ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

ДИСПЕРСИОННАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ ПИОНА НА ФИКСИРОВАННОМ НУКЛОНЕ

Д. В. Мещеряков

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

E-mail: meshcher@recrep.phys.msu.su

Рассмотрена задача рассеяния псевдоскалярного мезона с орбитальным моментом, равным единице, на фиксированном нуклоне с орбитальным моментом, равным единице. Получено решение задачи, обладающее свойствами унитарности и кроссинг-симметрии.

Проблема адекватного описания рассеяния адронов в непертурбативной области КХД все еще не может быть отнесена к числу решенных и поэтому вызывает устойчивый интерес [1–7]. Один из возможных подходов к проблеме базируется на использовании аналитических свойств S-матрицы.

В настоящей работе в рамках этого подхода исследуется статический предел задачи рассеяния пиона на нуклоне, что физически соответствует бесконечно тяжелому нуклону. Аналитическая структура амплитуд рассеяния в калибровочных теориях с конфайнментом исследовалась в работе [1]. Было показано, что аналитические свойства амплитуд рассеяния, установленные в процессе доказательства дисперсионных соотношений, справедливы и в КХД. Хорошо известно [2], что статический предел дисперсионных соотношений эквивалентен системе нелинейных интегральных уравнений [4]. Эти уравнения, в свою очередь, сводятся к нелинейной граничной задаче [5], которая формулируется в виде следующих уравнений для S_i — матричных элементов S-матрицы:

$$\begin{aligned}
&а)\ S_i(z) \text{ — мероморфная функция в плоскости комплексного переменного } z \text{ с разрезами } (-\infty,-1],\ [1,\infty),\\
&б)\ S_i^*(z) = S_i(z^*),\\
&в)\ |S_i(\omega+i0)|^2 = 1 \text{ при } \omega \geqslant 1,\ S_i(\omega+i0) = \lim_{\epsilon\to+0} S_i(\omega+i\epsilon),\\
&г)\ S_i(-z) = \textstyle\sum_{j=1}^N A_{ij}S_j(z),
\end{aligned} \qquad (1)$$

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Действительные значения переменной z соответствуют полной энергии ω релятивистской частицы, рассеивающейся на фиксированном центре. Отметим, что здесь и далее ω измеряется в единицах массы пи-мезона. Требование мероморфности функций $S_i(z)$ вытекает из рассмотрения статического предела задачи рассеяния [7]. Условие упругой унитарности (1*в*) выполняется лишь на правом разрезе в плоскости z. На левом разрезе функции $S_i(z)$ определяются условиями кроссинг-симметрии (1*г*). Матрица кроссинг-симметрии A определяется группой инвариантности S-матрицы [5].

Перепишем условия (1*а*)–(1*г*) в матричной форме, для чего введем столбец $S^{(0)}(z) = [S_1(z), S_2(z), \ldots, S_N(z)]$, где верхний индекс обозначает физический лист римановой поверхности S-матрицы. Условия (1*а,б,г*) относятся к физическому листу, в то время как условие унитарности (1*в*) может быть распространено на комплексные значения ω, что в компонентной форме имеет вид $S_i^{(0)}(z)S_i^{(1)}(z) = 1$. Матричная форма условия унитарности (1*в*) получается путем применения операции инверсии I согласно формуле $IS(z) = [1/S_1(z), 1/S_2(z), \ldots, 1/S_N(z)]$. В результате условия (1*а*)–(1*г*) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
&а)\ S^{(0)}(z) \text{ — столбец мероморфных функций в комплексной плоскости } z \text{ с разрезами } (-\infty,-1],[1,\infty),\\
&б)\ S^{(0)*}(z) = S^{(0)}(z^*),\\
&в)\ S^{(1)}(z) = IS^{(0)}(z),\\
&г)\ S^{(0)}(-z) = AS^{(0)}(z).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Аналитическое продолжение на нефизические листы определим следующим образом [7]:

$$S^{(p)}(z) = (IA)^p S^{(0)}(z(-1)^p). \qquad (3)$$

Используя определение (3), можно легко продолжить условия унитарности (2*в*) и кроссинг-симметрии (2*г*) на нефизические листы римановой поверхности:

$$IS^{(p)}(z) = S^{(1-p)}(z),\ AS^{(p)}(z) = S^{(-p)}(-z)$$

и в результате получить формулу

$$(IA)^q S^{(p)}(z) = S^{(q+p)}(z(-1)^q). \qquad (4)$$

Рассеяние мезона с орбитальным моментом, равным единице, на фиксированном центре с орбитальным моментом, равным единице, описывается матрицей кроссинг-симметрии следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Разложим столбец $S(z)$ по собственным векторам матрицы A:

$$S(z) = s_1(z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}s_2(z)\begin{pmatrix}15\\-5\\3\end{pmatrix} + 2\psi(z)\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Функциональное уравнение (4) при $q=1$, $p=0$ в пределе $z \to \infty$ определяет фиксированные точки (точки покоя) задачи. Возвращаясь от функций $s_1(z)$, $s_2(z)$, $\psi(z)$ к $S_i(z)$, где $i=1,2,3$, получаем

$$S = \pm i \begin{pmatrix} -(2\pm\sqrt{5}) \\ -\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Из столбца (7) видно, что все точки покоя лежат в плоскости $S_2+S_3=0$. Данная плоскость является инвариантом преобразований инверсии I и кроссинг-симметрии A. Трехрядная матрица кроссинг-симметрии (5) на плоскости $S_2+S_3=0$ переходит в двухрядную матрицу A_2:

$$A_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

и задача сводится к отысканию двух функций, $S_1(z)$ и $S_2(z)$. Полагая $z=0$ и вводя $X^{(k)} = S_1^{(k)}/S_2^{(k)}$, где k — номер листа римановой поверхности, получаем, что переход от физического листа $k=0$ к листу с номером n есть дробно-линейное преобразование:

$$X^{(n)} = \\ = \sqrt{5}\,\frac{\sqrt{5}(X^{(0)}-2)(y_-^n - y_+^n) + (X^{(0)}+4)(y_-^n + y_+^n)}{(X^{(0)}+4)(y_-^n - y_+^n) + \sqrt{5}(X^{(0)}-2)(y_-^n + y_+^n)}, \tag{9}$$

где $y_\pm = (3\pm\sqrt{5})/2$. Требования унитарности и кроссинг-симметрии $X^{(n)}$ приводят к следующему условию для определения $X^{(0)}$:

$$(X^{(0)}-2)(X^{(0)}+4) = 0. \tag{10}$$

Следовательно, получаются два различных решения, совместимые с требованиями унитарности и кроссинг-симметрии: $X^{(0)}=2$ и $X^{(0)}=-4$.

Таким образом, на любом нефизическом листе римановой поверхности задачи (8) отношение S_1/S_2 определено при $z=0$ и для построения S_1 и S_2 достаточно найти любую из этих функций. Введем обозначение $S_2(n) = \Phi(n) = -s_2(n) + \psi(n)$, где функции s_2 и ψ были введены в (6). Эта функция удовлетворяет системе функциональных уравнений

$$\Phi(1-n)\Phi(n) = 1\,, \tag{11}$$

$$\frac{\Phi(n)}{\Phi(-n)} = (-1)\frac{\operatorname{ch}\ln y_+^{n+1/2}}{\operatorname{ch}\ln y_+^{n-1/2}} \quad (X^{(0)}=2), \tag{12}$$

$$\frac{\Phi(n)}{\Phi(-n)} = (-1)\frac{\operatorname{sh}\ln y_+^{n+1/2}}{\operatorname{sh}\ln y_+^{n-1/2}} \quad (X^{(0)}=-4). \tag{13}$$

При получении двух последних уравнений было использовано соотношение (9). Уравнение (11) имеет решение

$$\Phi(n) = \mathrm{e}^{g(n-1/2)}, \tag{14}$$

где $g(n)$ — любая нечетная функция: $g(n) = -g(-n)$. Подставляя (14) в (12) и (13), после замены $n \to n+1/2$ получаем разностные уравнения для определения неизвестной функции $g(n)$:

$$g(n+1)+g(n) = \ln\left[(-1)\frac{\operatorname{ch}\ln y_+^{n+1}}{\operatorname{ch}\ln y_+^{n}}\right] \quad (X^{(0)}=2), \tag{15}$$

$$g(n+1)+g(n) = \ln\left[(-1)\frac{\operatorname{sh}\ln y_+^{n+1}}{\operatorname{sh}\ln y_+^{n}}\right] \quad (X^{(0)}=-4). \tag{16}$$

Решая (15) и (16) методом последовательных функциональных замен, приходим к результату:

$$g(n) = g_{-1}(n) + g_\infty(n) + \sum_{m=0}^{\infty} G_m(n), \tag{17}$$

где $g_\infty(n) = n\ln y_+$, и

$$G_m(n) = \ln\frac{\operatorname{ch}\ln y_+^{(n+1+2m)}\operatorname{ch}\ln y_+^{(n-2(m+1))}}{\operatorname{ch}\ln y_+^{(n-1-2m)}\operatorname{ch}\ln y_+^{(n+2(m+1))}} \\ (X^{(0)}=2), \tag{18}$$

$$G_m(n) = \ln\frac{\operatorname{sh}\ln y_+^{(n+1+2m)}\operatorname{sh}\ln y_+^{(n-2(m+1))}}{\operatorname{sh}\ln y_+^{(n-1-2m)}\operatorname{sh}\ln y_+^{(n+2(m+1))}} \\ (X^{(0)}=-4). \tag{19}$$

Слагаемое $g_{-1}(n)$ учитывает множитель (-1) в уравнениях (15), (16). Введем обозначение $\mathrm{e}^{g_{-1}(n)} = \xi(n)$. Тогда функция $\xi(n)$ есть решение системы функциональных уравнений

$$\xi(n+1)\xi(n) = -1, \quad \xi(n)\xi(-n) = 1.$$

Общее решение этой системы выражается через θ-функции. Здесь мы ограничимся вырожденным случаем

$$\xi(n) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(n+\frac{1}{2}). \qquad (20)$$

Используем теперь условие унитарности (1*в*). В результате n как функция комплексной переменной z является решением краевой задачи и имеет вид

$$n(z) = (1/\pi)\arcsin z + i\sqrt{z^2-1}\beta(z), \qquad (21)$$

где $\beta(z) = -\beta(-z)$ — произвольная мероморфная функция. Уравнение (21) показывает, что риманова поверхность рассматриваемой модели имеет алгебраические точки ветвления при $z = \pm 1$ и логарифмическую точку ветвления на бесконечности. Теперь формулы (9), (10), (14)–(21) дают общее решение задачи (1) для матрицы кроссинг-симметрии (8).

Полученные решения могут быть использованы для проверки различных приближенных методов решения соответствующей динамической задачи.

Литература

1. *Oehme R.* // Phys. Rev. 1990. **D42**. P. 4209; Phys. Lett. 1990. **B252**. P. 14; J. Mod. Phys. 1995. **A10**. P. 1995.
2. *Chew G., Goldberger M., Low F., Nambu L.* // Phys. Rev. 1957. **106**. P. 1337.
3. *Low F.* // Phys. Rev. 1955. **97**. P. 1932; *Chew G., Low F.* // Phys. Rev. 1956. **101**. P. 1570; *Oehme R.* // Phys. Rev. 1956. **102**. P. 1174.
4. *Meshcheryakov V.A.* // Сообщения ОИЯИ Р-2369. Дубна, 1965; *Zhuravlev V.I., Meshcheryakov V.A.* // Phys. Elem. Part. Atom. Nuclei. 1974. **5**. P. 173.
5. *Мещеряков В.А.* // ЖЭТФ. 1968. **26**. С. 120.
6. *Meshcheryakov D.V., Tverskoy V.B.* // Acta Physica Slovaca. 1995. **45**. P. 591.
7. *Meshcheryakov V.A.* // Int. J. Mod. Phys. 1997. **A12**. P. 249.

Поступила в редакцию
29.05.00

УДК 51:53

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ В РАМКАХ НОВОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ СО СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, И. Л. Юдин

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: belokur@rector.msu.ru

В рамках новой теории возмущений со сходящимися рядами проводится вычисление некоторых величин, заданных конечным числом членов разложения традиционной теории возмущений. Полученные результаты сравниваются с известными точными решениями.

Введение

В настоящей работе предложенный нами [1] метод вычисления величин, заданных конечным числом членов разложения в ряд теории возмущений, применяется к некоторым задачам, в которых ряды теории возмущений факториально расходятся.

Основным средством получения количественной информации о величинах, которым сопоставлены ряды теории возмущений с факториальной расходимостью, являются метод Бореля и его модификации [2]. Этот подход содержит, однако, существенную неоднозначность, связанную с тем, что суммируется некоторый другой ряд, имеющий одинаковые с исследуемым рядом первые члены и асимптотическое поведение коэффициентов.

Напомним, что в рамках нашего метода значение суммы

$$f(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-g)^n, \quad a_n \sim Cn!\, a^n n^b, \qquad (1)$$

где C, a, b — некоторые положительные константы, может быть аппроксимировано с высокой точностью значением конечной суммы $f_N(g,R)$ абсолютно сходящегося ряда новой теории возмущений:

$$f_N(g,R) = \sum_{n=0}^{mN} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, g^{\frac{n}{m}}\, B_{\frac{n}{m}}\, A_{2n}(R), \qquad (2)$$

где

$$A_{2n}(R) = \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \tilde\varphi(\rho)\,\rho^{2n}\,d\rho,$$

$$\tilde\varphi(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\rho r}\,\exp\{-r^{2m}\}\,dr$$

(m — натуральное число, R — параметр регуляризации, N — число известных членов ряда (1), $B_{k/m} = a_n$, $n = k/m$ при $k = 0 \bmod m$) при произвольных значениях параметра разложения g [3]. В случае больших g вместо (2) удобнее пользоваться разложением по обратным степеням g [1].