ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

5. Нечеткие элементы, независимость, условные распределения

Ю. П. Пытьев

(кафедра компьютерных методов физики)

Определены и исследованы понятия нечеткого элемента, независимости нечетких элементов, условного распределения, условного относительно нечеткого элемента интеграла.

Введение

Как отмечено в работах [1, 2], для моделирования нечеткости*) привлекаются математические понятия нечеткого множества, нечеткого элемента и возможности. Нечеткое множество $A \subset X$ определяется его характеристической функцией**) (х.ф.) $\mu_A(\cdot)\colon X \to [0,1]$, ее значение $\mu_A(x)$ есть возможность включения $x \in X$ в A, точнее, возможность того, что элемент $x \in X$ накрывается A [2]. При этом х.ф. $\mu_A(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$ определяет «обычное», «четкое» множество $A \subset X$.

Нечеткий элемент ξ, принимающий значения в X, задается распределением возможностей $\varphi^\xi(\cdot)\colon X \to [0,1]$ его значений, согласно которому $\varphi^\xi(x)$ — возможность равенства $\xi = x$ (возможность включения $\xi \in \{x\} \subset X$). «Обычный», «четкий» элемент $y \in X$ может быть задан как нечеткий элемент ξ, распределение которого имеет вид $\varphi^\xi(x) = \delta_y(x) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$ Согласно этому выражению $y \in X$ — единственное возможное значение ξ.

Функция $\varphi^\xi(\cdot)\colon X \to [0,1]$ определяет распределение возможностей $P^\xi(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ и соответствующее возможностное пространство***) $(X, \mathcal{P}(X), P^\xi(\cdot))$ [1]. Для любого $A \in \mathcal{P}(X)$ возможность

$$P^\xi(A) = p_{\varphi^\xi}(\chi_A(\cdot)) = \sup_{x \in A} \varphi^\xi(x) = \sup_{x \in X} \min(\chi_A(x), \varphi^\xi(x)) \quad (1)$$

есть интеграл $\chi_A(\cdot)$ по возможности $P^\xi(\cdot)$ [2], заданной распределением $\varphi^\xi(\cdot)$; его значение будем интерпретировать как возможность включения нечеткого элемента ξ в A (события $\xi \in A$), $P(\xi \in A) \triangleq P^\xi(A)$. Согласно выражению (1) для одноточечного множества $A = \{x\}$ $P(\xi \in A) = \varphi^\xi(x)$ — возможность равенства $\xi = x$, как требует того интерпретация распределения $\varphi^\xi(\cdot)$.

Если A — нечеткое множество, $\mu_A(\cdot)\colon X \to [0,1]$ — его х.ф., то возможность включения $\xi \in A$ (нечеткого события $\xi \in A$) определяется как интеграл $\mu_A(\cdot)$ по P^ξ [2]:

$$P(\xi \in A) = p_{\varphi^\xi}(\mu_A(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x), \varphi^\xi(x)). \quad (2)$$

В этом равенстве $\min(\mu_A(x), \varphi^\xi(x))$ — возможность события****) $(\xi = x) \cap (x \in A)$, а событие $\{\xi \in A\} = \bigcup_{x \in X} (\{\xi = x\} \cap \{x \in A\})$.

Необходимость включения $\xi \in A$ (нечеткого события $\xi \in A$) определяется как интеграл $\mu_A(\cdot)$ по N^ξ [2]:

$$N(\xi \in A) = n_{\neg\varphi^\xi}(\mu_A(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max(\mu_A(x), \neg\varphi^\xi(x)). \quad (2^*)$$

Функцию $\neg\varphi^\xi\colon X \to [0,1]$ назовем распределением необходимостей*****) ξ, значение $\neg\varphi^\xi(x)$ есть необходимость неравенства $\xi \neq x$: $N(\xi \neq x) = N(\xi \in$

---

*) Мы не касаемся здесь классической модели нечеткости, основанной на математической теории вероятности и математической статистике.

**) В теории нечетких множеств $\mu_A(\cdot)$ называется функцией принадлежности, значение $\mu_A(x)$ определяет степень включения $x \in X$ в A [3].

***) Речь идет о возможности $P^\xi(\cdot)$, продолженной на σ-алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X [4].

****) События $\xi = x$ и $x \in A$ считаются P^ξ-независимыми [5], возможность $P^\xi(\cdot)$ — определенной на классе $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X, мера $p_{\varphi^\xi}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to [0,1]$ — на классе всех функций $X \to [0,1]$ [5].

*****) Буквально значение $\neg\varphi^\xi(\cdot) \triangleq 1 - \varphi^\xi(\cdot)$ есть мера невозможности равенства $\xi = x$, мера сомнения в его истинности; интерпретация $\neg\varphi^\xi(\cdot)$ как распределения необходимостей дана согласно выражению для интеграла $\mu_A(\cdot)$ (2^*) по распределению $\neg\varphi^\xi(\cdot)$ необходимости N^ξ (2^*).

$\in (X \setminus \{x\})) = \neg P(\xi = x) = \neg\varphi^\xi(x)$. Для любого «четкого» $A \in \mathcal{P}(X)$ $\quad N(\xi \in A) = \inf_{x \in X A} \neg\varphi^\xi(x)$.

Заметим, что если ξ — «четкий» элемент $y \in X$, то согласно равенству (2)

$$P(\xi \in A) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x),\, \delta_y(x)) = \mu_A(y) \qquad (3)$$

— возможность включения $y \in A$ в полном соответствии с нашей интерпретацией х.ф. $\mu_A(\cdot)$ нечеткого множества A. Более того, в этом случае и $N(\xi \in A) = \inf_{x \in X} \max(\mu_A(x),\, \neg\delta_y(x)) = \mu_A(y)$.

Как нетрудно убедиться, для любых нечетких множеств A и B согласно выражению (2)

$$P(\xi \in A \cup B) = \max(P(\xi \in A),\, P(\xi \in B)) \qquad (4)$$

и, в частности, если ξ — «четкий» элемент $y \in X$, то согласно (3), (4) $\mu_{A \cup B}(y) = P(\xi \in A \cup B) = \max(\mu_A(y),\, \mu_B(y))$, как это и принято в теории нечетких множеств [3]. А если, как в теории нечетких множеств, определить

$$\mu_{A \cap B}(y) = \min(\mu_A(y),\, \mu_B(y)),\ y \in X, \qquad (5)$$

то для «четкого» $\xi = y \in X$ согласно (3) $P(\xi \in A \cap B) = \min(\mu_A(y),\, \mu_B(y)) = \min(P(\xi \in A),\, P(\xi \in B))$, т.е. события $\xi \in A$ и $\xi \in B$ P^ξ-независимы [5]. И наоборот, если события $\xi \in A$ и $\xi \in B$ P^ξ-независимы для любого «четкого» ξ, то х.ф. нечетких множеств A, B и $A \cap B$ связаны условием (5). Если же ξ — произвольный нечеткий элемент, то условие (5) влечет лишь неравенство

$$\begin{aligned} P(\xi \in A \cap B) &= \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x),\, \mu_B(x),\, \varphi^\xi(x)) \leqslant \\ &\leqslant \min\bigl(\sup_{x \in X}\min(\mu_A(x), \varphi^\xi(x)), \sup_{x \in X}\min(\mu_B(x), \varphi^\xi(x))\bigr) = \\ &= \min(P(\xi \in A),\, P(\xi \in B)), \end{aligned}$$

показывающее, что события $\xi \in A$ и $\xi \in B$ в общем случае не являются P^ξ-независимыми.

1. Нечеткие элементы

В теории возможностей нечеткий элемент играет ту же роль, что случайный элемент играет в теории вероятностей, соответственно нечеткое множество — аналог случайного множества в теории вероятностей [6]. Остановимся подробнее на понятии нечеткого элемента в теории возможностей.

Определение 1. Пусть $(X, \mathcal{A}, P)$ — возможностное, $(Y, \mathcal{B})$ — измеримое пространство [1]*). Нечетким элементом на $(X, \mathcal{A}, P)$ со значениями в $(Y, \mathcal{B})$ называется любая $\mathcal{A}, \mathcal{B}$-измеримая**) функция $\eta(\cdot)\colon X \to Y$.

Нечеткий элемент η индуцирует на σ-алгебре $\mathcal{B}$ возможность $P^\eta\colon P(\eta \in B) = P^\eta(B) \triangleq P(\eta^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$, и тем самым порождает возможностное пространство $(Y,\, \mathcal{B},\, P^\eta)$. Разумеется, функция $\xi(\cdot)\colon X \to X$, $\xi(x) = x$, $x \in X$, $\mathcal{A}$-измерима и определяет (канонический) нечеткий элемент на $(X,\, \mathcal{A},\, P)$ с $P = P^\xi$. Для любого $A \in \mathcal{A}$ возможность $P(\xi \in A)$ включения ξ в A отождествим с $P(A) = P^\xi(A)$. Если $p(\cdot)$ — интеграл по $P(\cdot)$, то $P(\xi \in A) = p(\chi_A(\cdot))$, где $\chi_A(\cdot)$ — х.ф. $A \in \mathcal{A}$, а $p(\mu_A(\cdot))$ — возможность включения ξ в нечеткое множество A с х.ф. $\mu_A(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ [2].

Если $\mathcal{A}$ содержит все одноточечные подмножества X, то возможность P^ξ может быть задана распределением $\varphi^\xi(\cdot)$, $P^\xi(A) = \sup_{x \in A} \varphi^\xi(x)$, $A \in \mathcal{A}$, $p(\mu_A(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x),\, \varphi^\xi(x))$, а значение $\varphi^\xi(x) = P(\xi \in \{x\})$ есть возможность равенства $\xi = x \in X$. Если $\mathcal{B}$ содержит все одноточечные подмножества Y, то возможность P^η также будет задана распределением $\varphi^\eta(\cdot)$, причем

$$\varphi^\eta(y) = \sup_{x \in \eta^{-1}(\{y\})} \varphi^\xi(x),\ y \in Y, \qquad (6)$$

ибо $P^\eta(B) = \sup_{x \in \eta^{-1}(B)} \varphi^\xi(x) = \sup_{y \in B} \sup_{x \in \eta^{-1}(\{y\})} \varphi^\xi(x)$, а значение $\varphi^\eta(y) = P(\xi \in \eta^{-1}(\{y\})) = P(\eta \in \{y\})$ — возможность равенства $\eta = y \in Y$.

Нечеткий элемент $\eta = \eta(\xi)$ — функция ξ, но его можно рассматривать и как (канонический) нечеткий элемент на $(Y,\, \mathcal{B},\, P^\eta)$, не обращаясь к возможностному пространству $(X,\, \mathcal{A},\, P^\xi)$. Поэтому далее, если не оговорено пространство значений, считается, что нечеткий элемент ξ, определенный на $(X,\, \mathcal{A},\, P)$, принимает значения в $(X, \mathcal{A})$.

Пусть, например, ξ_1, ξ_2 — нечеткие элементы на $(X, \mathcal{A}, P)$, $\varphi(x_1, x_2)$, x_1, $x_2 \in X$, — распределение нечеткого элемента (вектора) $\eta = (\xi_1, \xi_2)\ :\ X \times X \to Y = X \times X$, т.е. $\varphi(x_1, x_2)$ — возможность равенств $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$. Если на Y определена бинарная операция, например сложение «+»: $Y \to X$, то $\zeta = \xi_1 + \xi_2$ (сумма ξ_1 и ξ_2) — нечеткий элемент на $(X, \mathcal{A}, P^\zeta)$, и согласно формуле (6) $\varphi^\zeta(z) = \sup\{\varphi(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in X, x_1 + x_2 = z\}$, $z \in X$, — его распределение.

Замечание 1. В работе [4] показано, что любая возможность $P(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ может быть продолжена с σ-алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X, и получено максимальное ее продолжение***) $\bar{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to [0,1]$. Продолжение $\bar{P}(\cdot)$ —

*) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — σ-алгебры подмножеств X и Y соответственно.

**) Это означает, что $B \in \mathcal{B} \Rightarrow A = \eta^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

***) $\bar{P}(A) = P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, и для любого продолжения $\hat{P}(\cdot)$ $\hat{P}(A) \leqslant \bar{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(X)$ [4].

возможность, определенная на всех, в том числе одноточечных, подмножествах X и, следовательно, заданная распределением $\varphi(x) = \bar{P}(\{x\})$, $x \in X$.

Поэтому далее, говоря о нечетком элементе ξ, будем считать (если не оговорено противное), что нечеткий элемент ξ определен на возможностном пространстве $(X, \mathcal{P}(X), P)$ и задан распределением $\varphi^{\xi}(\cdot)$, совпадающим с распределением $\varphi(\cdot)$ возможности $P(\cdot)$. При этом для любого $A \in \mathcal{P}(X)$ $P^{\xi}(A) = P(\xi \in A) = P(A) = \sup_{x\in A} \varphi^{\xi}(x)$, $N(A) = N(\xi \in A) = \inf_{x \in X\setminus A} \neg\varphi^{\xi}(x)$, и для любой функции $f(\cdot)\colon X \to [0,1]$ $p(f(\cdot)) = p_{\varphi^\xi}(f(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min(f(x), \varphi^{\xi}(x))$, $n(f(\cdot)) = n_{\neg\varphi^\xi}(f(\cdot)) = \inf_{x\in X} \max(f(x), \neg\varphi^{\xi}(x))$ [2].

2. Независимость нечетких элементов. Условное распределение

Определение 2. Нечеткие элементы ξ и η, определенные на возможностном пространстве $(Z, \mathcal{C}, P)$ и принимающие значения в измеримых пространствах $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$ соответственно, назовем независимыми, если для любых $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ события $\xi \in A$, $\eta \in B$ P-независимы, т.е. если $P(\xi \in A,\ \eta \in B) = \min(P(\xi \in A),\ P(\eta \in B))$.

Здесь и далее предполагается, что на $(Z, \mathcal{C}, P)$ определен (канонический) нечеткий элемент ζ, $P(Q) \equiv P^{\zeta}(\zeta \in Q)$, $Q \in \mathcal{C}$, $\xi\colon Z \to X$, $\eta\colon Z \to Y$ — функции $\zeta \in Z$: $\xi = \xi(\zeta)$, $\eta = \eta(\zeta)$, и по определению

$$P(\xi \in A) \stackrel{\triangle}{=} P(\zeta \in \xi^{-1}(A)),$$

$$P(\eta \in B) \stackrel{\triangle}{=} P(\zeta \in \eta^{-1}(B)),$$

$$P(\xi \in A, \eta \in B) \stackrel{\triangle}{=} P\big(\zeta \in (\xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}(B))\big).$$

Замечание 2. Это определение эквивалентно определению независимости ξ и η как N-независимости событий $\xi \in A$ и $\eta \in B$ при любых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$, означающей, что $N((\xi \in A) \cup (\eta \in B)) = \max(N(\xi \in A),\ N(\eta \in B))$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ [5]. Здесь $N(\xi \in A) \stackrel{\triangle}{=} N(\zeta \in \xi^{-1}(A))$, $N(\eta \in B) \stackrel{\triangle}{=} N(\zeta \in \eta^{-1}(B))$, $N((\xi \in A) \cup (\eta \in B)) \stackrel{\triangle}{=} N(\zeta \in (\xi^{-1}(A) \cup \eta^{-1}(B))$.

Эквивалентность легко усмотреть из соотношений двойственности: $N((\xi \in A) \cup (\eta \in B)) = \neg P((\xi \in X \setminus A) \cap (\eta \in Y \setminus B)) = \neg \min(P(\xi \in X \setminus A), P(\eta \in Y \setminus B)) = \max(\neg P(\xi \in X \setminus A), \neg P(\eta \in Y \setminus B)) = \max(N(\xi \in A), N(\eta \in B))$. ∎

Лемма 1. Пусть $\varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$, — распределение нечеткого вектора (ξ, η). Нечеткие элементы ξ и η независимы, если и только если $\varphi^{\xi,\eta}(x,y) = \min(\varphi^{\xi}(x), \varphi^{\eta}(y)) \stackrel{\triangle}{=} \varphi^{\xi}(x) \bullet \varphi^{\eta}(y)$, $x \in X$, $y \in Y$, где $\varphi^{\xi}(x) = \sup_{y \in Y} \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, $x \in X$, $\varphi^{\eta}(y) = \sup_{x\in X} \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, $y \in Y$ — маргинальные распределения ξ и η соответственно*).

Доказательство. Действительно, если распределение $\varphi^{\xi,\eta}(x,y) = \min(\varphi^{\xi}(x), \varphi^{\eta}(y))$, $x \in X$, $y \in Y$, то, очевидно, нечеткие элементы ξ и η независимы**). Наоборот, если ξ и η независимы, то для любых событий $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}&\sup\{\varphi^{\xi,\eta}(x,y) | x \in A,\ y \in B\} = \\ &= \min(\sup\{\varphi^{\xi,\eta}(x,y) | x \in A, y \in Y\}, \\ &\sup\{\varphi^{\xi,\eta}(x,y) | x \in X,\ y \in B\}) = \\ &= \sup\{\min(\varphi^{\xi}(x), \varphi^{\eta}(y)) | x \in A,\ y \in B\}.\end{aligned} \tag{7}$$ ∎

Выбирая в (7) в качестве $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ одноточечные множества $\{x\} \in \mathcal{A}$, $\{y\} \in \mathcal{B}$, получим равенство***) $\varphi^{\xi,\eta}(x,y) = \min(\varphi^{\xi}(x),\ \varphi^{\eta}(y))$, $x \in X$, $y \in Y$.

Следствие 1. Нечеткие элементы ξ и η независимы, если и только если $\neg\varphi^{\xi,\eta}(x,y) = \max(\neg\varphi^{\xi}(x), \neg\varphi^{\eta}(y)), x \in X, y \in Y$.

Пусть $(Z, \mathcal{C}, P)$ — возможностное пространство, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ — σ-подалгебры σ-алгебры $\mathcal{C}$ подмножеств Z.

Определение 3. Назовем σ-алгебры $\mathcal{C}'$ и $\mathcal{C}''$ независимыми, если $P(A' \cap A'') = \min(P(A'), P(A''))$ для любых $A' \in \mathcal{C}'$, $A'' \in \mathcal{C}''$.

Пусть $\mathcal{C}^{\xi}$, $\mathcal{C}^{\eta}$ — минимальные σ-алгебры, относительно которых измеримы нечеткие элементы $\xi\colon (Z, \mathcal{C}) \to (X, \mathcal{A})$ и $\eta\colon (Z, \mathcal{C}) \to (Y, \mathcal{B})$ соответственно, $\mathcal{C}^{\xi} = \xi^{-1}(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^{\eta} = \eta^{-1}(\mathcal{B})$. Согласно определениям 2, 3 нечеткие элементы ξ и η независимы, если и только если независимы $\mathcal{C}^{\xi}$ и $\mathcal{C}^{\eta}$.

Отсюда следует, в частности, что нечеткие элементы $h(\xi)$ и $g(\eta)$ независимы, если независимы ξ и η. Это, впрочем, видно и непосредственно: $P(h(\xi) \in A, g(\eta) \in B) = P(\xi \in h^{-1}(A), \eta \in g^{-1}(B)) = \min(P(\xi \in h^{-1}(A)), P(\eta \in g^{-1}(B))) = \min(P(h(\xi) \in A),\ P(g(\eta) \in B)$.

Определение 4. Вариантом условного распределения нечеткого элемента $\eta \in Y$ при условии

---

*) Координаты $\xi = \xi(\xi,\eta), \eta = \eta(\xi,\eta)$ — функции нечеткого вектора (ξ,η), маргинальные распределения получены согласно формуле (6).

**) Такие нечеткие элементы обычно называются невзаимодействующими [7].

***) В данном случае $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ содержат одноточечные множества, поскольку нечеткий вектор $(\xi,\ \eta)$ задан распределением $\varphi^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$.

$\xi = x \in X$ (условного относительно ξ распределения η) назовем любое решение $\varphi^{\eta|\xi}(y|x)$ уравнения

$$\min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \varphi^{\xi}(x)) = \varphi^{\xi,\eta}(x, y),\ x \in X, \quad y \in Y, \tag{8}$$

где $\varphi^{\xi}(x) = \sup\limits_{y \in Y} \varphi^{\xi,\eta}(x, y), \quad x \in X,$ — маргинальное распределение $\xi \in X$, $\varphi^{\xi}(x) \geq \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Последнее неравенство гарантирует разрешимость уравнения (8) при любых $x \in X$, $y \in Y$, а именно: $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$, если $\varphi^{\xi}(x) > \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$, $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) \geq \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$, если $\varphi^{\xi}(x) = \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$. При этом равенство $\varphi^{\eta}(y) = \sup_{x \in X} \varphi^{\xi,\eta}(x, y) = \sup_{x \in X} \min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \varphi^{\xi}(x))$, $y \in Y$, связывает маргинальное распределение $\eta \in Y$ с маргинальным распределением $\xi \in X$ посредством условного распределения $\varphi^{\eta|\xi}(\cdot|\cdot)$.

Поскольку $\varphi^{\xi,\eta}(x, y) \leq \min(\varphi^{\xi}(x), \varphi^{\eta}(y))$, $x \in X$, $y \in Y$, то при условии $\varphi^{\xi}(x) = \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$ в качестве решения уравнения (8) можно выбрать $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \varphi^{\eta}(y) \geq \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$. Такой выбор определит вариант условного распределения

$$\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} \varphi^{\xi,\eta}(x, y), & \text{если} \quad \varphi^{\xi}(x) > \varphi^{\xi,\eta}(x, y), \\ \varphi^{\eta}(y), & \text{если} \quad \varphi^{\xi}(x) = \varphi^{\xi,\eta}(x, y), \end{cases}$$
$$x \in X,\ y \in Y\ ,$$

обеспечивающий равенство $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \varphi^{\eta}(y)$, $x \in X$, $y \in Y$ в случае независимости ξ и η (см. лемму 1).

Нетрудно убедиться в том, что ξ и η независимы, если и только если существует вариант условного распределения, для которого $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \varphi^{\eta}(y)$, $x \in X, y \in Y$ (см. лемму 1 из [5]).

Пусть $p_{\varphi}(f(\cdot,\cdot))$ — интеграл $f(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}(X \times Y)$ по возможности, заданной распределением $\varphi^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$: $p_{\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot)) = \sup\limits_{x,y} \min(f(x,y),\ \varphi^{\xi,\eta}(x,y))$ (см. формулу (12) из [1]). Тогда $p_{\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot)) = \sup\limits_{x,y} \min(f(x,y),$ $\min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x),\ \varphi^{\xi}(x))) = \sup\limits_{x \in X}[\min(\varphi^{\xi}(x),$ $\sup\limits_{y \in Y} \min(f(x,y),\ \varphi^{\eta|\xi}(y|x))]$.

Иначе говоря, интеграл $p_{\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot))$ по совместному распределению ξ, η можно вычислить, посчитав для каждого $x \in X$ интеграл $\sup\limits_{y} \min(f(x,y),$ $\varphi^{\eta|\xi}(y|x))$ по условному распределению $\varphi^{\eta|\xi}(\cdot|\cdot)$, а затем проинтегрировав результат по распределению (условия) ξ. Если нечеткие элементы ξ и η независимы, то $\varphi^{\xi,\eta}(x, y) = \min(\varphi^{\xi}(x),\ \varphi^{\eta}(y))$, $x{\in}X$, $y{\in}Y$, и*) $p_{\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot)) = p_{\varphi^{\xi}}(f(\cdot))$, где $f(x) = p_{\varphi^{\eta}}(f(x,\cdot))$, $x \in X$.

Сказанное выше можно переформулировать в терминах распределения необходимостей, определив вариант условного распределения необходимостей нечеткого элемента $\eta \in Y$ при условии $\xi = x \in X$ как любое решение $\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x)$ уравнения

$$\max(\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \neg\varphi^{\xi}(x)) = \neg\varphi^{\eta,\xi}(y, x), x \in X, y \in Y, \tag{8*}$$

например как

$$\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} \neg\varphi^{\xi,\eta}(x, y), \text{ если } & \neg\varphi^{\xi}(x) < \neg\varphi^{\xi,\eta}(x, y), \\ \neg\varphi^{\eta}(y), \qquad \text{если } & \neg\varphi^{\xi}(x) = \neg\varphi^{\xi,\eta}(x, y), \end{cases}$$
$$x \in X,\ y \in Y\ .$$

При этом $n_{\neg\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot)) = \inf\limits_{x \in X, y \in Y} \max(f(x,y),$ $\max(\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \neg\varphi^{\xi}(x))) = \inf\limits_{x \in X} \max(\neg\varphi^{xi}(x),$ $\inf\limits_{y \in Y} \max(f(x,y), \neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x)))$.

Выражения

$$\begin{gathered} \sup_{y \in Y} \min(f(x,y), \varphi^{\eta|\xi}(y|x)), \\ \inf_{y \in Y} \max(f(x,y), \neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x)), \quad x \in X, \end{gathered} \tag{9}$$

определяют варианты условных (при условии $\xi = x$) интегралов $f(\xi,\cdot)$ по условной возможности $P^{\eta|\xi}$ и по условной необходимости $N^{\eta|\xi}$, заданным условными распределениями $\varphi^{\eta|\xi}(\cdot|x)$ и $\neg\varphi^{\eta|\xi}(\cdot|x)$, $x \in X$, соответственно. Понятие условного относительно нечеткого элемента интеграла подробнее рассмотрено ниже.

Завершим этот раздел формальным примером последовательности независимых нечетких элементов**), $\xi_1, \ldots, \xi_n$, каждый из которых является копией нечеткого элемента ξ. *Последовательностью независимых нечетких элементов назовем возможностное пространство* $(X^n,\ \mathcal{A}^n,\ P_n)$, *в котором* X — *множество значений нечеткого элемента* ξ, X^n — *множество значений нечеткого элемента* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *и для любых событий* $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $P_n(\xi_1 \in A_1, \cdots,\ \xi_n \in A_n) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} P(\xi_i \in A_i)$, *что означает независимость нечетких элементов* $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Пусть $X = \mathcal{R}_1$ — действительная прямая. Рассмотрим нечеткие переменные $\eta = \mathop{+}\limits_{j=1}^{n} \xi_i \stackrel{\triangle}{=} \max\limits_{1 \leq i \leq n} \xi_i$, $\zeta = \mathop{\bullet}\limits_{j=1}^{n} \xi_i \stackrel{\triangle}{=} \min\limits_{1 \leq i \leq n} \xi_i$. Если $\varphi^{\xi}(x)$, $x \in X$, — распределение нечеткой переменной ξ, то $\varphi^{\eta}(y) = \sup\{\min(\varphi^{\xi}(x_1), \ldots,\ \varphi^{\xi}(x_n))|\ x_1 \in X, \cdots, x_n \in X,$

---

*) Аналог теоремы Фубини.

**) Аналог последовательности независимых испытаний в теории вероятностей.

$\max(x_1, \cdots, x_n) = y\} = \max\limits_{1\le k\le n} [\min(\sup\limits_{x_1\le y} \varphi^\xi(x_1), \ldots, \sup\limits_{x_{k-1}\le y} \varphi^\xi(x_{k-1}), \quad \varphi^\xi(y), \quad \sup\limits_{x_{k+1}\le y} \varphi^\xi(x_{k+1}), \ldots, \sup\limits_{x_n\le y} \varphi^\xi(x_n))] = \varphi^\xi(y),\ y \in X$. Аналогично получим, что $\varphi^\zeta(z) = \varphi^\xi(z),\ z \in X$, т.е. η и ζ распределены точно так же, как ξ.

В этом нет ничего удивительного для теории, все выводы которой должны быть инвариантны относительно монотонно возрастающего обратимого преобразования шкалы значений возможности, поскольку в данном случае если для ξ выполняются соотношения $P(\xi = x) > P(\xi = y)$ или $P(\xi = x) = P(\xi = y)$, то точно такие же соотношения будут выполняться для $\eta = \max\limits_{1\le i\le n} \xi_i$ и для $\zeta = \min\limits_{1\le i\le n} \xi_i$ при любом $n = 1, 2, \ldots\ \eta$.

3. Условный относительно нечеткого элемента интеграл

Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\eta$ — минимальная σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$, относительно которой измерим нечеткий элемент $\eta\colon (X,\mathcal{A}) \to (X,\mathcal{B})$ ($\eta(\cdot)\colon X \to Y$ — $\mathcal{A},\mathcal{B}$-измеримая функция, $\mathcal{C}^\eta$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все $C = \eta^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}$).

Определение 5. Пусть $f(\cdot)\colon X \to [0,1]$ — $\mathcal{A}$-измеримая функция. Условный относительно σ-подалгебры $\mathcal{C}^\eta$ интеграл*) $f(\cdot)$ назовем условным относительно нечеткого элемента η интегралом $f(\cdot)$ и обозначим $p(f(\cdot)|\eta)(x), x \in X$.

Всякая $\mathcal{C}^\eta$-измеримая функция $g(\cdot)$, определенная на $(X,\mathcal{A})$ со значениями в $(Z,\mathcal{C})$, является, как известно, функцией η, т.е. может быть задана равенством $g(x) = F(\eta(x)), x \in X$, в котором $F(\cdot)\colon (Y,\mathcal{B}) \to (Z,\mathcal{C})$.Так как по определению $p(f(\cdot)|\eta)(\cdot)\colon (X,\mathcal{A}) \to ([0,1]\mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $[0,1]$, есть $\mathcal{C}^\eta$-измеримая функция, то $p(f(\cdot)|\eta)(x) = F(\eta(x)), x \in X$, где $F(\cdot)\colon (Y,\mathcal{B}) \to ([0,1],\mathcal{D})$, и считая, что в равенстве (5) работы [5] $C = \{x \in X, \eta(x) = y\} = C(y)$, найдем

$$p((f \bullet \chi_C)(\cdot)) = p((F(y) \bullet \chi_C)(\cdot)) = F(y) \bullet P(C) = \min(F(y), \varphi^\eta(y)), \quad y \in Y, \tag{10}$$

где $\varphi^\eta(y) = P(\{x \in X, \eta(x) = y\})$. Это соотношение является уравнением для определения условного относительно η интеграла $F(\eta), \eta \in Y$.

Пусть [1, 5]

$$p(f(\cdot)) = p_\varphi(f(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min(f(x), \varphi(x)), \tag{11}$$

тогда для $y \in \eta(X) = Y$ и $C = \{x \in X, \eta(x) = y\}$

$$p_\varphi((f \bullet \chi_C)(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min(f(x), \chi_C(x), \varphi(x)) = \sup_{x\in X, \eta(x)=y} \min(f(x), \varphi(x)) \stackrel{\triangle}{=} \psi(y), \tag{12}$$

$$\varphi^\eta(y) = \sup_{x\in X, \eta(x)=y} \varphi(x),$$

и, следовательно, уравнение (10), определяющее условный относительно η интеграл $p(f(\cdot)|\eta)(\cdot) = F(\eta(\cdot))$, можно записать в виде

$$\min(F(y), \varphi^\eta(y)) = \psi(y), \quad y \in Y, \tag{13}$$

откуда находим следующее представление для всякого варианта $F(\eta(\cdot))$ условного относительно η интеграла $f(\cdot)$:

$$F(y) \begin{cases} = \psi(y), & \text{если} \quad \varphi^\eta(y) > \psi(y), \\ \geqslant \psi(y), & \text{если} \quad \varphi^\eta(y) = \psi(y), \end{cases} \quad y \in \eta(Y).$$

Заметим, что согласно равенствам (11), (12) и (13)

$$p_\varphi(f(\cdot)) = \sup_{y\in Y} \sup_{x\in X, \eta(x)=y} \min(f(x), \varphi(x)) = \sup_{y\in Y} \min(F(y), \varphi^\eta(y)) = p_{\varphi^\eta}(F(\cdot)), \tag{14}$$

причем для правой части (14) имеют место равенства

$$p_{\varphi^\eta}(F(\cdot)) = \sup_{y\in Y} \sup_{x\in X, \eta(x)=y} \min(F(y), \varphi(x)) = \sup_{x\in X} \min(F(\eta(x)), \varphi(x)) = p_\varphi(F(\eta(\cdot))),$$

которые вместе с (14) дают $p_\varphi(f(\cdot)) = p_\varphi(F(\eta(\cdot))) = p_{\varphi^\eta}(F(\cdot))$, что является частным случаем общего соотношения $p(f(\cdot)) = p(p(f(\cdot)|\eta))(\cdot)$, следующего из формулы (5) работы [5] при $C = X$.

Аналогом $F(y)$ в теории вероятностей является условное математическое ожидание $f(\cdot)$ при $\eta = y$.

Примеры.

1. Пусть в (11) $p_\varphi(\cdot)$ — интеграл по распределению $\varphi^{\eta,\zeta}(\cdot,\cdot)$ нечеткого вектора (η,ζ), $x = (y,z)$, $X = Y \times Z$, $C = \{y\} \times Z$. Выберем в качестве $f(\cdot)$ характеристическую функцию множества $Y \times \{z\}$, зависящую от $z \in Z$ как от параметра. Тогда в (12)

$$p_\varphi((\chi_{Y\times\{z\}} \bullet \chi_{\{y\}\times Z})(\cdot)) = \sup_{\tilde y\in Y, \tilde z\in Z} \min(\chi_{Y\times\{z\}}(\tilde y, \tilde z), \chi_{\{y\}\times Z}(\tilde y, \tilde z), \varphi^{\eta,\zeta}(\tilde y, \tilde z)) = \varphi^{\eta,\zeta}(y,z),$$

$$\varphi^\eta(y) = \sup_{\tilde z\in Z}(\varphi^{\eta,\zeta}(y,\tilde z)), \quad y \in Y, \ \ z \in Z,$$

а уравнение (13) $\min(F(y,z), \varphi^\eta(y)) = \varphi^{\eta,\zeta}(y,z)$ определит условное распределение $\varphi^{\zeta|\eta}(z|y) = F(y,z)$, $y \in Y$, $z \in Z$. ■

2. Пусть $\zeta(x,y) = x$, $p_{\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot)) = \sup\limits_{x,y} \min(f(x,y), \varphi^{\xi,\eta}(x,y))$. Для определения условного относительно нечеткого элемента $\zeta(\xi,\eta) = \xi$ интеграла $p(f(\cdot,\cdot)|\zeta)(x)$, $x \in X$, согласно равенствам (12) найдем

*) Определение условного относительно σ-подалгебры интеграла дано в работе [5].

$$\psi(x) = \sup_{y \in Y} \min(f(x,y), \varphi^{\xi,\eta}(x,y)),$$

$$\varphi^{\zeta}(x) = \sup_{y \in Y} \varphi^{\xi,\eta}(x,y) = \varphi^{\xi}(x), \quad x \in X.$$

Уравнение (13) для определения $p(f(\cdot,\cdot)|\zeta)(\cdot)$: $\min(p(f(\cdot,\cdot)|\zeta)(x), \varphi^{\xi}(x)) = \sup_{y \in Y} \min(f(x,y), \varphi^{\xi,\eta}(x, y)) = \min(\varphi^{\xi}(x), \sup_{y \in Y} \min(f(x,y), \varphi^{\eta|\xi}(y|x)))$, свидетельствует, что $p(f(\cdot,\cdot)|\zeta)(x) = \sup_{y \in Y} \min(f(x,y), \varphi^{\eta|\xi}(x,y))$, $x \in X$, — вариант условного относительно $\zeta = \xi$ интеграла $f(\cdot,\cdot)$ (9), найденный в предыдущем пункте. ■

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01081).

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 3. P. 1).
2. *Пытьев Ю.П.* // Там же. № 4. С. 3 (Ibid. No. 4. P. 3).
3. *Zadeh L.A.* // Information and Control. 1965. **8**. P. 335.
4. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 1. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 1. P. 1).
5. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1997. № 6. С. 3 (Ibid. 1997. No. 6. P. 1).
6. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. М., 1978.
7. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. М., 1990.

Поступила в редакцию
23.06.97