Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет
Кафедра математики

На правах рукописи.

Головко Валентина Александровна

Вариационные структуры Пуассона–Нийенхейса и интегрируемые гамильтоновы системы

Специальность 01.01.03 — математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
профессор И.С. Красильщик

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
ведущий научный сотрудник
Д.В. Туницкий,
кандидат физико-математических наук
доцент Н.Г. Хорькова

Ведущая организация: ФГУП «Государственный НЦ РФ Институт теоретической и экспериментальной физики»

Защита диссертации состоится «____»______________2011 г. в_____час. на заседании Диссертационного Совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, физический факультет МГУ, ауд._____

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан «____» ______________2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.002.10
доктор физико-математических наук
профессор Ю.В. Грац

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению геометрических аспектов теории вполне интегрируемых систем.

После обнаружения Захаровым и Фаддеевым в 1971 году того, что уравнение Кортевега де Фриза (КдФ) является бесконечномерной вполне интегрируемой системой, нелинейные солитонные уравнения стали вызывать большой интерес как вполне интегрируемые гамильтоновы уравнения с бесконечным числом степеней свободы. Однако само понятие гамильтоновости вводилось лишь для эволюционных уравнений, а исследование произвольных уравнений в частных производных (УрЧП) проводилось путем приведения исходной системы к эволюционному виду. При этом возникает проблема инвариантного определения гамильтоновых структур, поскольку при наличии понятия гамильтоновости лишь для эволюционных уравнений встает вопрос о том, что произойдет с гамильтоновой структурой при преобразовании соответствующего гамильтонова эволюционного уравнения к неэволюционному виду.

Особый интерес представляют бигамильтоновы уравнения, т.е. уравнения, допускающие наличие пары совместных гамильтоновых структур. Если на уравнении имеется бигамильтонова структура, то, применяя схему Магри, можно построить бесконечную серию законов сохранения, находящихся в инволюции относительно соответствующих скобок Пуассона, что равносильно полной интегрируемости такого уравнения.

Частным случаем бигамильтоновых структур являются структуры Пуассона–Нийенхейса, которые задаются пуассоновым бивектором и тензором Нийенхейса типа $(1, 1)$ с нулевым кручением и удовлетворяют определенным условиям совместности. Тензоры (операторы) Нийенхейса были введены в теории интегрируемых систем в работах Магри, Гельфанда и Дорфман. Структуры Пуассона–Нийенхейса впервые появились в работе [1] и в дальнейшем изучались в [2]. Структуры Пуассона–Нийенхейса играют важную роль как в классической дифференциальной геометрии, так и в геометрии уравнений в частных производных. В последнем случае существование структуры Пуассона–Нийенхейса фактически равнозначно интегрируемости рассматриваемого уравнения.

Структуры Пуассона–Нийенхейса возникают при построении бигамильтоновой пары как композиции пуассонова бивектора P и тензора Нийенхейса N типа $(1, 1)$. При этом возникает три условия: одно необходимо для того, чтобы композиция $N \circ P$ являлась бивектором, а второе, чтобы этот бивектор был пуассоновым, а третье отвечает за совместность P и $N \circ P$. Отталкиваясь от структуры Пуассона–Нийенхейса, можно построить иерархию попарно совместных пуассоновых тензоров, что зачастую помогает проинтегрировать такую систему.

На протяжении последних 30-ти лет структуры Пуассона–Нийенхейса активно рассматривались различными авторами, и были получены разные интерпретации условия совместности на пуассонов бивектор и тензор Нийенхейса. Так в [3] определены структуры Пуассона–Нийенхейса в общем алгебраическом смысле, а в [4] эти структуры охарактеризованы в терминах алгеброидов Ли. В [5] условие совместности записано в виде условия на *скобку Виноградова* [6] пуассонова бивектора и тензора Нийенхейса, понимаемых как градуированные дифференциальные операторы на алгебре дифференциальных форм.

В данной работе пуассонов бивектор и тензор Нийенхейса рассматри-

[1] *Magri F. and Morosi C.* A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson–Nijenhuis manifolds// University of Milan, Quaderno. — 1984. — Vol. S 19. —20 p.

[2] *Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F.* Poisson–Nijenhuis structures // Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. — 1990. — Vol. 53, no. 1. — P. 35–81.

[3] *Vaisman I.* A lecture on Poisson–Nijenhuis structures, Integrable systems and foliations, Feuilletages et systèmes intégrables (Montpellier, 1995) // Progr. Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA. — 1997. — Vol. 145. — P. 169–185.

[4] *Kosmann-Schwarzbach Y.* The Lie bialgebroid of a Poisson–Nijenhuis manifold // Lett. Math. Phys. — 1996. — Vol. 38, no. 4. — P. 421–428.

[5] *Beltrán J. V. and Monterde J.* Poisson–Nijenjuis structures and the Vinigradov bracket // Ann. Global Anal. Geom. — 1994. — Vol. 12, no. 1. — P. 65–78.

[6] *Cabras A. and Vinogradov A. M.* Extensions of the Poisson bracket to differential forms and multivector fields // J. of Geometry and Physics, — 1992. — Vol. 9. — P. 75–100.

ваются в бесконечномерном случае как $\mathscr{C}$-дифференциальные операторы (операторы в полных производных) на пространствах бесконечных джетов (струй), а затем и на УрЧП, понимаемых как подмногообразия в многообразии бесконечных джетов, то есть как *гамильтонов оператор* H и *оператор рекурсии* R, соответственно. Под гамильтоновым оператором мы понимаем кососопряженный оператор, ставящий в соответствие производящим функциям законов сохранения (косимметриям) уравнения $\mathscr{E}$ его симметрии и удовлетворяющий условию равенства нулю его *скобки Схоутена.* Оператором рекурсии будет оператор, переводящий симметрии уравнения в его симметрии (вообще говоря, нелокальные).

Поскольку композиция $R \circ H$ снова переводит косимметрии уравнения $\mathscr{E}$ в симметрии, возникает вопрос, при каких условиях на R и H оператор $R \circ H$ (а также и все композиции вида $R^i \circ H$, $i \geqslant 1$) снова задает гамильтонову структуру на $\mathscr{E}$. Ответ на аналогичный вопрос в конечномерном случае был сформулирован в [1] [2] в виде условий совместности соответствующих тензоров. В данной работе приведено обобщение условий совместности на бесконечномерный случай.

Бесконечномерные структуры Пуассона–Нийенхейса хорошо описываются [7] в случае пространств джетов, а также для эволюционных дифференциальных уравнений, рассматриваемых как потоки на пространстве джетов, в то время как для общих дифференциальных уравнений соответствующая теория не существовала в течение долгого времени.

Построение такой теории сопряжено с рядом проблем как вычислительного, так и концептуального характера. Во-первых, это относится к разработке эффективных методов вычисления операторов рекурсии, гамильтоновых и симплектических структур (возможно, нелокальных), а, во-вторых, к самому́ корректному определению таких понятий, как, например, гамильтоновость, бигамильтоновость, симплектичность соответствующих операторов для неэволюционных уравнений.

[7] *В. А. Головко* Вариационные скобки Схоутена и Нийенхейса // УМН. — 2008. — Т. 63:2 (380). — С. 165–166.

В работах [8] [9] изложен подход к решению первой проблемы применительно к эволюционным уравнениям, рассматриваемым с геометрической точки зрения. В рамках данного подхода построение как операторов рекурсии, так и гамильтоновых структур сводится к решению линеаризованного уравнения

$$\ell_{\mathscr{E}}(\Phi) = 0 \qquad (1)$$

на специальных расширениях исходного уравнения $\mathscr{E}$. Эти расширения названы ℓ- и ℓ^*-*накрытиями*, они играют роль касательного и кокасательного расслоений в категории дифференциальных уравнений. Упомянутый выше подход, применим и к уравнениям общего вида, и в данной работе описывается его обобщение.

В терминологии теории накрытий [10], решения уравнения (1) являются *тенями симметрий* в соответствующем накрытии, а построенные с их помощью операторы могут быть как локальными $\mathscr{C}$-дифференциальными операторами, так и нелокальными, т.е. содержать члены типа D_x^{-1}.

Как оказалось, трактовка операторов рекурсии и гамильтоновых операторов как нелокальных аналогов симметрий является чрезвычайно продуктивной с вычислительной точки зрения (для решения уравнений вида (1) разработаны различные программные пакеты), а также обеспечивает продуктивный взгляд на теорию гамильтоновых структур для уравнений в частных производных, что позволяет решить вторую проблему. Так, условия гамильтоновости и нийенхейсовости соответствующих операторов, а также условие совместности на структуру Пуассона–Нийенхейса для эволюционных уравнений удается записать как равенство нулю коммутаторов соответствующих теней симметрий, что позво-

[8] *Kersten P.H.M., Krasil'shchik I.S., Verbovetsky A.M.* Hamiltonian operators and ℓ^*-coverings // J. Geom. and Phys. — 2004. — Vol. 50. — P. 273–302, URL: `arXiv:math.DG/0304245`.

[9] *Kersten P. H. M., Krasil'shchik I. S., Verbovetsky A. M.* A geometric study of the dispersionless Boussinesq type equation // Acta Appl. Math. — 2006. — Vol. 90, no. 1. — P. 143–178.

[10] *Krasil'shchik I. S., Vinogradov A.M.* Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws, and Baecklund transformations // Acta Appl. Math. — 1989. — Vol. 15, no. 1-2. — P. 161–209.

ляет обобщить понятие структур Пуассона–Нийенхейса как на случай произвольных уравнений, так и на случай нелокальных операторов.

В общем случае нелокальные аналоги симметрий возникают как естественное обобщение высших симметрий. Так, оператор рекурсии Ленарта для уравнения КдФ, примененный к галилеевой симметрии, на первом шаге дает локальную (масштабную) симметрию, но начиная со второго шага получаются объекты нелокальной природы. Это означает, что полученные выражения содержат новые нелокальные переменные w, связанные с неизвестной функцией u соотношением $w_x = u$ (или, как часто говорят, $w = D^{-1}u$, или $w = \int u dx$), и т.д. Эти нелокальные объекты нередко понимают как «настоящие» симметрии. Однако, трактовка их как симметрий может привести к парадоксам, что часто и происходит при работе на чисто координатном языке.

Разработанная в диссертации теория применяется к исследованию уравнения Камассы–Холма (КХ), являющимся нелинейным дисперсионным уравнением

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x + 2ku_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}.$$

В безразмерных переменных пространства-времени (x, t) — это модель для однонаправленного распространения волн в мелкой воде над плоским дном; $u(x, t)$ представляет горизонтальную компоненту скорости жидкости, описывает свободную поверхность, а параметр $k > 0$ связан с критической скоростью.

Уравнение КХ впервые появилось в работе [11] как модельное уравнение, допускающее бигамильтонову структуру. Позднее в 1993 году Камасса и Холм [12] вывели это уравнение, исходя из физических соображений, и показали, что оно является бигамильтоновым, обладает парой Лакса и интегрируемо методом обратной задачи рассеяния.

В последнее время уравнение КХ вызывает значительный интерес как пример интегрируемой системы, имеющей более общие по сравне-

[11] *Fuchssteiner B., Fokas A.S.* Symplectic Structures, Their Bäcklund Transformations and Hereditary Symmetries // Physica D. — 1981. — Vol. 4. — P. 47–66.

[12] *Camassa R. and Holm D.* An integrable shallow whater equation with peacked solitons // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Vol. 71. — P. 1661–1664.

нию с КдФ волновые решения. Анализ, проведенный в [13], см. также [14] и др., показывает существование гладких уединенных волн для всех $k > 0$ и заостренных солитонов, пиконов, для $k = 0$.

Уравнение КХ интересно и с дифференциально-геометрической точки зрения. Так, в [15] показано, что уравнение КХ (наряду с уравнениями КдФ и Хантера–Сакстона) входит в семейство интегрируемых уравнений, описывающее геодезический поток на группе Вирасоро. Еще одна геометрическая интерпретация уравнения КХ приведена в [16], где показано, что оно описывает псевдосферические поверхности, и построен аналог преобразования Миуры и «модифицированное уравнение КХ».

В данной работе уравнение КХ рассматривается в случае $k = 0$, т.е.

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{2}$$

Оно не эволюционное, что усложняет его изучение как бигамильтоновой системы, вызывая затруднения в самом определении таких понятий как гамильтоновы операторы, гамильтониан, законы сохранения и т.д.

В большинстве работ (см. [12] [17] и др.) с этой проблемой пытались бороться с помощью введения дополнительной неизвестной переменной $m = u - u_{xx}$, называемой также моментом, в результате чего уравнению (2) удавалось придать «эволюционный» вид

$$m_t = -2mu_x - m_x u, \tag{3}$$

и записать его в бигамильтоновой форме относительно операторов $B_1 = \partial_x - \partial_x^3$ и $B_2 = m\partial_x - \partial_x m$, а именно, $m_t = -B_1 \frac{\delta H_2}{\delta m}$ и $m_t = -B_2 \frac{\delta H_1}{\delta m}$, где $H_1 = \frac{1}{2}\int(u^2 + u_x^2)dx$ и $H_2 = \frac{1}{2}\int(u^3 + uu_x^2)dx$. Это не только не избавляет от технических сложностей в исследовании уравнения, но и приводит

[13] *Camassa R., Holm D., Hyman J.* A new integrable shallow water equation // Adv. Appl. Mech. — 1994. — Vol. 31. — P. 1–33.

[14] *Constantin A.* Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 2000. — Vol. 50. — P. 321–362.

[15] *Khesin B. and Misiolek G.* Euler equations on homogeneous spaces and Virasoro orbits // Adv. Math. — 2003. — Vol. 176. — P. 116–144.

[16] *Reyes E. G.* Geometric integrability of the Camassa–Holm equation // Lett. Math. Phys. — 2002. — Vol. 59. — P. 117–131.

[17] *Casati P., Lorenzoni P., Ortenzi G., Pedroni M.* On the local and nonlocal Camassa–Holm hierarchies // J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 46. — 042704, 8 pages.

к необходимости обращения оператора вида $1 - \partial_x^2$, что накладывает определенные ограничения на пространство функций, на котором рассматривается данное уравнение, и не позволяет до конца понять и корректно определить основные конструкции и понятия бигамильтонова формализма.

Большинство результатов по интегрируемости уравнения КХ были получены не напрямую. При поиске законов сохранения были предложены различные схемы вычислений. Локальная и нелокальная серии сохраняющихся величин для уравнения КХ были получены в [16] с использованием аналога преобразования Миуры, в [17] с помощью решения уравнения Риккати; в [18] показано, что уравнение КХ обладает бесконечным числом локальных сохраняющихся величин.

Высшие пуассоновы структуры для нелокальной иерархии КХ рассматривались в [19], где был получен их производящий ряд. При этом оказалось, что такие структуры уже не являются слабо-нелокальными, как в случае уравнения КдФ.

Многих авторов интересовал вопрос связи уравнения КХ с другими уравнениями математической физики: уравнениями КдФ (см. [20]), Гарри–Дима (см. [21]), Дегаспериса–Прочези (см. [22]).

Цель и задачи диссертационного исследования

Сказанное выше показывает **актуальность** поставленной перед исследованием задачи: построить обобщение структур Пуассона–Нийенхейса на случай произвольных УрЧП, включая также и случай нелокальных операторов рекурсии и нелокальных гамильтоновых

[18] *Fisher M. and Schiff J.* The Camassa–Holm equation: conserved quantities and the initial value problem // Phys. Lett. A. — 1999. — Vol. 259. — P. 371–376.

[19] *Ortenzi G., Pedroni M., Rubtsov V.* On the higher Poisson structures of the Camassa–Holm hierarchy // Acta. Appl. Math. — 2008. — Vol. 101. — P. 243–254.

[20] *Fuchssteiner B.* Some tricks from the symmetry toolbox for nonlinear equations: Generalizations of the Camassa–Holm equation // Physica D. — 1996. — Vol. 95. — P. 229–243.

[21] *Lorenzoni P., Pedroni M.* On the bi-Hamiltonian structures of the Camassa–Holm and Harry Dym equations // Int. Math. Res. Not. — 2004. — Vol. 75. — P. 4019–4029.

[22] *Degasperis A., Holm D.D. and Hone A.N.W.* A new equation with peakon solutions // Theor. Math. Phys. — 2002. — Vol. 133. — P. 1461–72.

структур. **Практическая ценность** полученных теоретических конструкций продемонстрирована на примере нелинейных УРЧП: уравнения КХ и бездисперсионного уравнения типа Буссинеска.

Перечислим основные задачи исследования:

1. Построить скобку Ли для теней симметрий, т.е. задать корректный способ коммутирования теней симметрий.

2. Обобщить структуры Пуассона–Нийенхейса, определенные в конечномерном случае для тензоров Пуассона и Нийенхейса, на случай операторов в полных производных на пространствах бесконечных джетов — гамильтоновых структур и операторов рекурсии.

3. Определить структуры Пуассона–Нийенхейса для эволюционных уравнений в терминах скобки Ли теней симметрий, трактуя операторы рекурсии и гамильтоновы операторы как тени симметрий в ℓ- и ℓ^*-накрытиях.

4. На основе определения структур Пуассона–Нийенхейса в терминах скобки Ли теней симметрий построить их обобщение на случай произвольных УрЧП. В частности, дать определение гамильтоновости.

5. Построить обобщение структур Пуассона–Нийенхейса в случае нелокальных операторов.

6. Исследовать интегрируемость уравнения КХ и, в частности, (а) найти его симметрии, законы сохранения, гамильтоновы и симплектические структуры, операторы рекурсии и (б) доказать наличие структур Пуассона–Нийенхейса.

Научная новизна работы

Все результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Основные результаты, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты.

1. Построена скобка Ли для теней симметрий — нелокальных аналогов симметрий, являющаяся аналогом скобки Якоби для (высших) симметрий.

2. Получено обобщение структур Пуассона–Нийенхейса на пространствах бесконечных джетов.

3. Получено обобщение структур Пуассона–Нийенхейса для эволюционных УрЧП в терминах скобки Ли соответствующих теней симметрий.

4. Получено обобщение структур Пуассона–Нийенхейса на случай произвольных уравнений в частных производных, а также на случай нелокальных операторов. В частности, построена скобка Схоутена для операторов на произвольных уравнениях в частных производных.

5. Доказано существование структур Пуассона–Нийенхейса для бездисперсионного уравнения типа Буссинеска.

6. Исследовано уравнение Камассы–Холма:

— Получены локальные и нелокальные серии симметрий и косимметрий уравнения КХ и соответствующие им законы сохранения. Доказана локальность так называемой положительной серии симметрий.

— Найдены операторы рекурсии и гамильтоновы структуры, первые две из которых являются локальными.

— Доказано существование структур Пуассона–Нийенхейса на уравнении КХ (соответствующие операторы также найдены), что в свою очередь влечет существование бесконечной серии попарно совместных гамильтоновых структур.

— Найдены симплектические структуры и операторы рекурсии для косимметрий.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический и прикладной характер. Они могут быть использованы для исследования интегрируемости нелинейных УрЧП. В диссертационной работе приведены примеры применения полученных результатов к уравнениям математической физики: бездисперсионному уравнению типа Буссинеска и уравнению Камассы–Холма. Результаты работы позволяют по-новому взглянуть на проблему гамильтоновости неэволюционных уравнений.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов NWO–РФФИ

047.017.015 и РФФИ–Консорциум E.I.N.S.T.E.I.N 06-01-92060, РФФИ–CNRS 08-07-92496-НЦНИЛ_а.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях и семинарах:

— на Международном семинаре «Геометрия в Одессе-2005. Дифференциальная геометрия и ее приложения» (Одесса, Украина, май 2005 г.);

— на Международной школе «Formal theory of PDEs and their applications» (Университет Йонсу, Финляндия, апрель 2006 г.);

— на Международной конференции «Геометрия в Одессе-2006» (Одесса, Украина, май 2006 г.);

— на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И.Г. Петровского (Москва, Россия, май 2007 г.);

— на Международной конференции «Symmetries and Perturbation Theory 2007» (Отранто, Италия, июнь 2007 г.);

— на Международной конференции «The 2007 Twente Conference on Lie Groups» (Энсхеде, Нидерланды, декабрь 2007 г.);

— на семинаре «Когомологические аспекты геометрии дифференциальных уравнений» под руководством профессора И.С. Красильщика (Москва, Независимый Московский Университет, 2006, 2007 гг.).

Публикации

Все результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

Личный вклад автора

Все результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, двух приложений и списка цитируемой литературы. Диссертация содержит 10 таблиц, 16 диаграмм. Библиографический список включает 130 наименований. Полный объем диссертации составляет 190 страниц машинописного текста.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** дается общая характеристика работы, формулируются основные результаты и приводится краткий исторический обзор по исследованиям структур Пуассона–Нийенхейса и уравнения КХ в контексте вполне интегрируемых систем.

В **главе 1** кратко изложены все необходимые сведения из геометрии расслоения джетов и геометрии дифференциальных уравнений.

Пусть $\pi\colon E \to M$ — m-мерное гладкое векторное локально тривиальное расслоение над гладким многообразием M размерности n, $J^\infty(\pi)$ — *многообразие бесконечных джетов* сечений расслоения π, а $\pi_\infty\colon J^\infty(\pi) \to M$ — *расслоение бесконечных джетов.*

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — локальные координаты в некоторой окрестности $\mathscr{U}$ на M, а $u^1, \ldots, u^m$ — в слое проекции $\pi|_{\mathscr{U}}$. *Адаптированные координаты* u^j_σ в $\pi_\infty^{-1}(\mathscr{U}) \subset J^\infty(\pi)$ определяются соотношениями $j_\infty(s)^*(u^j_\sigma) = \partial^{|\sigma|}s^j/\partial x_\sigma$, где $s = (s^1, \ldots, s^m)$ — локальное сечение расслоения π, $\sigma = i_1 i_2 \ldots i_{|\sigma|}$, $i_\alpha = 1, \ldots, n$, — симметричный мультииндекс. *Распределение Картана* $\mathscr{C}$ на $J^\infty(\pi)$ порождено *полными производными* $D_i = \partial/\partial x_i + \sum_{j,\sigma} u^j_{\sigma i}\partial/\partial u^j_\sigma,\ i = 1, \ldots, n$. Ему соответствует *связность Картана*, сопоставляющая полю X на M поле $\mathscr{C}X$ на $J^\infty(\pi)$.

Вертикальное относительно проекции π_∞ векторное поле X называется *эволюционным*, если оно сохраняет распределение Картана. Алгебра Ли эволюционных векторных полей обозначается через $\varkappa(\pi)$. Существует взаимно-однозначное соответствие между $\varkappa(\pi)$ и множеством сечений расслоения $\pi_\infty^*(\pi)$. В координатах эволюционное векторное поле, соответствующее производящему сечению $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m) \in \Gamma(\pi_\infty^*(\pi))$, имеет вид $\mathit{Э}_\varphi = \sum_{j,\sigma} D_\sigma(\varphi^j)\partial/\partial u_\sigma^j$. Структуру алгебры Ли на $\varkappa(\pi)$ задает *скобка Якоби*, определяемая как $\{\varphi, \psi\} = \mathit{Э}_\varphi(\psi) - \mathit{Э}_\psi(\varphi) \in \varkappa$.

Оператор линеаризации элемента $F = (F^1, \dots, F^l)$ определяется формулой $\ell_F(\varphi) = \mathit{Э}_\varphi(F)$ и является $l \times m$-матричным оператором вида $\ell_F = \left\| \sum_\sigma \partial F^\alpha / \partial u_\sigma^j \; D_\sigma \right\|$, $\alpha = 1, \dots, l$.

Дифференциальное уравнение $\mathscr{E} = \{F^\alpha(x_1, \dots, x_n, u^1, \dots, u^m, u_\sigma^j) = 0,\ \alpha = 1, \dots, l,\ |\sigma| \leqslant k\}$, порядка k можно рассматривать как подмногообразие в многообразии $J^k(\pi)$. Его *бесконечное продолжение* $\mathscr{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$ в локальных координатах задается с помощью соотношений

$$D_\sigma(F^\alpha) = 0, \qquad \alpha = 1, \dots, l, \quad |\sigma| \geqslant 0, \tag{4}$$

для некоторых гладких функций $F^1, \dots, F^l$ на $J^\infty(\pi)$. Все геометрические конструкции переносятся с $J^\infty(\pi)$ на бесконечно продолженные уравнения.

Инфинитезимальная симметрия уравнения $\mathscr{E}$ — это эволюционное поле $\mathit{Э}_\varphi$, которое касается $\mathscr{E}^\infty$. Множество всех симметрий образует алгебру Ли $\operatorname{sym}\mathscr{E}$ над $\mathbb{R}$, причем существует взаимно-однозначное соответствие между $\operatorname{sym}\mathscr{E}$ и гладкими сечениями $\varphi \in \Gamma(\pi_\infty^*(\pi)) = \varkappa(\mathscr{E})$, удовлетворяющими уравнению $\ell_{\mathscr{E}}(\varphi) = 0$.

Глава 2 посвящена построению скобки Ли для теней симметрий (нелокальных аналогов симметрий), которая является аналогом скобки Якоби для высших симметрий, иначе говоря, описанию корректного способа коммутирования теней симметрий.

В разделе 2.1 приводятся основные понятия теории накрытий. Расслоение $\tau\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ называется *накрытием* над уравнением $\mathscr{E}$, если многообразие $\tilde{\mathscr{E}}$ снабжено таким интегрируемым n-мерным распределением $\tilde{\mathscr{C}}$, что $d\tau(\tilde{\mathscr{C}}) \subset \mathscr{C}$, а для любой точки $\tilde{\theta} \in \tilde{\mathscr{E}}$ ограничение $d\tau|_{\tilde{\mathscr{C}}_{\tilde{\theta}}} : \tilde{\mathscr{C}}_{\tilde{\theta}} \to \mathscr{C}_{\tau(\tilde{\theta})}$ является изоморфизмом. *Накрывающее уравнение* $\tilde{\mathscr{E}}$ описывается соотношениями (4) и дополнительными условиями вида $\partial v^\alpha / \partial x_i = A_i^\alpha$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, r$. Всякому $\mathscr{C}$-дифференциальному оператору Δ на $\mathscr{E}$ можно сопоставить оператор $\tilde{\Delta}$ на $\tilde{\mathscr{E}}$.

Дифференцирование $X\colon \mathscr{F}(\mathscr{E}) \to \mathscr{F}(\tilde{\mathscr{E}})$ называется τ*-тенью*, если $\tilde{\mathscr{C}}Y \circ X = X \circ \mathscr{C}Y$ для любого векторного поля Y на M. Здесь через $\mathscr{F}(\mathscr{E})$ обозначена алгебра гладких функций на $\mathscr{E}$, а через $\mathscr{C}Y$ и $\tilde{\mathscr{C}}Y$ — поднятия векторного поля Y с M на $\mathscr{E}$ и $\tilde{\mathscr{E}}$. Существует взаимнооднозначное соответствие между τ-тенями и решениями уравнения $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\varphi) = 0$, где $\varphi \in \Gamma((\pi_\infty \circ \tau)^*(\pi)) = \tilde{\varkappa}(\mathscr{E})$. Тенью, соответствующей решению этого уравнения, будет дифференцирование $\tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi = \sum \tilde{D}_\sigma(\varphi^j)\partial/\partial u_\sigma^j$ (суммирование проводится по множеству всех внутренних координат).

В разделе 2.2 построена скобка Ли теней симметрий и исследованы ее свойства. Наш подход к коммутированию теней симметрий проистекает из результата, впервые опубликованного в [23] (см. также [10] и [24]). В этой статье было доказано, что любая тень может быть поднята в какое-то другое накрытие. Точнее, если X — тень в накрытии $\tau\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$, то существуют новое накрытие $\tilde{\tau}_X\colon \tilde{\tilde{\mathscr{E}}} \to \tilde{\mathscr{E}}$ и такая тень $\tilde{X}$ в этом накрытии, что ограничение $\tilde{X}$ на алгебру функций на $\mathscr{E}$ совпадает с X.

Накрытие $\tilde{\tau}$, ассоциированное с тенью φ по конструкции из [23] определено единственным образом с точностью до эквивалентности, но тень $\tilde{X}$ не единственна. Мы строим заново чисто геометрическим способом накрытие $\tilde{\tau}_X$, используя ту же геометрическую технику, и определяем *каноническое* поднятие $\tilde{X}$ тени X. Коммутатор двух теней — это $[X, Y] = \tilde{X} \circ Y - \tilde{Y} \circ X$. Конструкция такого канонического поднятия базируется на понятии ℓ-накрытия (см., например, [9]). В локальных координатах каноническим поднятием τ-тени $\tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi$ в накрытие $\tilde{\tau}_\varphi$ будет тень $\tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi, v_\varphi} = \tilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + \sum_\alpha v_\varphi^\alpha \partial/\partial v^\alpha$, а накрытие $\tilde{\tau}_\varphi$ задается уравнениями $\partial v_\varphi^\alpha/\partial x_i = \tilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi, v_\varphi}(A_i^\alpha)$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, r$. Построенный таким образом коммутатор (скобка Ли) теней симметрий кососимметричен и удовлетворяет тождеству Якоби с точностью до эквивалентности.

Глава 3 посвящена изучению вариационных структур Пуассона–Нийенхейса. Мы обобщаем условия, задающие структуру Пуассона–

[23] *Хорькова Н.Г.* Законы сохранения и нелокальные симметрии // Мат. заметки. — 1988. — Т. 44, № 1. — С. 134–144.

[24] *Krasil'shchik I. S.* The long exact sequence of a covering: three applications // The Diffiety Inst. Preprint Series, DIPS 6/2003.

Нийенхейса в случае тензоров на многообразии (см. [1 2]), на случай операторов на бесконечно продолженном дифференциальном уравнении. Следует отметить, что подобное обобщение производилось в несколько этапов, что отражено в названии соответствующих разделов, а в его основе лежит новый взгляд на гамильтоновы структуры и операторы рекурсии, а именно, их трактовка (см. [8 9 10]) как нелокальных аналогов симметрий — теней симметрий — и идея их коммутирования.

В разделе 3.1 мы определяем структуры Пуассона–Нийенхейса в «абсолютном случае», т.е. для многообразий бесконечных джетов. С этой целью мы определяем скобки Схоутена и Нийенхейса в соответствии с работами [8 25] и выписываем условие совместности пуассонова бивектора и оператора Нийенхейса в терминах специальной скобки, тесно связанной с *объединенной скобкой* Виноградова [6]. Основным результатом этого раздела является теорема 3.2, в которой устанавливается существование бесконечных семейств попарно совместных гамильтоновых структур, связанных с исходной структурой Пуассона–Нийенхейса.

Пусть P и Q — $\mathscr{F}(\pi)$-модули сечений некоторых векторных расслоений над $J^\infty(\pi)$. Тогда все $\mathscr{C}$-дифференциальные операторы, действующие из P в Q, образуют $\mathscr{F}(\pi)$-модуль $\mathscr{C}\mathrm{Diff}(P,Q)$. Обозначим через $\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{skew}}_{(k)}(P,Q)$ модуль k-линейных кососимметрических $\mathscr{C}$-дифференциальных операторов $P\times\dots\times P\to Q$ и через $\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\text{sk-ad}}_{(k)}(P,\hat P)\subset\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{skew}}_{(k)}(P,\hat P)$, где $\hat P=\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(\pi)}(P,\bar\Lambda^n(\pi))$, подмножество операторов, кососопряженных по каждому аргументу.

Скобка Схоутена операторов $A,B\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\text{sk-ad}}(\hat\varkappa,\varkappa)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\llbracket A,B\rrbracket(\psi_1,\psi_2)=-\ell_{A,\psi_1}(B\psi_2)+\ell_{A,\psi_2}(B\psi_1)-A(\ell^*_{B,\psi_1}(\psi_2))-\\-\ell_{B,\psi_1}(A\psi_2)+\ell_{B,\psi_2}(A\psi_1)-B(\ell^*_{A,\psi_1}(\psi_2)),\quad\psi_1,\psi_2\in\hat\varkappa.\end{aligned}\tag{5}$$

Оператор A называется *гамильтоновым*, если $\llbracket A,A\rrbracket=0$. Два гамильтоновых оператора A и B являются *совместными*, если $\llbracket A,B\rrbracket=0$.

Скобка Фрёлихера–Нийенхейса операторов $R,\ S\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}(\varkappa,\varkappa)$:

[25] *Krasil'shchik I. S.* Some new cohomological invariants of nonlinear differential equations // Differential Geometry and Its Appl. — 1992. — Vol. 2, no. 4. — P. 307–350.

$$[R,S]_{FN}(\varphi_1,\varphi_2)=\{R\varphi_1,S\varphi_2\}+\{S\varphi_1,R\varphi_2\}-$$
$$-R(\{S\varphi_1,\varphi_2\}+\{\varphi_1,S\varphi_2\}-S\{\varphi_1,\varphi_2\})-$$
$$-S(\{R\varphi_1,\varphi_2\}+\{\varphi_1,R\varphi_2\}-R\{\varphi_1,\varphi_2\}),\quad \varphi_1,\varphi_2\in\varkappa. \quad (6)$$

Будем называть R *оператором Нийенхейса*, если $[R,R]_{FN}=0$.

Определение 3.1.(ср. с [2]) Гамильтонов оператор $A\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\,\text{sk-ad}}(\hat{\varkappa},\varkappa)$ и оператор Нийенхейса $R\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}(\varkappa,\varkappa)$ составляют *вариационную структуру Пуассона–Нийенхейса* (A,R) на $J^\infty(\pi)$, если выполнены следующие условия — условия совместности операторов A и R:

$$\text{(i)}\quad R\circ A=A\circ R^*, \quad (7)$$
$$\text{(ii)}\quad C(A,R)(\psi_1,\psi_2)=L_{A\psi_1}(R^*\psi_2)-L_{A\psi_2}(R^*\psi_1)+R^*L_{A\psi_2}(\psi_1)-$$
$$-R^*L_{A\psi_1}(\psi_2)+\mathbf{E}\langle\psi_1,AR\psi_2\rangle-R^*\mathbf{E}\langle\psi_1,A\psi_2\rangle=0, \quad (8)$$

где $\mathbf{E}$ — оператор Эйлера, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon\hat{\varkappa}\times\varkappa\to\bar{H}^n(\pi)$ — естественное спаривание, $L_\varphi\colon\hat{\varkappa}\to\hat{\varkappa}$, $L_\varphi=\mathit{Э}_\varphi+\ell_\varphi^*$ — вариационная производная Ли вдоль элемента $\varphi\in\varkappa$ и $\bar{H}^n(\pi)$ — n-я группа горизонтальных когомологий.

Теорема 3.2. *Пусть гамильтонов оператор* $A\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\,\text{sk-ad}}(\hat{\varkappa},\varkappa)$ *и оператор Нийенхейса* $R\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}(\varkappa,\varkappa)$ *определяют структуру Пуассона–Нийенхейса на* $J^\infty(\pi)$. *Тогда на* $J^\infty(\pi)$ *существует иерархия итерированных гамильтоновых операторов, т.е. последовательность гамильтоновых операторов* R^iA, $i\geqslant 0$, *которые являются попарно совместными, т.е.* $[\![R^iA,R^jA]\!]=0$, *при всех* $i,j\geqslant 0$.

В разделе 3.2 мы строим структуры Пуассона–Нийенхейса на эволюционных уравнениях. Поскольку эволюционное уравнение можно понимать как векторное поле на пространстве бесконечных джетов, естественно определить вариационную структуру Пуассона–Нийенхейса на таком уравнении как соответствующую структуру на $J^\infty(\pi)$, инвариантную относительно этого потока. Полученное таким образом описание обобщается затем на произвольное УрЧП.

Мы показываем, что инвариантные (относительно потока, определенного уравнением) тензоры Нийенхейса суть *операторы рекурсии* для симметрий, а инвариантные пуассоновы бивекторы — это гамильтоновы структуры. Применяя подход, разработанный в [8], мы сводим построение операторов рекурсии и гамильтоновых структур к решению уравнения (1) на специальных расширениях уравнения $\mathscr{E}$: ℓ- и ℓ^*-накрытиях.

Условия совместности на структуру Пуассона–Нийенхейса (условия равенства нулю скобок Схоутена и Нийенхейса, а также условие совместности операторов R и H) удается записать в виде равенства нулю некоторой специальной скобки (в работе для соответствующих скобок получены явные выражения), построенной в данной работе и названной скобкой Якоби теней симметрий, определение которой не зависит от конкретного вида уравнения. Это позволяет дать обобщение структур Пуассона–Нийенхейса и на случай произвольных УрЧП (операторы R и H являются, вообще говоря, нелокальными).

Рассмотрим систему эволюционных уравнений $\mathscr{E} = \{F = u_t - f(x,t,u,u_1,\ldots,u_k) = 0\}$, где $u = (u^1,\ldots,u^m)$ и $f = (f^1,\ldots,f^m)$, $u_t = \partial u/\partial t$, $u_k = \partial^k u/\partial x_k$, а также модули $\varkappa$ и $\hat{\varkappa}$ на пространстве $J^\infty(\pi)\times\mathbb{R}$ расширенных джетов, т.е. мы допускаем явную зависимость элементов элементов этих модулей от t.

Определение 3.2. Оператор $O\colon \varkappa \to \varkappa$ (или $\hat{\varkappa}\to\varkappa$, и т.д.) называется *инвариантным*, если $L_{D_t}\circ O = O\circ L_{D_t}$ (через L_{D_t} обозначена производная Ли вдоль D_t).

Утверждение 3.3. *Оператор $A\colon \hat{\varkappa}\to\varkappa$ инвариантен, тогда и только тогда, когда $\ell_F\circ A + A\circ\ell_F^* = 0$. Оператор $R\colon \varkappa\to\varkappa$ инвариантен, тогда и только тогда, когда $\ell_F\circ R - R\circ\ell_F = 0$.*

Определение 3.3. Пусть (A, R) — структура Пуассона–Нийенхейса на $J^\infty(\pi)\times\mathbb{R}$. Мы скажем, что она является структурой Пуассона–Нийенхейса на $\mathscr{E}$, если и A, и R являются инвариантными операторами.

Рассмотрим следующие расширения эволюционного уравнения $\mathscr{E}$: *ℓ^*-накрытие $\mathscr{L}^*\mathscr{E}$* задается системой, состоящей из исходного уравнения $\mathscr{E}$ и уравнения $p_t = -\ell_f^*(p)$, где $p = (p^1,\ldots,p^m)$ — новые *нечетные* переменные, добавленные к уравнению $\mathscr{E}$; *ℓ-накрытие $\mathscr{L}\mathscr{E}$* задается системой, состоящей из уравнения $\mathscr{E}$ и уравнения $q_t = \ell_f(q)$, где $q = (q^1, \dots, q^m)$ — новые *нечетные* переменные.

Поставим в соответствие операторам $A\colon \hat{\varkappa} \to \varkappa$ и $R\colon \varkappa \to \varkappa$ вида $\|\sum_{k\geqslant 0} a_k^{ij} D_x^k\|$, $a_k^{ij} \in \mathscr{F}(\mathscr{E})$, соответственно, p-линейную вектор-функцию $\mathscr{H}_A = (\mathscr{H}_A^1, \dots, \mathscr{H}_A^m)$, где $\mathscr{H}_A^i = \sum_{j,k} a_k^{ij} p_k^j$, и q-линейную вектор-функцию $\mathscr{N}_R = (\mathscr{N}_R^1, \dots, \mathscr{N}_R^m)$, где $\mathscr{N}_R^i = \sum_{j,k} a_k^{ij} q_k^j$.

Согласно [8] [9], условия инвариантности операторов $A \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\,\text{sk-ad}}(\hat{\varkappa}, \varkappa)$ и $R \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \varkappa)$ эквивалентны требованию того, что функции $\mathscr{H}_A$ и $\mathscr{N}_R$ являются *тенями симметрий* в ℓ^*- и ℓ-накрытии, т.е. являются решениями уравнений $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\mathscr{H}_A) = 0$ и $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\mathscr{N}_R) = 0$, где тильда над оператором $\ell_{\mathscr{E}}$ означает поднятие его в ℓ^*- и ℓ-накрытие.

Имеется взаимнооднозначное соответствие между операторами из модуля $\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\text{skew}}_{(k)}(\hat{\varkappa}, \varkappa)$ и функциями на $\mathscr{L}^*\mathscr{E}$, k-линейными по отношению к нечетным переменным. Для оператора $\Delta \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\text{skew}}_{(k)}(\hat{\varkappa}, \varkappa)$ обозначим через $\mathscr{H}_\Delta$ соответствующую функцию. Тогда справедлива

Теорема 3.8. *Пусть $\mathscr{H}_A$ и $\mathscr{H}_B$ — тени симметрий в ℓ^*-накрытии, которым соответствуют операторы $A, B \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\,\text{sk-ad}}(\hat{\varkappa}, \varkappa)$. Тогда $\{\mathscr{H}_A, \mathscr{H}_B\} = \mathscr{H}_{[\![A,B]\!]}$, где $[\![A, B]\!]$ — скобка Схоутена.*

Обозначим через $\mathscr{N}_{[R,S]_{FN}}$ билинейную по переменным q функцию на $\mathscr{L}\mathscr{E}$, соответствующую оператору $[R, S]_{FN} \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\text{skew}}_{(2)}(\varkappa, \varkappa)$.

Теорема 3.12. *Пусть $\mathscr{N}_R$ и $\mathscr{N}_S$ — тени симметрий в ℓ-накрытии, которым соответствуют операторы R и $S \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \varkappa)$. Тогда $\{\mathscr{N}_R, \mathscr{N}_S\} = \mathscr{N}_{[R,S]_{FN}}$.*

Выразим теперь условие совместности гамильтоновой структуры A и оператора рекурсии R на уравнении $\mathscr{E}$ в аналогичных геометрических терминах. Для этого напомним, что как $\mathscr{L}\mathscr{E}$, так и $\mathscr{L}^*\mathscr{E}$ расслоены над уравнением $\mathscr{E}$. Рассмотрим сумму Уитни $\mathscr{L}\mathscr{E} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{L}^*\mathscr{E} \to \mathscr{E}$ этих расслоений. Таким образом, уравнение $\mathscr{L}\mathscr{E} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{L}^*\mathscr{E}$ состоит из уравнения $\mathscr{E}$, расширенного как с помощью $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(q) = 0$, так и с помощью $\tilde{\ell}^*_{\mathscr{E}}(p) = 0$.

Обозначим через $\mathscr{C}^*_{A,R}$ билинейную по отношению к переменным p и q функцию на $\mathscr{L}\mathscr{E} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{L}^*\mathscr{E}$, соответствующую $\mathscr{C}$-дифференциальному оператору $C^*(A,R)\colon \hat{\varkappa}\times\varkappa\to\varkappa$. Тогда имеют место

Теорема 3.13. *Пусть $\mathscr{H}_A$ — тень в ℓ^*-накрытии и $\mathscr{N}_R$ — тень в ℓ-накрытии с соответствующими операторами $A\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\,\text{sk-ad}}(\hat{\varkappa},\varkappa)$ и $R\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}(\varkappa,\varkappa)$. Тогда $\{\mathscr{H}_A,\mathscr{N}_R\}=\mathscr{C}^*_{A,R}$.*

Теорема 3.14. *Пусть гамильтонов оператор $A\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\,\text{sk-ad}}(\hat{\varkappa},\varkappa)$ и оператор рекурсии $R\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}(\varkappa,\varkappa)$ — структура Пуассона–Нийенхейса на эволюционном уравнении $\mathscr{E}$, в то время как $\mathscr{H}_A$ и $\mathscr{N}_R$ — соответствующие тени в ℓ^*- и ℓ-накрытии над $\mathscr{E}$, соответственно. Тогда* (i) $\{\mathscr{H}_A,\mathscr{H}_A\}=0$, (ii) $\{\mathscr{N}_R,\mathscr{N}_R\}=0$, (iii) $\{\mathscr{H}_A,\mathscr{N}_R\}=0$, *где* $\{\,,\}$ *— скобки Якоби теней.*

В разделе 3.3 предыдущие результаты обобщаются на произвольные уравнения в частных производных. Рассмотрим бесконечное продолжение $\mathscr{E}\subset J^\infty(\pi)$ общего дифференциального уравнения как подмногообразие в многообразии $J^\infty(\pi)$. В локальных координатах уравнение $\mathscr{E}$ задается системой уравнений $F^j(x^1,\ldots,x^n,u^1\ldots,u^m,\ldots,u^j_\sigma,\ldots)=0$, $j=1,\ldots,r$. Пусть $F^1,\ldots,F^r\in P$, где P — модуль сечений некоторого векторного расслоения над $J^\infty(\pi)$. Рассмотрим оператор линеаризации $\ell_{\mathscr{E}}\colon\varkappa\to P$ и его сопряженный $\ell^*_{\mathscr{E}}\colon\hat{P}\to\hat{\varkappa}$. Подобно эволюционному случаю, мы можем построить ℓ- и ℓ^*-накрытия, расширяя $\mathscr{E}$ с помощью уравнений $\ell_{\mathscr{E}}(q)=0$ и $\ell^*_{\mathscr{E}}(p)=0$, соответственно.

Мы ищем такие $\mathscr{C}$-дифференциальные операторы R и A, что

$$\text{(i)}\quad \bar{R}\circ\ell_{\mathscr{E}}=\ell_{\mathscr{E}}\circ R,\qquad \text{(ii)}\quad \bar{A}\circ\ell^*_{\mathscr{E}}=\ell_{\mathscr{E}}\circ A. \tag{9}$$

Поставим в соответствие оператору R из левого равенства в (9) q-линейную функцию $\mathscr{N}_R=(\mathscr{N}^1_R,\ldots,\mathscr{N}^m_R)$ на $\mathscr{L}\mathscr{E}$, а оператору A из правого — p-линейную функцию $\mathscr{H}_A=(\mathscr{H}^1_A,\ldots,\mathscr{H}^m_A)$ на $\mathscr{L}^*\mathscr{E}$. Удовлетворение уравнениям (9) операторами R и A обеспечивается выполнением условий $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\mathscr{N}_R)=0$ и $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\mathscr{H}_A)=0$.

Аналогом кососопряженности оператора A является условие

$$(\ell_{\mathscr{E}}\circ A)^*=\ell_{\mathscr{E}}\circ A. \tag{10}$$

Если $\mathscr{E}$ — эволюционное уравнение, то это означает, что $A^*=-A$.

Определение 3.4. Пусть $\mathscr{E} \subset J^\infty(\pi)$ — дифференциальное уравнение.

1. $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор $A\colon \hat{P} \to \varkappa$ называется *гамильтоновой структурой* на $\mathscr{E}$, если он удовлетворяет левому уравнению (9), выполнены условия (10) и $\{\mathscr{H}_A, \mathscr{H}_A\} = 0$. Две гамильтоновых структуры A и B являются *совместными*, если $\{\mathscr{H}_A, \mathscr{H}_B\} = 0$.

2. $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор $R\colon \varkappa \to \varkappa$ называется *Нийенхейсовым оператором* для уравнения $\mathscr{E}$, если он удовлетворяет правому уравнению (9) и $\{\mathscr{N}_R, \mathscr{N}_R\} = 0$.

3. Пара $\mathscr{C}$-дифференциальных операторов (A, R) называется *структурой Пуассона–Нийенхейса* на $\mathscr{E}$, если R является Нийенхейсовым оператором, A является такой гамильтоновой структурой, что $A^* \circ R^* = \bar{R} \circ A^*$ и $\{\mathscr{N}_R, \mathscr{H}_A\} = 0$.

Теорема 3.16. *Если (A, R) — структура Пуассона–Нийенхейса на $\mathscr{E}$, то $R^i A$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, является семейством попарно совместных гамильтоновых структур на $\mathscr{E}$.*

Раздел 3.4 посвящен обобщению полученных результатов применительно к *нелокальным* структурам Пуассона–Нийенхейса. Пусть $\mathscr{E}$ — уравнение и $\tau\colon \widetilde{\mathscr{L}\mathscr{E}} \to \mathscr{L}\mathscr{E}$ — накрытие над $\mathscr{L}\mathscr{E}$. Решения уравнения $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\mathscr{N}) = 0$, линейные по нечетным переменным, дают нелокальные операторы рекурсии $R_{\mathscr{N}}$. Эти решения являются тенями симметрий в накрытии $\widetilde{\mathscr{L}\mathscr{E}} \to \mathscr{L}\mathscr{E} \to \mathscr{E}$, представляющем собой композицию ℓ-накрытия и накрытия τ. Используя конструкцию скобки Якоби для теней симметрий и принимая во внимание изложенные выше результаты, мы определяем нелокальные операторы Нийенхейса $R_{\mathscr{N}}$ как операторы, удовлетворяющие уравнению $\{\mathscr{N}, \mathscr{N}\} = 0$.

Аналогично, рассмотрим накрытие $\tau^*\colon \widetilde{\mathscr{L}^*\mathscr{E}} \to \mathscr{L}^*\mathscr{E}$ и, решая уравнение $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\mathscr{H}) = 0$, будем искать нелокальные гамильтоновы операторы $A_{\mathscr{H}}$, соответствующие теням $\mathscr{H}$ в накрытии $\widetilde{\mathscr{L}^*\mathscr{E}} \to \mathscr{L}^*\mathscr{E} \to \mathscr{E}$. Условие гамильтоновости — это $\{\mathscr{H}, \mathscr{H}\} = 0$. Условие совместности для $R_{\mathscr{N}}$ и $A_{\mathscr{H}}$ выражается с помощью $\{\mathscr{H}, \mathscr{N}\} = 0$, где скобка Якоби теней $\mathscr{H}$ и $\mathscr{N}$ рассматривается в сумме Уитни накрытий τ и τ^*.

В подразделе 3.4.3 в качестве примера применения построенных теоретических конструкций рассматривается бездисперсионное уравнение типа Буссинеска.

В **главе 4** проводится исследование уравнения Камассы–Холма (КХ) с применением теоретических методов и конструкций, изложенных предыдущих главах настоящей работы, а также методов символьных вычислений, реализованных в программе REDUCE 3.7 с использованием некоторых специальных пакетов.

В разделе 4.1 изложена схема вычислений, подробности которой можно найти, например, в [9].

В части I главы 4 (разделы 4.2–4.6) мы рассматриваем уравнение КХ, сведенное к системе (3). Для удобства вычислений в уравнение вводится градуированная постоянная α, в результате чего оно принимает вид

$$w_t = -2u_x w - u w_x, \qquad u_{xx} = \alpha u - w, \tag{11}$$

и становится однородным относительно градуировок $|x| = -1$, $|t| = -2$, $|u| = 1$, $|\alpha| = 2$, $|w| = 3$.

В разделе 4.2 найдены законы сохранения, симметрии, косимметрии (производящие функции законов сохранения) уравнения (11). Их можно разбить на две серии. Это так называемые *положительная серия*, куда входят симметрии (косимметрии), зависящие от u, w и их производных (локальная серия), а также от нелокальных переменных и t (нелокальная серия), и *отрицательная серия*, куда входят симметрии (косимметрии), зависящие только от w и производных (локальная серия), а также от нелокальных переменных (нелокальная серия).

В разделе 4.3 найдены операторы рекурсии для симметрий. Первые два нетривиальных оператора рекурсии имеют вид

$$R_{-1} = \frac{1}{8w^3}\begin{pmatrix} h_{12} w^{-1/2} D_x^{-1} \circ w^{-1/2}/2 - 4w^2 D_x^2 + 10 w w_1 D_x + h_8 & 0 \\ -4w^2 w_1 w^{-1/2} D_x^{-1} \circ w^{-1/2}/2 + 4w^2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $h_{12} = -4w^2 w_1 \alpha + 4w^2 w_3 - 18 w w_1 w_2 + 15 w_1^3$, $h_8 = 4w^2\alpha + 8 w w_2 - 15 w_1^2$, и

$$R_3 = \begin{pmatrix} w_1 D_x^{-1} & w_1 D_x + 2w\alpha \\ u_1 D_x^{-1} + u & -D_{xt} + w \end{pmatrix}.$$

В разделе 4.4 построены необходимые накрытия и найдены гамильтоновы структуры, являющиеся тенями симметрий в ℓ^*-накрытии, и операторы рекурсии для косимметрий, являющиеся тенями косимметрий в ℓ^*-накрытии. Первые два гамильтоновых оператора являются локальными и образуют бигамильтонову пару, они имеют вид

$$H_{-3} = \begin{pmatrix} -D_x^3 + \alpha D_x & 0 \\ D_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_{-2} = \begin{pmatrix} 2wD_x + w_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В разделе 4.5 описано действие операторов рекурсии и гамильтоновых операторов. Там же дается распределение симметрий и косимметрий по градуировкам и приводятся некоторые алгебраические соотношения: коммутаторы симметрий и теней симметрий, действия операторов рекурсии и гамильтоновых операторов на симметриях и косимметриях, соответственно, некоторые композиции операторов. В этом же разделе дается упрощенная схема построения симметрий и косимметрий и доказывается локальность отрицательной серии симметрий. Доказывается существование структуры Пуассона–Нийенхейса на уравнении КХ в матричной форме. А именно, доказывается бигамильтоновость операторов H_{-3} и H_{-2}, нийенхейсовость оператора R_3, проверяется выполнение условия совместности операторов R_3 и H_{-2}, откуда следует, что операторы R_3 и H_{-3} образуют структуру Пуассона–Нийенхейса.

В части II главы 4 (разделы 4.7–4.9) рассматривается уравнение КХ в скалярной форме (2). Для него также получены положительная и отрицательная серии симметрий и косимметрий, законы сохранения, а также гамильтоновы структуры, симплектические структуры, операторы рекурсии для симметрий и косимметрий. В разделе 4.10 приводится сводная таблица соответствия результатов частей I и II.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

В **приложении 1** даны основные обозначения, используемые в тексте работы. В **приложении 2** приведены некоторые «громоздкие» формулы, полученные при исследовании уравнения Камассы–Холма.

Публикации по теме диссертации

1. *Головко В. А., Красильщик И. С., Вербовецкий А. М.* Вариационные структуры Пуассона–Нийенхейса на дифференциальных уравнениях в частных производных // ТМФ. — 2008. — Т. 154:2. — С. 268–282.

2. *В. А. Головко* Вариационные скобки Схоутена и Нийенхейса // УМН. — 2008. — Т. 63:2 (380). — С. 165–166.

3. *Вербовецкий А.М., Головко В., Красильщик И.С.* Скобка Ли для нелокальных теней // Научн. вестник МГТУ ГА, серия «Математика и физика». — 2007. — Т. 91. — С. 13–21.

4. *Golovko V., Kersten P., Krasil'shchik I., Verbovetsky A.* On integrability of the Camassa–Holm equation and its invariants. A geometrical approach // Acta Appl. Math. — 2008. — Vol. 101:1–3. — P. 59.

5. *Golovko V.* Variational Poisson–Nijenhuis structures for evolution PDEs // Proc. Int. Conf. «Symmetries and Perturbation Theory 2007» (Otranto, 2007, June 2-9). — P. 249–250.

6. *Головко В.* О вариационных структурах Пуассона–Нийенхейса // Тезисы Международного Семинара «Геометрия в Одессе-2005. Дифференциальная геометрия и ее приложения» (Одесса, 23-29 мая 2005 г.). — 2005. — С. 27–29.

7. *Golovko V.* The Jacobi bracket for shadows of symmetries and nonlocal Hamiltonian operators // Abstr. of Int. Conf. «Geometry in Odessa-2006» (Odessa, 2006, May 22-27). — 2006. — P. 54.

8. *Головко В.* Вариационные структуры Пуассона–Нийенхейса для нелокальных операторов // Тезисы Международной Конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И.Г. Петровского (Москва, 21-26 мая 2007г.). — 2007. — С. 104–105.