КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ САЗЕРЛЕНДА–КАЛОДЖЕРО ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Д. В. Мещеряков, В. Б. Тверской

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

E-mail: meshcher@recrep.phys.msu.su

Предложено суперсимметричное обобщение модели Сазерленда–Калоджеро во внешнем поле. Найден суперпотенциал, построены суперзаряды и основное состояние системы.

Исследование суперсимметричных обобщений квантовых многочастичных вполне интегрируемых систем вызывает в последнее время большой интерес [1–4]. В работе [1] была подробно рассмотрена суперсимметричная модель Калоджеро–Мозера. Здесь мы рассмотрим суперсимметричную модель Сазерленда–Калоджеро во внешнем поле. Оператор Гамильтона модели в координатном представлении имеет вид

$$H=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2}+U(x_i)\right)+\sum_{i>j}^{N}V(x_i-x_j). \qquad (1)$$

В работе [5] было показано, что волновая функция основного состояния ψ_0 такой модели, удовлетворяющая уравнению Шрёдингера

$$H\psi_0=E_0\psi_0, \qquad (2)$$

обладает свойством факторизации, т.е. может быть представлена в виде

$$\psi_0(x_1,\ldots,x_N)=\prod_{j=1}^{N}c(x_j)\prod_{j>k}^{N}d(x_j-x_k). \qquad (3)$$

Для того чтобы волновая функция (3) являлась решением уравнения (2) с гамильтонианом (1), функции $c(x)$ и $d(x)$ должны удовлетворять следующему функциональному уравнению:

$$m(x-y)[n(x)-n(y)]=r(x)+r(y), \qquad (4)$$

где $m(x)=d'(x)/d(x)$, $n(x)=c'(x)/c(x)$, а $r(x)$ — некоторая неизвестная функция. Исследование решений этого уравнения было проведено в работе [5]. Оказалось, что функции $c(x)$ и $d(x)$ могут быть записаны в форме

$$c(x)=\exp\{(-b/2a)\,\mathrm{ch}(2ax)+b_1x\}, \qquad (5)$$

$$d(x)=|\,\mathrm{sh}(ax)|^{\alpha}. \qquad (6)$$

Потенциалы парного взаимодействия и внешнего поля выражаются через функции $r(x)$, $c(x)$ и $d(x)$ и записываются в виде

$$V(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)a^2}{\mathrm{sh}^2\,ax},$$

$$W(x)=\frac{b^2}{4}\mathrm{ch}\,4ax-bb_1\mathrm{sh}\,2ax-ab[1+\alpha(N-1)]\,\mathrm{ch}\,2ax. \qquad (7)$$

В выражениях (5)–(7) α, a, b, b_1 — произвольные константы, причем для самосопряженности гамильтониана (1) и квадратичной интегрируемости волновой функции (3) необходимо, чтобы выполнялись условия $\alpha>3/2$ и $b>0$.

Построим суперсимметричное $N=2$ обобщение модели Сазерленда–Калоджеро. Определим суперзаряды следующим образом:

$$Q=\sum_{j=1}^{N}\psi_j^+\left(p_j+i\frac{\partial W}{\partial x_j}\right),$$

$$Q^+=\sum_{j=1}^{N}\psi_j\left(p_j-i\frac{\partial W}{\partial x_j}\right), \qquad (8)$$

$$Q^2=Q^{+2}=0,$$

где $W(x_1,\ldots,x_N)$ — суперпотенциал, который мы определим ниже, а коммутационные соотношения для бозонных переменных могут быть представлены в виде

$$[p_j,x_k]=-i\delta_{jk},\quad [x_j,x_k]=[p_j,p_k]=0, \quad j,k=1,\ldots,N. \qquad (9)$$

Антикоммутационные соотношения для фермионных переменных записываются следующим образом:

$$\{\psi_j,\psi_k^+\}=\delta_{jk},\quad \{\psi_j,\psi_k\}=\{\psi_j^+,\psi_k^+\}=0, \quad j,k=1,\ldots,N. \qquad (10)$$

Суперсимметричный гамильтониан определим выражением

$$H_s = \frac{1}{2}\{Q, Q^+\}, \tag{11}$$

при этом будут выполняться соотношения

$$[H_s, Q] = [H_s, Q^+] = 0.$$

В терминах суперпотенциала супергамильтониан H_s имеет вид

$$H_s = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(p_j^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N}[\psi_j^+, \psi_k]\frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_k} = \\ = H_B + H_F,$$

где H_B — бозонная и H_F — фермионная части:

$$H_B = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(p_j^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 W}{\partial x_j^2}, \tag{12}$$

$$H_F = -\sum_{j,k=1}^{N}\psi_j^+\psi_k\frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_k}. \tag{13}$$

К суперсимметричной модели Сазерленда–Калоджеро приводит выбор $W(x_1, \ldots, x_N)$ в виде

$$W(x_1, \ldots, x_N) = \ln \psi_0(x_1, ..., x_N). \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12) и (13), учитывая явный вид функций $c(x)$ и $d(x)$ (см. (5) и (6)), а также используя функциональное уравнение (4), получаем явные выражения для бозонной и фермионной частей суперсимметричного гамильтониана:

$$H_B = \sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{p_j^2}{2} + \frac{b^2}{4}\operatorname{ch}4ax - bb_1\operatorname{sh}2ax - \\ - ab[1 + \alpha(N-1)]\operatorname{ch}2ax\Big) + \sum_{j>k}^{N}\frac{\alpha(\alpha-1)a^2}{\operatorname{sh}^2 ax} - E_0, \tag{15}$$

где E_0 совпадает с выражением, полученным в работе [5]:

$$E_0 = -\frac{N}{2}\left(\frac{\alpha^2 a^2(N^2-1)}{3} + b_1^2 - \frac{b^2}{2}\right), \tag{16}$$

$$H_F = {\sum_{j,k=1}^{N}}' \psi_j^+\psi_k\frac{2\alpha a^2}{\operatorname{sh}^2[a(x_j - x_k)]} - \\ -\sum_{j=1}^{N}\psi_j^+\psi_j\cdot 2ab\operatorname{ch}(2ax_j). \tag{17}$$

Штрих у первого знака суммы в (17) означает суммирование при $j \neq k$.

Построим основное состояние системы. Оно представляет собой произведение бозонного основного состояния ψ_0 и фермионного вакуума $|0\rangle$, определяемого соотношениями

$$\psi_j|0\rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Другими словами, основное состояние имеет вид

$$|0\rangle_S = \psi_0(x_1, \ldots, x_N)|0\rangle \tag{18}$$

и в силу соотношений

$$Q|0\rangle_S = Q^+|0\rangle_S = 0$$

обладает нулевой энергией.

Соотношения (3), (5), (6), (15)–(18) описывают суперсимметричную модель Сазерленда–Калоджеро во внешнем поле. Следующим шагом в исследовании такой системы может быть построение квантовой пары Лакса с корректным упорядочением некоммутирующих операторов и нахождение интегралов движения.

Литература

1. *Bordner A.J., Manton N.S., Sasaki R.* // Progr. Theor. Phys. 2000. **103**. P. 436.
2. *Ghosh P.K., Khare A., Sivakumar M.* // Phys. Rev. 1998. **A58**. P. 821.
3. *Ioffe M.V., Neelov A.I.* // E-print Archive: quant-ph/0001063.
4. *Brink L., Hansson T.H., Konstein S., Vasiliev M.A.* // Nucl. Phys. 1993. **B401**. P. 591.
5. *Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V.* // Phys. Lett. 1984. **106A**. P. 101.

Поступила в редакцию
06.09.00