УДК 519.6

АДАПТИВНЫЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

А. С. Леонов*), А. Г. Ягола

(кафедра математики)

Предлагается новый класс устойчивых методов решения линейных некорректных задач. Методы учитывают информацию об истокопредставимости искомого нормального псевдорешения. Они оптимальны по порядку точности и обладают специальным дополнительным свойством — адаптивностью.

1. Пусть Z, U — гильбертовы пространства, а A — линейный ограниченный оператор, действующий из Z в U. Рассмотрим операторное уравнение

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U. \tag{1}$$

Без ущерба для общности будем считать, что $\|A\| < 1$. Предположим, что для $u = \bar{u}$ уравнение (1) имеет нормальное псевдорешение $\bar{z} \in Z, \bar{z} \neq 0$. Будем решать задачу его устойчивого нахождения по приближенным данным уравнения (1) $\{u_\delta, \delta\} : \|\bar{u} - u_\delta\| \leq \delta, \delta > 0$, полагая оператор A заданным точно. Таким образом, требуется по данным $\{A, u_\delta, \delta\}$ найти такой элемент $z_\delta \in Z$, который сильно сходится в Z к $\bar{z}$ при $\delta \to 0$.

2. Эта задача может быть решена многими методами (регуляризирующими алгоритмами). Например, для ее решения можно использовать метод невязки (в обобщенной форме для решения несовместных уравнений) (см. [1, 2]). В этом методе приближение $z_\delta \in Z$ к $\bar{z}$ ищется как решение экстремальной задачи

$$z_\delta = \arg\inf\{\|z\|:\ z \in Z, \|Az - u_\delta\| \leq \delta + \mu_\delta\}.$$

Здесь $\mu_\delta = \inf\{\|Az - u_\delta\|:\ z \in Z\}$ — оценка меры несовместности $\mu = \inf\{\|Az - \bar{u}\| : z \in Z\}$ решаемого операторного уравнения. Известно (см. [3]), что без привлечения дополнительной информации об искомом решении $\bar{z}$ или о точных данных задачи $(A, \bar{u})$ метод невязки не может обеспечить точность приближенного решения лучше, чем $O(\delta^{1/2})$: $\|z_\delta - \bar{z}\| \geq \mathrm{const}\cdot\delta^{1/2}$. Аналогичная ситуация складывается и при использовании метода регуляризации А. Н. Тихонова, в котором наилучшая возможная точность есть $O(\delta^{2/3})$, как бы ни выбирался параметр регуляризации (см., напр., [4]). Это явление обычно называют «насыщением точности» регуляризирующего алгоритма (РА). Его можно избежать, если учесть в РА априорную информацию о свойствах точного решения. Например, если известно, что $\bar{z} = (A^*A)^{p/2}\,\bar{v}$, где $\bar{v} \in Z, p > 0$, то, используя величину p, можно построить РА, которые дают приближение с порядком точности $O(\delta^{p/(p+1)})$, оптимальным на классе задач (1) с решениями указанного вида (см. [4, 5]).

С другой стороны, можно, не зная величины p, но используя оценку r: $\|\bar{v}\| \leq r$, построить РА, которые позволяют устойчиво определять число p и получать приближение к $\bar{z} = (A^*A)^{p/2}\,\bar{v}$ с оптимальным порядком точности для произвольного $p > 0$. Алгоритмы такого рода предлагаются в данной заметке.

3. Сформулируем основные предположения. Пусть известно, что нормальное псевдорешение $\bar{z}$ задачи (1) истокообразно представимо с помощью степени оператора A^*A. Поскольку такое представление не единственно, будем иметь в виду, что

$$\begin{gathered}\bar{z} = (A^*A)^{p/2}\,\bar{v} \neq 0, \quad \|\bar{v}\| = \\ = \inf\left\{\|v\|:\ \bar{z} = (A^*A)^{p/2}\,v, v \in Z\right\} \leq r,\end{gathered} \tag{2}$$

где $p > 0$ — максимально возможное число. В общем случае число p полагается неизвестным, но при этом считается, что дана величина r.

Ниже будет использована величина $\hat{\mu}_\delta$ — устойчивая оценка меры несовместности μ уравнения (1), удовлетворяющая требованиям: $\hat{\mu}_\delta^2 \geq \inf\{\|Az - u_\delta\|^2 : z \in Z\}$, $\hat{\mu}_\delta^2 \leq \|A\bar{z} - u_\delta\|^2 + \delta^2$. В качестве $\hat{\mu}_\delta$ можно выбрать, например, упомянутое выше число μ_δ.

4. Методику построения алгоритмов рассмотрим на примере специализированного метода невязки. Предлагаемый РА основан на решении экстремальной задачи: при заданном параметре $\beta > 0$ найти элемент $v_\delta(\beta) \in Z$ такой, что

$$\begin{gathered}\|v_\delta(\beta)\| = \inf\Big\{\ \|v\|:\ v \in Z, \\ \left\|A(A^*A)^{\beta/2}v - u_\delta\right\|^2 \leq \hat{\mu}_\delta^2 + C^2\delta^2\Big\}\end{gathered} \tag{3}$$

$(C = \mathrm{const} > 1)$. Алгоритм состоит из двух шагов: 1) найти число

$$\begin{gathered}\beta_\delta = \sup\Big\{\beta :\ \ \left\|A(A^*A)^{\beta/2}v_\delta(\beta) - u_\delta\right\|^2 \leq \\ \leq \hat{\mu}_\delta^2 + C^2\delta^2,\ \ \|v_\delta(\beta)\| \leq r\Big\},\end{gathered} \tag{4}$$

*) МИФИ.

2) вычислить при $\beta = \beta_\delta$ решение $v_\delta(\beta_\delta)$ задачи (3) и принять элемент $z_\delta = (A^*A)^{\beta_\delta/2} v_\delta(\beta_\delta)$ в качестве приближения к $\bar{z}$.

Экстремальные задачи (3),(4) обладают важными свойствами.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнено* (2). *Тогда задача* (3) *однозначно разрешима при всяком* $\beta > 0$. *Для каждого* δ, $0 < \delta \le \delta_0$, *найдется такое число* $\beta_0 = \beta_0(\delta) > p$, *что при любом* β, $0 < \beta \le \beta_0$, *для решения задачи* (3) *справедлива оценка:* $\|v_\delta(\beta)\| \le \|\bar{v}\|$.

Т е о р е м а 2. *Если выполнено* (2), *то решение задачи* (4) *конечно, и при каждом* δ, $0 < \delta \le \delta_0$, *для него верна оценка* $p < \beta_\delta \le \ln\left[r/(\|u_\delta\| - \sqrt{\delta^2 + \hat{\mu}_\delta^2})\right] \times$ $\times [\ln(1/\|A\|))]^{-1} - 1$.

Т е о р е м а 3. *Если* $0 < \delta \le \delta_0$, *то для решения* $v_\delta(\beta_\delta)$ *задачи* (3) *при* $\beta = \beta_\delta$ *выполнено неравенство* $\|v_\delta(\beta_\delta)\| \le \|\bar{v}\|$.

Сходимость приближенных решений устанавливает

Т е о р е м а 4. *Если выполнено условие* (2), *то* $\beta_\delta \to p$ *при* $\delta \to 0$ *и обеспечены сильные сходимости в* Z: $v_\delta(\beta_\delta) \to \bar{v}$, $z_\delta = (A^*A)^{\beta_\delta/2} v_\delta(\beta_\delta) \to \bar{z} =$ $= (A^*A)^{p/2}\,\bar{v}$. *При этом* $\|Az_\delta - A\bar{z}\| \le (1+\sqrt{3})\delta$.

Введем множество $M_p(r, A) = \{z\colon z = (A^*A)^{p/2}\, v,$ $v \in Z,\ \|v\| \le r\}$. Ясно, что $\bar{z} \in M_p(r, A)$ и $z_\delta = (A^*A)^{p/2}\, w_\delta$, где $w_\delta = (A^*A)^{(\beta_\delta - p)/2}\, v_\delta(\beta_\delta)$ и $\|w_\delta\| \le \|A\|^{\beta_\delta - p}\, \|v_\delta(\beta_\delta)\| \le \|\bar{v}\| \le r$. Поэтому $z_\delta \in M_p(r, A)$. Тогда из приведенной в теореме 4 оценки и из теории оценивания погрешности приближенных решений некорректных задач на множествах типа $M_p(r, A)$ (см. [5, гл. 4]) вытекает

Т е о р е м а 5. *При выполнении условий* (2) *метод* (3), (4) *гарантирует при любом* $p > 0$ *оптимальный порядок точности приближенного решения для задач* (1), *у которых* $\bar{z} \in M_p(r, A)$: $\|z_\delta - \bar{z}\| = O\left(\delta^{p/(p+1)}\right)$.

Рассмотрим случай, когда оператор A — вполне непрерывный. Тогда множество $M_p(r, A)$ — образ слабого компакта в Z — является сильным компактом. Это следует из того, что оператор $(A^*A)^{p/2}$ также будет вполне непрерывным (см. [6, с. 252]). По этой причине задача решения уравнения (1) приобретает интересные свойства, на которых мы здесь останавливаться не будем. На основе этих свойств могут быть построены регуляризирующие алгоритмы, допускающие апостериорную оценку погрешности решения.

Отметим теперь следующий тривиальный результат.

Т е о р е м а 6. *Если в дополнение к условиям теоремы* 5 *известно, что оператор* A *нормально разрешим, то алгоритм* (3), (4) *при любом* $p > 0$ *дает точность* $\|z_\delta - \bar{z}\| = O(\delta)$.

5. Из теорем 5, 6 следует, что алгоритм (3), (4), не используя данных о степени p истокообразной представимости элемента $\bar{z}$, в процессе решения задачи сам «настраивается» на нужную величину p. В связи с этим дадим

О п р е д е л е н и е. *Регуляризирующий алгоритм называется адаптивным для задач* (1) *с решениями из некоторого семейства множеств* $\{M_p\}$, *зависящих от параметра* p, *если:* 1) *он не использует явно величину* p, *определяемую включением* $\bar{z} \in M_p$; 2) *он оптимален по порядку точности для всякого* $\bar{z} \in M_p$ *независимо от допустимого параметра* p.

Примером адаптивного РА служит алгоритм (3), (4). Имеются и другие адаптивные РА, для которых справедливы такие же результаты, как в теоремах 4–6. К числу таких РА относятся специализированный метод регуляризации А. Н. Тихонова, эквивалентный методу (3), (4), специализированный метод квазирешений, получаемый из обычного метода квазирешений [5] по схеме, которая использована в методе (3), (4). Все эти адаптивные алгоритмы были программно реализованы в системе MATLAB и показали свою высокую эффективность в численных экспериментах.

6. Остановимся особо на случае, когда при выполнении условий (2) степень истокопредставимости p точного решения задачи (1) известна. Тогда нет необходимости использовать величину r. В качестве приближения к $\bar{z}$ в этом случае можно взять элемент $z_\delta(p) = (A^*A)^{p/2}\, v_\delta(p)$, где $v_\delta(p)$ — решение задачи (3) при $\beta = p$. Справедлива

Т е о р е м а 7. *Гарантированы сильные сходимости:* $v_\delta(p) \to \bar{v}, z_\delta(p) \to \bar{z}$ *при* $\delta \to 0$. *Приближение* $z_\delta(p)$ *имеет оптимальный порядок точности:* $\|z_\delta(p) - \bar{z}\| = O\left(\delta^{p/(p+1)}\right)$. *Если оператор* A *нормально разрешим, то при всяком* $p > 0$ *верна оценка:* $\|z_\delta(p) - \bar{z}\| = O(\delta)$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 95-01-00486).

Литература

1. *Иванов В.К.* // ЖВМ и МФ. 1966. **6**, № 6. С. 1089.
2. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М., 1995.
3. *Groetsch C.W.* The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind. Boston, MA, 1984.
4. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М., 1989.
5. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., 1978.
6. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1979.

Поступила в редакцию
01.12.97