума в этой задаче называется *погрешностью оптимального восстановления* и обозначается $E(\ell, M, F, \mathcal{O})$. Любое отображение $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ называется *методом восстановления* в задаче (4). Выражение, минимизируемое в задаче (4), называется *априорной погрешностью метода восстановления* φ и обозначается $\mathcal{E}(\ell, M, F, \mathcal{O}, \varphi)$. Если ℓ и F линейны, а M и $\mathcal{O}$

выпуклы и уравновешены, то

$$E(\ell, M, F, \mathcal{O}) = \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^Y} \mathcal{E}(\ell, M, F, \mathcal{O}, \varphi),$$

Это следует, например, из [15]. В качестве приближения для числа $\ell(\bar{z})$ возьмём число $\widehat{\varphi}(v)$. Тогда погрешностью этого приближения будет число $E(\ell, M, F, \mathcal{O})$.

Задачей, *ассоциированной* к задаче (4), называется следующая задача:

$$\langle \ell, z \rangle \to \max_{(z,y)}, \quad (z, y) \in Z \times Y, \quad z \in M, \quad y - Fz \in \mathcal{O}, \quad y = 0. \qquad (5)$$

В диссертации доказана теорема существования решения ассоциированной задачи. Сформулируем её.

Теорема. *Пусть Z — нормированное пространство, $Y = \mathbb{R}^m$, $\ell \in Z^*$, множество $M \subset Z$ слабо секвенциально компактно в Z, линейный оператор $F : Z \to Y$ непрерывен, множество $\mathcal{O} \subset Y$ выпукло и замкнуто. Тогда существует решение задачи (5).*

Сформулируем Принцип Лагранжа, доказанный в [16].

Теорема (Принцип Лагранжа для задачи оптимального свосстановления). *Пусть M и $\mathcal{O}$ выпуклы и уравновешены, функционал ℓ и оператор F линейны. Определим функцию Лагранжа $\mathcal{L} : (Z \times Y) \times Y^* \to \mathbb{R}$, $\mathcal{L}((z, y), \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -\langle \ell, z \rangle + \langle \lambda, y \rangle$. Если элемент $(\widehat{z}, 0) \in Z \times Y$ является допустимой точкой в задаче (5) (т.е. $\widehat{z} \in M$ и $-F\widehat{z} \in \mathcal{O}$), тогда*

1. следующие два условия эквивалентны:

а) $(\widehat{z}, 0)$ является решением задачи (5);

б) $\exists \widehat{\lambda} \in Y^* : \ \mathcal{L}((\widehat{z}, 0), \widehat{\lambda}) = \inf\limits_{\substack{z \in M, \\ y \in Y : \, y - Fz \in \mathcal{O}}} \mathcal{L}((z, y), \widehat{\lambda})$;

2. при выполнении этих двух эквивалентных условий линейный функционал $\varphi = \widehat{\lambda}$ является методом оптимального восстановления в задаче (4), и его погрешность такова: $E(\ell, M, F, \mathcal{O}) = \langle \ell, \widehat{z} \rangle$.

Аргумент λ функции Лагранжа называется *множителем Лагранжа.*

В **третьей** главе предложен алгоритм решения линейных обратных задач с выпуклыми и уравновешенными множеством априорных ограничений и окрестностью погрешности. Обратная задача (3) сводится к задаче оптимального восстановления (4), для исследования которой применяются теоремы, приведённые в предыдущих главах. Основную роль в исследовании задач играет Принцип Лагранжа.

Пространство Z в задаче (2) во множестве случаев бывает бесконечномерным. Для реализации численных алгоритмов исходную задачу можно свести к задаче, где вместо пространства Z и его подмножества M присутствуют их конечномерные аналоги. Это направление было принято автором за основное направление поиска алгоритмов решения задачи оптимального восстановления. В результате удалось построить алгоритм нахождения метода и погрешности оптимального восстановления для весьма широкого класса линейных задач. К тому же этот класс задач охватывает абсолютное большинство практических задач математической физики. Если быть точным, то были найдены не метод и погрешность оптимального восстановления, а метод, погрешность которого сколь угодно близка к погрешности оптимального восстановления. Для решения задачи по пути конечномерной аппроксимации желательно установить связь решений исходной задачи и её конечномерного аналога. Анализ этой связи впервые проведён в [29]. Варианты алгоритмов решения задачи оптимального восстановления в конечномерных пространствах были предложены в [29, 28]. Результаты этих работ представлены в третьей главе.

Опишем используемую схему конечномерной аппроксимации. Если пространство Z конечномерно, то никакого сведения к задаче в конечномерном пространстве не требуется. Далее в описании содержания третьей главы будем считать, что пространство Z бесконечномерно. Замена пространства Z на некоторый конечномерный аналог может быть представлена в виде действия линейного оператора. Рассмотрим пару линейных пространств Z и $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, и пару линейных операторов $P_n : Z \to \mathbb{R}^n$ и $L_n : \mathbb{R}^n \to Z$. Оператор P_n сопоставляет элементу из Z его конечномерный аналог, а оператор L_n по конечномерному вектору строит бесконечномерный вектор пространства Z. Рассмотрение произвольных операторов P_n и L_n является бессмысленным, поэтому введём условия, связывающие эти операторы с другими параметрами задачи:

$$\exists \varkappa^n \in (\mathbb{R}^n)^* : \quad \ell = \varkappa^n \circ P_n, \tag{6}$$

$$L_n P_n(M) \subset M, \tag{7}$$

$$P_n L_n = \hat{1}_{\mathbb{R}^n}, \tag{8}$$

где $\hat{1}_{\mathbb{R}^n}$ — единичный оператор в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что мы умеем вычислять линейный оператор $A_0 : Z \to U$, являющийся приближением для оператора A из задачи (2). Обозначим $B \overset{\text{def}}{=} Q_m A_0 L_n$ и $M_n \overset{\text{def}}{=} P_n(M)$, т.е. $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $M_n \subset \mathbb{R}^n$. Это конечномерные аналоги оператора F и множества M. Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального восстановления функционала на конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\sup_{\substack{x \in M_n, \\ y \in Y :\, y - Bx \in \mathcal{O}}} |\langle \varkappa^n, x \rangle - \langle \varphi, y \rangle| \to \min_{\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m. \tag{9}$$

Это задача оптимального восстановления функционала $\varkappa^n$ по информации $(M_n, B, \mathcal{O})$. Ассоциированной будет задача

$$\langle \varkappa^n, x\rangle \to \max_{(x,y)}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \;\; x \in M_n, \;\; y - Bx \in \mathcal{O}, \;\; y = 0. \quad (10)$$

Функция Лагранжа задачи (9) такова:

$$\mathcal{L}_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_n((x,y),\lambda) = -\langle \varkappa^n, x\rangle + \langle \lambda, y\rangle.$$

Автором в диссертации доказано множество теорем о связи задач оптимального восстановления в бесконечномерном пространстве и в конечномерном. Сформулируем две из этих теорем. Сначала сформулируем доказанную в диссертации теорему о сведении к конечномерной задаче. Её доказательство опирается на Принцип Лагранжа.

Теорема (О сведении к конечномерной задаче). *Положим*

$$F := Q_m A_0 L_n P_n$$

в задачах (4) и (5). Пусть выполнено условие (6).
1) Если $(\widehat{z}, 0) \in Z \times \mathbb{R}^m$ — решение задачи (5), а $\widehat{\lambda}$ — множитель Лагранжа, при котором минимум функции Лагранжа для задачи (4) достигается на $(\widehat{z}, 0)$, т.е.

$$-\langle \ell, \widehat{z}\,\rangle = \inf_{\substack{z\in M,\\ y\in\mathbb{R}^m:\, y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} \Big(-\langle \ell, z\rangle + \langle\, \widehat{\lambda}, y\rangle\Big),$$

тогда $(P_n\widehat{z}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ является решением задачи (10), $\widehat{\lambda}$ является методом оптимального восстановления задачи (9), и его погрешность равна $\langle \ell, \widehat{z}\,\rangle$.
2) Если $(\widehat{x}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — решение задачи (10), а $\widehat{\lambda}_n$ — множитель Лагранжа, при котором минимум функции Лагранжа для задачи (9) достигается на $(\widehat{x}, 0)$, т.е.

$$-\langle \varkappa^n, \widehat{x}\,\rangle = \inf_{\substack{x\in M_n,\\ y\in\mathbb{R}^m:\, y - Bx \in \mathcal{O}}} \Big(-\langle \varkappa^n, x\rangle + \langle\, \widehat{\lambda}_n, y\rangle\Big),$$

тогда при любом $\widehat{z} \in M$, таком что $P_n\widehat{z} = \widehat{x}$, точка $(\widehat{z}, 0) \in Z \times \mathbb{R}^m$ является решением задачи (5), $\widehat{\lambda}_n$ является методом оптимального восстановления задачи (4), и его погрешность равна $\langle \varkappa^n, \widehat{x}\,\rangle$. Если при этом выполнены условия (7) и (8), то элемент $L_n\widehat{x}$ удовлетворяет условиям на $\widehat{z}$.

Эта теорема позволяет решать вместо исходной задачи поиска метода и погрешности оптимального восстановления задачу оптимального восстановления в конечномерном пространстве.

Сформулируем доказанную в диссертации теорему о связи погрешностей и методов оптимального восстановления для задач в конечномерном и бесконечномерном пространстве. Для этого надо модифицировать окрестность погрешности. Будем считать, что в задаче известен вектор $\Delta^n \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющий условиям

$$\Delta_j^n \equiv (\Delta^n)_j \geqslant \sup_{z\in M} |(Q_m A_0(z - L_n P_n z))_j| \quad \forall j \in \{1;\dots;m\}. \tag{11}$$

Введём *невозмущённую* и *возмущённую* окрестности погрешности. Пусть $\mathcal{O}_0 \subset Y$ — выпуклое уравновешенное множество, такое что

$$\mathcal{O}_0 \supset \Omega + Q_m(A - A_0)(M);$$

$$\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_0 + \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y_j| \leqslant \Delta_j^n \ \ \forall j \in \{1;\dots;m\}\ \}.$$

Пусть $\widehat{\lambda}_n \in Y^*$ — решение задачи (9) при $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$, найденное из Принципа Лагранжа, т.е. $\widehat{\lambda}_n$ является тем множителем Лагранжа, существование которого утверждает Принцип Лагранжа. Введём обозначение для погрешности этого метода.

$$E_n := E(\varkappa^n, M_n, B, \mathcal{O}_n) = \mathcal{E}(\varkappa^n, M_n, B, \mathcal{O}_n, \widehat{\lambda}_n).$$

Рассмотрим невозмущённую бесконечномерную задачу (4) при $F = Q_m A_0$ и $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$. Пусть $\widehat{\lambda} \in Y^*$ — её решение, найденное из Принципа Лагранжа, а $\bar{E}$ и $\bar{E}_n$ — погрешности методов $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\lambda}_n$ в этой задаче, т.е.

$$\begin{aligned}\bar{E} &:= \mathcal{E}(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0, \widehat{\lambda}) = E(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0),\\ \bar{E}_n &:= \mathcal{E}(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0, \widehat{\lambda}_n).\end{aligned}$$

Автором доказана следующая

Теорема. [29, 25] *Пусть Z является нормированным пространством, линейный функционал ℓ непрерывен, выпуклое уравновешенное множество M слабо секвенциально компактно в Z, линейный оператор $Q_m A_0$ непрерывен, $\mathcal{O}_0$ замкнуто, выпукло и уравновешено. Рассмотрим последовательность векторов $\{\Delta^n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательности линейных операторов $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, такие что для любого $n \in \mathbb{N}$ $\ P_n : Z \to \mathbb{R}^n$, $L_n : \mathbb{R}^n \to Z$, P_n непрерывен, $\Delta^n \in \mathbb{R}^m$, выполнено (11) и $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta^n = 0$. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия (6), (7) и (8). Тогда $\bar{E} \leqslant \bar{E}_n \leqslant E_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{E}_n = \bar{E}$.*

После того, как сформулирован конечномерный аналог задачи оптимального восстановления, остаётся решить эту конечномерную задачу. Автором приведены и обоснованы алгоритмы решения конечномерной задачи оптимального восстановления (9) для входных данных различного вида

[28]. Эти алгоритмы опираются на Принцип Лагранжа. Была полностью исследована задача оптимального восстановления в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$, если множества M_n и $\mathcal{O}$ задаются линейными и квадратичными ограничениями:

$$M_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ |\langle a_\sigma, x\rangle| \leqslant c_\sigma \ \ \forall\sigma \in \Sigma_0, \\ \|G_\varsigma x\| \leqslant \rho_\varsigma \ \ \forall\varsigma \in \Sigma_1 \},$$

$$\mathcal{O} = \{w \in \mathbb{R}^m \mid \ |\langle \widehat{a}_\sigma, w\rangle| \leqslant \widehat{c}_\sigma \ \ \forall\sigma \in \hat{\Sigma}_0, \\ \left\|\hat{G}_\varsigma w\right\| \leqslant \widehat{\rho}_\varsigma \ \ \forall\varsigma \in \hat{\Sigma}_1 \},$$

где Σ_0 и Σ_1 — конечные множества индексов (возможно пустые), при любом $\sigma \in \Sigma_0 \quad c_\sigma \geqslant 0$, $a_\sigma \in \mathbb{R}^n$ и $a_\sigma \neq 0$, при любом $\varsigma \in \Sigma_1 \quad \rho_\varsigma > 0$, $d_\varsigma \in \mathbb{N}$ и $G_\varsigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{d_\varsigma}$ — линейный оператор. Аналогичные определения мы ввели для объектов $\hat{\Sigma}_0$, $\hat{\Sigma}_1$, $\widehat{c}_\sigma$, $\widehat{a}_\sigma$, $\widehat{\rho}_\varsigma$, $\widehat{d}_\varsigma$, $\hat{G}_\varsigma$. Для таких множеств M_n и $\mathcal{O}$ был построен и обоснован алгоритм решения задачи оптимального восстановления (9).

В **четвёртой** главе приведены примеры применения описанных алгоритмов для обратных задач решения линейных интегральных уравнений. Впервые они были опубликованы в [22]. Рассмотрим отрезки из множества действительных чисел: $T = [a; b]$ и $S = [c; d]$. $Z := C(T)$, $U := C(S)$ — пространства действительных непрерывных функций с sup-нормой. Исследуется задача (2) с множеством априорных ограничений

$$M = \{z \in C(T) \mid \ |z(t) - z(t')| \leqslant N\,|t - t'|\,, \\ |z(t)| \leqslant \gamma \ \ \forall t, t' \in T\}.$$

и различными интегральными операторами $A : Z \to U$. Здесь N и γ — фиксированные положительные числа. Рассмотрены 3 случая для операторов.

1) Уравнение Фредгольма первого рода. $A : Z \to U$ — линейный интегральный оператор с непрерывным ядром $K : S \times T \to \mathbb{R}$, т.е. $Az(s) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_T K(s,t)z(t)\,dt$ и функция K непрерывна.

2) Уравнение Абеля. $Z = U = C([0; b])$, $A : Z \to U$, $Az(s) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^s \frac{1}{(s-t)^\beta} z(t)\,dt$, $\beta \in (0; 1)$.

3) Уравнение Фредгольма второго рода. $Z = U = C(T)$, $A : Z \to U$, $Az(s) \overset{\mathrm{def}}{=} z(s) + \int\limits_T K(s,t)z(t)\,dt$, функция $K : T \times T \to \mathbb{R}$ непрерывна.

В постановке задач считается, что ядро K и правая часть интегрального уравнения (2) заданы с погрешностью. Автором описаны схемы применения алгоритма решения задач, построенного в предыдущих главах. Приведены результаты расчётов модельного примера.

В **пятой** главе построенные алгоритмы и сформулированные теоремы применяются для исследования линейных обратных задач с истокопредставимым решением.

Сначала, в разделе 5.1, строится метод оптимального восстановления для задачи с ограниченным множеством априорных ограничений вида $M = V(S_r)$, где $V : W \to Z$ — линейный непрерывный оператор из гильбертова пространства W в нормированное пространство Z, а S_r — шар в пространстве W известного радиуса $r > 0$ с центром в нуле. Эта задача интересна сама по себе и пригодится для построения оптимального регуляризирующего алгоритма в дальнейшем. Алгоритм решения задачи оптимального восстановления с множеством априорных ограничений $M = V(S_r)$ строится на основе Принципа Лагранжа. Для обоснования построенного алгоритма доказываются соответствующие теоремы. Особенностью предложенного алгоритма является то, что в нём не применяется конечномерная аппроксимация.

Затем, в разделе 5.2, рассматривается задача (2) с действительными нормированными пространствами Z и U, с линейным инъективным непрерывным оператором $A : Z \to U$, с множеством априорных ограничений $M = \operatorname{Im} V$, где $V : W \to Z$ — линейный инъективный компактный оператор из гильбертова пространства W в пространство Z. Для задачи (2) с этими данными строится метод нахождения приближения для числа $\ell(\bar{z})$, который назван *методом расширяющихся компактов для оптимального восстановления значения функционала* [26]. Этот метод опирается на результаты предыдущего раздела и работ [11, 7]. Доказывается, что построенный метод решения задаёт оптимальный регуляризирующий алгоритмом в задаче восстановления функционала. Автором были найдены условия, при которых выполнено это утверждение. В качестве дополнительного результата алгоритм находит так называемую *апостериорную оценку погрешности* для получаемого приближённого решения.

Дадим определения введённым терминам. Обозначим $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Пусть вместо одного множества Ω имеется семейство множеств $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$, такое что для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ множество $\Omega_\varepsilon \subset Y$ обладает следующим свойством: $\sup\limits_{y \in \Omega_\varepsilon} \|y\| \leqslant \varepsilon$. Пусть также вместо оператора A мы умеем точно вычислять лишь его приближение — линейный непрерывный оператор $A_\varepsilon : Z \to U$, такой что $\|A_\varepsilon - A\| \leqslant h(\varepsilon)$. Здесь отображение $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таково, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} h(\varepsilon) = 0$. Для исследования регуляризирующих свойств алгоритма вместо объектов m, Q_m и v необходимо ввести зависимость от параметра ε размерности пространства Y (т.е. $\dim Y = m(\varepsilon)$), параметрическое семейство операторов $\{Q_{m(\varepsilon)}\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$ и семейство векторов $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$, удовлетворяющих условию $v_\varepsilon - Q_{m(\varepsilon)}\bar{u} \in \Omega_\varepsilon$. Положительное число $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ является оценкой погрешности правой части обратной задачи, поскольку $\left\|v_\varepsilon - Q_{m(\varepsilon)}\bar{u}\right\| \leqslant \varepsilon$. Далее будем пользоваться обозначением $Y_\varepsilon := \mathbb{R}^{m(\varepsilon)}$.

Обозначения. Множество всех линейных непрерывных операторов из нормированного пространства Z в нормированное пространство U обозначим $\operatorname{Hom}(Z,U)$. Множество всех линейных инъективных непрерывных операторов из нормированного пространства Z в нормированное пространство U обозначим $\mathcal{BI}(Z,U)$.

Определение. Семейство отображений $R_\varepsilon : \operatorname{Hom}(Z,U) \times Y_\varepsilon \to \mathbb{R}$, параметризуемое числом $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, назовём *регуляризирующим алгоритмом восстановления функционала* $\ell \in Z^*$ *в задаче* (2) с $M = \operatorname{Im} V$ (или просто *регуляризирующим алгоритмом*), если для любого $z \in \operatorname{Im} V$ выполнено условие

$$\sup_{\substack{A'\in\mathcal{BI}(Z,U)\colon \|A'-A_\varepsilon\|\leqslant h(\varepsilon),\\ y\in Y_\varepsilon\colon y-Q_{m(\varepsilon)}A'z\in\Omega_\varepsilon}} |\ell(z) - R_\varepsilon(A_\varepsilon, y)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{12}$$

Этот регуляризирующий алгоритм будем обозначать R.

Определение. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{M} \subset Z$ и $\mathcal{O}_\varepsilon \subset Y_\varepsilon$, такие что $\mathcal{O}_\varepsilon \supset \Omega_\varepsilon + Q_{m(\varepsilon)}(A - A_\varepsilon)(\mathcal{M})$. Для этих объектов определим *обобщённую погрешность регуляризирующего алгоритма* R *на множестве* $\mathcal{M}$:

$$\Delta_0(\varepsilon, R_\varepsilon, \mathcal{M}, \mathcal{O}_\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z\in\mathcal{M}} \left(\sup_{y\in Y_\varepsilon\colon y-Q_{m(\varepsilon)}A_\varepsilon z\in\mathcal{O}_\varepsilon} |\ell(z) - R_\varepsilon(A_\varepsilon, y)| \right).$$

Определение. Регуляризирующий алгоритм R называется *оптимальным* на множестве $\mathcal{M} \subset Z$ для уровня погрешности $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и окрестности погрешности $\mathcal{O}_\varepsilon \subset Y_\varepsilon$, если

$$\Delta_0(\varepsilon, R_\varepsilon, \mathcal{M}, \mathcal{O}_\varepsilon) = \inf_{\mathcal{R}\in\mathbb{R}^{\operatorname{Hom}(Z,U)\times Y_\varepsilon}} \Delta_0(\varepsilon, \mathcal{R}, \mathcal{M}, \mathcal{O}_\varepsilon).$$

Апостериорной оценкой погрешности называется оценка погрешности, которая справедлива при достаточно малом значении погрешности ε.

В **шестой** главе построенные алгоритмы применяются для решения прикладной обратной задачи восстановления вектора плотности магнитного момента у намагниченного тела. В качестве информации о распределении намагниченности выступает магнитное поле, создаваемое телом. Магнитное поле меряется вне тела. В качестве результата расчётов представлены графики одномерного распределения намагниченности вытянутого тела.

В **заключении** перечисляются основные результаты диссертации. Приведём их.

В диссертации рассмотрена линейная обратная задача, в которой известно множество априорных ограничений и в которой входные данные заданы неточно. Этой задаче сопоставляется задача оптимального восстановления, и обосновывается связь этих задач. Диссертация посвящена исследованию задач оптимального восстановления и их применению к линейным обратным задачам. В работе получено много новых результатов различного плана: от фундаментальных теорем до алгоритмов решения частных, модельных задач. Главными результатами диссертации являются построение оптимального регуляризирующего алгоритма решения линейной обратной задачи с истокопредставимым решением и применение теории задач оптимального восстановления к решению прикладной задачи математической физики. Для достижения этих результатов потребовалось глубокое исследование теории и развитие алгоритмов решения задач, поскольку теория и алгоритмы не были достаточно развиты.

Продемонстрирована универсальность Принципа Лагранжа для задач оптимального восстановления. Он используется в доказательстве большинства теорем в таких аспектах, как конечномерная аппроксимация задачи оптимального восстановления, исследование связи исходной задачи (т.е. задачи в бесконечномерном пространстве) с её конечномерным аналогом, построение численных алгоритмов решения конечномерных задач и задач в гильбертовых пространствах. Задачу оптимального восстановления в гильбертовом пространстве Принцип Лагранжа позволяет решать без использования конечномерной аппроксимации.

Также были получены такие результаты, как

1) достаточные условия существования решения ассоциированной задачи,

2) апостериорная оценка погрешности для оптимального регуляризирующего алгоритма,

3) достаточно универсальный алгоритм решения задачи оптимального восстановления линейного функционала.

Построенные алгоритмы применены к практическим задачам, что является конечной целью любой теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. Dordrecht: Kluwer, 1996.

[2] *Groetsch C. W.* The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind. Boston: Pitman, 1984.

[3] *Hadamard J.* Le probleme de Cauchy et les equations aux derivées partielles lineaires hyperboliques. Paris: Hermann. 1932.

[4] *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* Optimal Recovery and Extremum Theory // Comput. Methods and Function Theory. 2002. **2**. N. 1. 87–112.

[5] *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal. 1979. **16**. N. 1. 87–105.

[6] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory. New York: Plenum Press, 1977. 1–54.

[7] *Yagola A. G., Dorofeev K. Yu.* Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems. // Fields Inst. Communications: Operator Theory and Its Applications. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. **25**. 543–550.

[8] *Арестов В. В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Труды МИАН СССР. **189**. М.: Наука, 1989. 3–20.

[9] *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989.

[10] *Васин В. В., Агеев А. Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.

[11] *Домбровская И. Н., Иванов В. К.* К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных банаховых пространствах // Сибирский матем. журнал. 1965. **6**. № 3. 499–508.

[12] *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука, 1978.

[13] *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

[14] *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999. 702 с.

[15] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. Заметки. 1991. **50**. вып. 6. 85–93.

[16] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[17] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.

[18] *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.

[19] *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

[20] *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.

[21] *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[22] *Bayev A. V., Yagola A. G.* Optimal recovery in problems of solving linear integral equations with *a priori* information // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2007. **15**. N. 6. 569–586.

[23] *Bayev A. V., Yagola A. G.* The optimal regularizing algorithm for linear ill-posed problems with a sourcewise-represented solution // International Conference “Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics”, dedicated to Professor M. M. Lavrentiev on the occasion of his 75-th birthday. Section 3: Numerical analysis and modeling in inverse and ill-posed problems. August 21–24, 2007, Novosibirsk, Russia. `http://www.math.nsc.ru/conference/ipmp07/abstracts/Section3/BayevAVYagolaAG.doc`

[24] *Баев А. В.* Оптимальное восстановление в линейных обратных задачах // XIV-ая Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по фундаментальным наукам “Ломоносов–2007”, Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 12 апреля 2007 г., Секция “Физика”. М.: Физический факультет МГУ. 2007. 75–76.

[25] *Баев А. В.* Оптимальное восстановление и конечномерная аппроксимация в линейных обратных задачах // Матем. Сборник. 2008. **199**. № 12. (принято к публикации).

[26] *Баев А. В.* Оптимальный регуляризующий алгоритм восстановления функционала в линейных обратных задачах с истокопредставимым решением // Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ. 2008. **48**. № 11. 1933–1941.

[27] *Баев А. В.* Применение принципа Лагранжа в задаче оптимального обращения линейного оператора в случае истокообразной представимости точного решения операторного уравнения // Вычисл. методы и программирование. 2007. **8**. № 1. 20–28.
`http://www.srcc.msu.su/num-meth`

[28] *Баев А. В.* Принцип Лагранжа в задаче оптимального обращения линейных операторов в конечномерных пространствах при наличии априорной информации о решении // Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ. 2007. **47**. № 9. 1512–1523.

[29] *Баев А. В.* Принцип Лагранжа и конечномерная аппроксимация в задаче оптимального обращения линейных операторов // Вычисл. методы и программирование. 2006. **7**. № 2. 323–336.
`http://www.srcc.msu.su/num-meth`