УДК 530.12

# СТРУННАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ НА D-БРАНАХ

**С. Е. Клевцов**

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: klevtsov@itep.ru

**Построена струнная теория поля в присутствии $N$ D-бран и вычислено эффективное действие для полей $\varphi^i$ на D$(-1)$-бранах.**

## Введение

Струнная теория поля была предложена в работе [1] для описания вторично квантованной теории открытых струн. Основным объектом в теории является струнное поле $\Psi$ — функционал на отрезке, для которого вводится действие

$$S=\int\left(\Psi*\mathcal{Q}\Psi+\frac{2}{3}g\Psi*\Psi*\Psi\right), \qquad (1)$$

где $\mathcal{Q}$ — БРСТ-оператор в теории струн [2], а $*$ — операция некоммутативного умножения функционалов, определенная ниже. В последнее время в связи с построением решений струнных уравнений движения [3] интерес к струнной теории поля значительно возрос. Связь полученных решений с D-бранами была обнаружена и изучена в работах [4, 5]. В частности, было показано, что найденное в работе [3] решение струнных уравнений движения («сливер») соответствует такой конфигурации струнного поля, при которой центр масс струны закреплен на некоторой $p$-мерной гиперповерхности. Это интерпретируется как возникновение D$p$-браны в центре струны. Связь D-бран и струнной теории поля также исследовалась в [6, 7]. Существующая формулировка струнной теории поля, построенная в 1980-е гг. [8, 9], приспособлена к струнам с граничными условиями Неймана. Однако теперь мы знаем, что важную роль в теории струн играют граничные условия Дирихле, которые соответствуют D-бранам [2]. Поэтому, вообще говоря, следует построить формализм струнной теории поля, в котором был бы заложен произвол в выборе граничных условий, присутствующий в теории струн изначально. В настоящей работе сделан первый шаг в этом направлении, построена струнная теория поля в присутствии D-бран. Обобщено действие струнной теории поля и струнное умножение на случай несовпадающих в пространстве-времени D-бран. Большой интерес представляет также получение эффективных действий для полей струнного спектра из струнной теории поля [10, 11]. В частности, вычисление тахионного потенциала [10] позволяет сделать различные предположения об истинном вакууме в теории бозонных струн. В настоящей работе вычислено в некотором приближении эффективное действие для полей $\varphi^i$ на D-бранах.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе построена струнная теория поля на D-бранах. При вычислениях использован формализм конформной теории поля, подробно изложенный в работе [9]. В третьем разделе вычислено эффективное действие для полей $\varphi^i$, которое оказывается действием теории Янга–Миллса до четвертого порядка по $\varphi^i$. Метод вычисления эффективных действий в струнной теории поля был предложен в работе [10]. Согласно этому методу, в действие (1) подставлено струнное поле, разложенное по осцилляторному базису вплоть до полей на уровне 2, далее проводится интегрирование по всем дополнительным полям, взаимодействующим с $\varphi^i$. При этом получены первые два члена эффективного действия точно, а третий — в некотором приближении. В заключении еще раз формулируются полученные результаты.

## Струнная теория поля на D-бранах

D$p$-брана — это гиперповерхность в объемлющем пространстве, к которой прикрепляются струны. С точки зрения мирового листа струны это означает, что на концах струны в $25-p$ направлениях наложены граничные условия Дирихле

$$X^i(\sigma=0)=C_1^i, \quad X^i(\sigma=\pi)=C_2^i. \qquad (2)$$

При этом D-браны расположены в точках $C_1^i, C_2^i$ $(i=0,\ldots,25-p)$ в объемлющем пространстве. Очевидно, что выбор граничных условий Дирихле нарушает Лоренц-инвариантность в объемлющем пространстве. В терминах комплексных координат поле $X^i$ при граничных условиях Дирихле имеет следующее разложение по модам:

$$X^i=c_a^i-i\alpha'\frac{C_b^i-C_a^i}{2\pi\alpha'}\ln\frac{z}{\bar{z}}+i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^i}{n}(z^{-n}-\bar{z}^{-n}). \qquad (3)$$

Легко построить оператор в конформной теории поля на диске $D$, преобразующий граничные условия $X^i_{\partial D}=C_1^i$ в новые граничные условия

$X^i_{\partial D} = C^i_1 + \Delta C^i$ [12]:

$$V = \exp\left(\oint \Delta C^i(\theta)\partial_n X^i(\theta)\right). \qquad (4)$$

Вычисления корреляторов с несовпадающими D-бранами можно упростить, заменив граничные условия Дирихле на $X^i_{\partial D} = 0$ и вставив нужное число операторов (4).

Действие струнной теории поля нетрудно обобщить на случай $N$ D$(-1)$-бран (D-инстантонов):

$$S = \sum_{a,b}\int \Psi_{ab} * (Q\Psi)_{ba} + \frac{2}{3}g\sum_{a,b,c}\int \Psi_{ab} * \Psi_{bc} * \Psi_{ca}. \qquad (5)$$

Здесь $\Psi_{ab}$ — струнное поле, соответствующее струне, прикрепленной к D-инстантонам с координатами $C^i_a$, $C^i_b$, где $a, b = 1, \ldots, N$, а суммирование идет по всем инстантонам. На языке конформной теории поля действие (5) можно переписать как

$$S = \sum_{a,b}\langle g_1[\mathcal{O}_{\Psi,ab}(0)] g_2[Q\mathcal{O}_{\Psi,ba}(0)]\rangle + \\ + \frac{2}{3}g\sum_{a,b,c}\langle h_1[\mathcal{O}_{\Psi,ab}(0)] h_2[\mathcal{O}_{\Psi,bc}(0)] h_3[\mathcal{O}_{\Psi,ca}(0)]\rangle. \qquad (6)$$

Здесь $\mathcal{O}_{\Psi,ab}(0)$ — оператор конформной теории поля (помещенный в точку $z = 0$ на мировом листе), соответствующий полю $\Psi_{ab}$; конформные отображения $g_i(z), h_i(z)$, определенные в [9], помещают операторы $\mathcal{O}_{\Psi,ab}(0)$ в точки $g_1(0) = -1$, $g_2(0) = 1$, $h_1(0) = 1$, $h_2(0) = e^{2\pi i/3}$, $h_3(0) = e^{-2\pi i/3}$ на границе диска. Кинетический член в (5) равен функциональному интегралу со вставкой вертексного оператора, рождающего D-брану (4):

$$\sum_{a,b}\langle g_1[\mathcal{O}_{\Psi,ab}(0)] g_2[Q\mathcal{O}_{\Psi,ba}(0)]\rangle = \\ = \sum_{a,b}\int g_1[\mathcal{O}_{\Psi,ab}(0)] g_2[Q\mathcal{O}_{\Psi,ba}(0)] \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\int X(-\partial\bar\partial)X\, d^2z + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2}\oint d\theta\, C_i(\theta)\,\partial_n X^i\right)\right)\mathcal{D}X, \qquad (7)$$

где

$$C^i(\theta) = \begin{cases} C^i_b, & 0 < \theta < \pi, \\ C^i_a, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases} \qquad (8)$$

Кубический член в действии равен

$$\sum_{a,b,c}\langle h_1[\mathcal{O}_{\Psi,ab}(0)] h_2[\mathcal{O}_{\Psi,bc}(0)] h_3[\mathcal{O}_{\Psi,ca}(0)]\rangle = \\ = \sum_{a,b,c}\int h_1[\mathcal{O}_{\Psi,ab}(0)] h_2[\mathcal{O}_{\Psi,bc}(0)] h_3[\mathcal{O}_{\Psi,ca}(0)] \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\int X(-\partial\bar\partial)X\, d^2z + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2}\oint d\theta\, C_i(\theta)\,\partial_n X^i\right)\right)\mathcal{D}X, \qquad (9)$$

где

$$C^i(\theta) = \begin{cases} C^i_b, & 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}, \\ C^i_c, & \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}. \\ C^i_a, & \frac{4\pi}{3} < \theta < 2\pi. \end{cases} \qquad (10)$$

Перейдем к вычислению эффективного действия.

## Теория Янга–Миллса из струнной теории поля на D-бранах

В этом разделе выводится теория Янга–Миллса на $N$ D$(-1)$-бранах как низкоэнергетическая теория из действия струнной теории поля.

Струнное поле можно разложить по базису в пространстве Фока, порождающему бесконечный набор полей. Выпишем разложение $\Psi$, включая поля вплоть до уровня 2:

$$\Psi_{ab} = \big(t_{ab}c_1 + \varphi^i_{ab}\alpha^i_{-1}c_1 + Fc_0 + B^{ij}_{ab}\alpha^i_{-1}\alpha^j_{-1}c_1 + \\ + D^i_{ab}\alpha^i_{-1}c_0 + G^i_{ab}\alpha^i_{-2}c_1 + \beta_{ab}c_{-1} + \gamma_{ab}c_0 b_{-2}c_1 + \ldots\big)|\Omega\rangle. \qquad (11)$$

Здесь $|\Omega\rangle$ — состояние, соответствующее единичному оператору. Поля $t, \varphi^i, \ldots$ является матрицами в присоединенном представлении $Gl(N)$.

Будем вычислять эффективное действие для полей $\varphi^i$. Это действие должно совпасть с действием теории Янга–Миллса:

$$S_{YM} \propto -\frac{1}{g^2}\operatorname{Tr}\left[g\varphi^i + \frac{C^i}{\sqrt{2\alpha'}\pi},\, g\varphi^k + \frac{C^k}{\sqrt{2\alpha'}\pi}\right]^2 = \\ = \frac{1}{\alpha'\pi^2}\sum_{a,b}\big(\Delta C^i_{ab}\Delta C^k_{ba}\varphi^i_{ab}\varphi^k_{ba} + \Delta C^2_{ab}\varphi^k_{ab}\varphi^k_{ba}\big) + \\ + 4g\operatorname{Tr}[\varphi^i, \varphi^k]\left[\frac{C^k}{\sqrt{2\alpha'}\pi}, \varphi^i\right] - \\ - g^2\operatorname{Tr}\{\varphi^i, \varphi^k\}^2 + 4g^2\operatorname{Tr}(\varphi^i\varphi^i)^2, \qquad (12)$$

где $\Delta C^i_{ab} = C^i_a - C^i_b$. Символ Tr означает суммирование по матричным индексам $a, b$.

Вычисление эффективного действия проводится следующим образом [11]. Из действия (5) вычисляются кинетические члены для всех полей, взаимодействие всех полей с $\varphi^i$, а также самодействие, пропорциональное $\varphi^3$. Далее по всем дополнительным полям проводится интегрирование при условии, что $\Delta C^2 \ll \alpha'$. Подставляя струнное поле (11) в действие (5), получаем квадратичные члены

$$S_1 = \sum_{a,b}\left(\left(\frac{\Delta C^2_{ab}}{4\alpha'\pi^2} - 1\right)t_{ab}t_{ba} - 2\operatorname{Tr}F^2 + \right.$$

$$+2\left(\frac{\Delta C_{ab}^2}{4\alpha'\pi^2}+1\right)B_{ab}^{ij}B_{ba}^{ij}+\frac{\Delta C_{ab}^2}{4\alpha'\pi^2}\varphi_{ab}^i\varphi_{ba}^i-$$
$$-\left(\frac{\Delta C_{ab}^2}{4\alpha'\pi^2}+1\right)\beta_{ab}\beta_{ba}\Bigg)+2\sum_{a,b}\frac{\Delta C_{ba}^i}{\sqrt{2\alpha'}\pi}F_{ab}\varphi_{ba}^i \quad (13)$$

и взаимодействие

$$S_2=\frac{2}{3}g\,\mathrm{Tr}\left(\frac{3}{4}[\varphi^i,\varphi^k]\left[\frac{C^k}{\sqrt{2\alpha'}\pi},\varphi^i\right]-\frac{3^2\sqrt{3}}{2^2}t\varphi^i\varphi^i-\right.$$
$$\left.-\frac{2^3}{\sqrt{3}}B_{ij}\varphi^i\varphi^j-\frac{11}{2^2\sqrt{3}}\beta\varphi^i\varphi^i\right)+\ldots \quad (14)$$

Здесь сохраняется зависимость только от полей $t,\varphi^i,B^{ij},F$ и $\beta$, так как только они дают вклад нужного порядка в эффективное действие. Решая уравнение движения для поля $F$, получаем

$$F_{ab}=\frac{\Delta C_{ab}^i}{4\pi\sqrt{\alpha'}}\varphi_{ab}^i. \quad (15)$$

Интегрирование по этому полю дает правильный квадратичный вклад для $\varphi^i$ (12). Интегрируя также по полям $t$, $B^{ij}$ и $\beta$, получаем

$$S_{\text{eff}}=\frac{1}{4\alpha'\pi^2}\sum_{a,b}\left(\Delta C_{ab}^i\Delta C_{ba}^k\varphi_{ab}^i\varphi_{ba}^k+\Delta C_{ab}^2\varphi_{ab}^i\varphi_{ba}^i\right)-$$
$$-\frac{2^3}{3^3}g^2\,\mathrm{Tr}\{\varphi^i,\varphi^j\}^2+\frac{1}{2}g\,\mathrm{Tr}[\varphi^i,\varphi^k]\left[\frac{C^k}{\sqrt{2\alpha'}\pi},\varphi^i\right]+$$
$$+\frac{17\cdot 5^2}{3^3\cdot 2^3}g^2\,\mathrm{Tr}(\varphi^i\varphi^i)^2. \quad (16)$$

Итак, полученное эффективное действие совпадает с предсказанным (12) с точностью до членов порядка $\varphi^3$. Структура вида

$$\mathrm{Tr}[\varphi^i,\varphi^k]^2\equiv\mathrm{Tr}\{\varphi^i,\varphi^k\}^2-4\,\mathrm{Tr}(\varphi^i\varphi^i)^2 \quad (17)$$

получилась лишь с определенной точностью. Это неудивительно, так как для получения точного вклада необходимо учесть все поля на старших уровнях.

## Заключение

Построена струнная теория поля на D-бранах. D-браны вводятся в струнную теорию поля изначально. При этом действие струнной теории поля и $*$-умножение модифицируются. В формализме конформной теории поля эта модификация сводится к изменению неймановских граничных условий в корреляторах на граничные условия Дирихле. Также вычислено эффективное действие для полей $\varphi^i$ на D-бранах. Это действие совпало с действием теории Янга–Миллса вплоть до членов порядка $\varphi^3$, так как в струнной теории поля имеется только кубическое взаимодействие. Получены вклады в член $\mathrm{Tr}[\varphi^i,\varphi^k]^2$ с определенной точностью. Существует альтернативный способ получения слагаемых порядка $\varphi^4$ — вычислить четырехточечную амплитуду в струнной теории поля. Однако на сегодняшний день в литературе имеется лишь один такой пример — в работе [13], где вычислена амплитуда Венециано. Представляет интерес задача построения формализма струнной теории поля, в котором был бы заложен произвол в выборе граничных условий, существующий в теории струн изначально. Этот вопрос оставлен для будущего рассмотрения.

Автор благодарен Э. Ахмедову, Д. Гальцову, А. Дымарскому, А. Конечному, Д. Мельникову, А. Миронову, А. Морозову, В. Пестуну, К. Сарайкину и особенно А. Герасимову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-02-00878) и Программы поддержки научных школ (грант НШ-8004.2006.2).

### Литература

1. *Witten E.* // Nucl. Phys. 1986. **B268**. P. 253.
2. *Polchinski J.* // String theory. Cambridge, 1998.
3. *Rastelli L., Zwiebach B.* // JHEP. 2001. **0109**. P. 38.
4. *Moore G., Taylor W.* // JHEP. 2002. **0201**. P. 4.
5. *Hata H., Kawano T.* // JHEP. 2001. **0111**. P. 38.
6. *Aref'eva I.Ya., Belov D.M., Giryavets A.A.* et al. // Lectures at the Swieca Summer School. 2001.
7. *Gross D.J., Taylor W.* // JHEP. 2001. **0108**. P. 9.
8. *Gross D., Jevicki A.* // Nucl. Phys. 1987. **B283**. P. 1.
9. *Le Clair A., Peskin M.E., Preitschopf C.R.* // Nucl. Phys. 1989. **B317**. P. 411; P. 464.
10. *Kostelecky V., Samuel S.* // Nucl. Phys. 1990. **B336**. P. 263.
11. *Taylor W.* // Nucl. Phys. 2000. **B585**. P. 171.
12. *Gerasimov A., Shatashvili S.* // JHEP. 2000. **0010**. P. 34.
13. *Giddings S.* // Nucl. Phys. 1986. **B278**. P. 242.

Поступила в редакцию
16.01.06