УДК 621.372.2:519.612

АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РАСЧЕТЕ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ

А. Н. Боголюбов, В. В. Наговицын

(*кафедра математики*)

E-mail: delitsin@math356.phys.msu.su

Предложен численный алгоритм обработки одного класса разреженных матриц ленточного типа, возникающих при расчете волноведущих систем конечно-разностным методом.

Метод конечных разностей все более широко используется для математического моделирования волноведущих систем сверхвысокочастотной электродинамики, волоконной и интегральной оптики, акустики [1]. Конечно-разностный подход позволяет создавать весьма универсальные и эффективные алгоритмы для решения как прямых задач расчета волноведущих систем, так и обратных задач синтеза таких систем [2]. При использовании метода конечных разностей в прямой и вариационной (метод конечных элементов) постановках возникает проблема обработки разреженных матриц весьма высокого порядка с характерной структурой. Это ленточные матрицы с незаполненной лентой, состоящие из основной центральной и нескольких боковых лент, образующих оболочку. Такие матрицы ввиду их важности мы выделяем в специальный класс СЛ-матриц — сверхразреженных ленточных матриц (рис. 1).

Предлагаемый в настоящей статье алгоритм обработки матриц СЛ-типа в качестве основы использует классический метод элементарных вращений Гивенса. Непосредственное применение метода Гивенса для обработки матриц СЛ-типа малоэффективно, поскольку происходит сильное заполнение матрицы за счет элементов, появляющихся вне ленты. Избежать этого заполнения для матриц с неширокой лентой позволяет метод Шварца [3], базирующийся на методе Гивенса. В методе Шварца применяется такая стратегия использования элементарных вращений Гивенса, когда за пределами ленты возникает

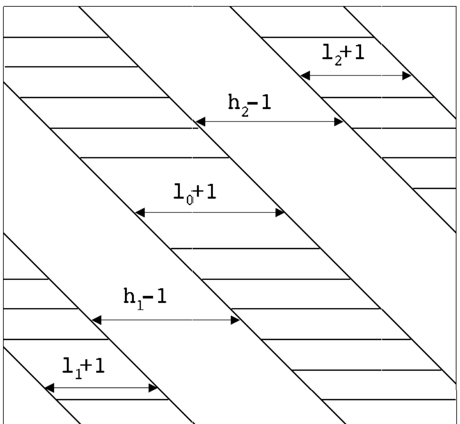
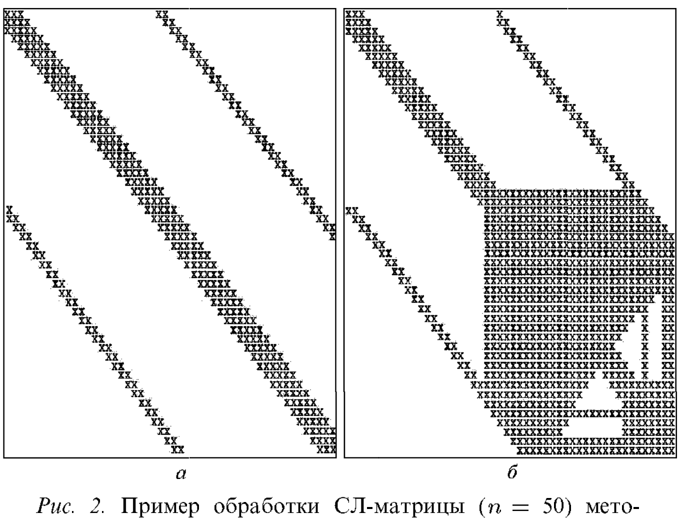


Рис. 1. Портрет СЛ-матрицы

лишь один новый ненулевой элемент, положение которого определятся априори для каждого уничтожаемого элемента. Последовательными вращениями этот новый ненулевой элемент выводится за пределы матрицы, т. е. уничтожается. Такая стратегия дает достаточно хорошие результаты для узких лент, приводя матрицы к трехдиагональному виду. Но при обработке широких слабозаполненных лент она обнаруживает два недостатка. Во-первых, заполнение ленты становится подавляющим даже в случае сверхразреженных матриц. Так, на рис. 2, *а* изображена СЛ-матрица, результат обработки которой методом Шварца показан на рис. 2, *б* (проведено исключение внешних диагоналей оболочки). Во-вторых, данный метод не учитывает внутреннюю структуру ленты (на что он и не рассчитан).

В предлагаемом алгоритме используются основные принципы, заложенные в методе Шварца, но с иной стратегией уничтожения ненулевых элементов. Гораздо эффективнее при обработке матриц СЛ-типа производить уничтожение элементов не по строкам, а по ограничивающей оболочку диагонали. При этом возникает эффект образования «волны Гивенса»: диагонали матрицы «перекатываются» друг через друга и в матрице происходит как бы движение «волны». Крайне важно, что при таком процессе обработки матрицы заполнение не возникает и количество ненулевых элементов остается неизменным.



а *б*

Рис. 2. Пример обработки СЛ-матрицы ($n = 50$) методом Шварца: портрет матрицы до обработки (*а*) и после исключения внешних диагоналей боковых лент (*б*)

Найденный эффект позволяет резко увеличить скорость обработки данных матриц и многократно сократить используемый объем памяти компьютера.

Введем некоторые характеристики портрета матрицы СЛ-типа (см. рис. 1). При этом для большей общности будем рассматривать несимметричные матрицы СЛ-типа. Пусть l_0+1 обозначает ширину центральной (главной) ленты, l_1+1 — ширину нижней и l_2+1 — ширину верхней ленты, h_1-1 — расстояние от нижней ленты до главной, h_2-1 — расстояние от верхней ленты до главной.

Опишем вначале алгоритм, который назовем «волной Гивенса». Пусть в данный момент происходит исключение элемента нижней ленты, находящегося во внешней ограничивающей диагонали в столбце с номером k_1 (т. е. наиболее низколежащего отличного от нуля элемента данного столбца). Выбирается строка, самый левый ненулевой элемент которой расположен в столбце k_1, и обе строки (содержащая исключаемый элемент и выбранная) заменяются их линейными комбинациями, коэффициенты которых подбираются из условия обращения в нуль исключаемого элемента. При этом измененными оказываются строки с номерами $k_1+l_0/2+h_1+l_1$ и $k_1+l_0/2$. Первое требование состоит в том, чтобы ширина главной ленты не возрастала. Отсюда получается следующая система условий на введенные выше параметры:

$$l_1 \leqslant l_0, \quad l_2 \leqslant l_0, \quad l_2+h_2 \leqslant l_1+h_1. \tag{1}$$

Второе требование для алгоритма «волна Гивенса» состоит в том, чтобы вновь появившиеся ненулевые элементы не располагались вне боковых лент, что для верхней боковой ленты приводит к условию

$$k_1+l_1+h_1+l_0 \leqslant k_1+l_0+h_2+l_2. \tag{2}$$

Сравнивая условие (2) с неравенствами (1), получаем, что $h_1+l_1=h_2+l_2$. Отметим, что данные соотношения справедливы для элементов лент, расположенных достаточно далеко от краев. Для элементов, находящихся в левой нижней части нижней ленты, снова получается условие $l_0 \geqslant l_1$. Однако везде ранее предполагалось, что в любой рассматриваемой строке присутствуют элементы только двух лент. Поскольку же в алгоритме «волна Гивенса» боковые ленты перемещаются по направлению к главной ленте, то в процессе обработки матрицы наступит момент, когда в одной строке окажутся ненулевые элементы трех лент. При этом если ранее вычитаемая строка с номером $k_1+l_0/2$ левее главной ленты не обладала ненулевыми элементами, то теперь возможна ситуация, когда все не обладающие такими элементами предыдущие строки, использованные для исключения в данном столбце, уже не подходят в качестве исключающих. У подходящей для исключения строки левее главной ленты есть ненулевые элементы. Они принадлежат обрабатываемой в текущей момент ленте, и, следовательно, при образовании линейной комбинации возникает заполнение в левом нижнем углу матрицы вне боковой ленты, что снижает эффективность алгоритма.

Одним из возможных путей устранения указанного недостатка алгоритма «волна Гивенса» с сохранением его основных положительных свойств является обращение порядка используемых элементарных вращений, когда вместо перемещения боковых лент к главной происходит их перемещение по направлению от главной ленты. В этом заключается основная идея предлагаемого нами алгоритма «обратная волна Гивенса». Выбор вычитаемого столбца производится аналогично выбору в алгоритме «волна Гивенса». Пусть необходимо исключить верхний элемент нижней ленты в столбце с номером k_2. Этот элемент находится в строке с номером $k_2+l_0/2+h_1$. В той же строке выбирается элемент главной диагонали, максимально удаленный от нижней ленты. Этот элемент расположен в столбце с номером $k_2+h_1+l_0$. Для обращения в нуль исключаемого элемента используются вращения Гивенса. В алгоритме «обратная волна Гивенса» предполагается отсутствие заполнения на каждом шаге области между центральной и боковыми лентами при постоянстве ширины главной ленты. Требование постоянства (не увеличения) ширины главной ленты для столбцов с номерами k_2 и $k_2+h_1+l_0$ приводит соответственно к условиям $l_0+h_1-h_2 \geqslant l_2$; $h_1 \leqslant h_2$; $l_0 \geqslant l_1$. Эти условия станут достаточными, если к ним добавить требование появления новых ненулевых элементов выше верхней ленты для столбца с номером $k_2+h_1+l_0$ и ниже нижней ленты для столбца с номером k_2. Для столбца k_2 при используемом методе обработки матрицы это условие выполняется автоматически. Для столбца $k_2+h_1+l_0$ данное требование сводится к условию $h_1 \geqslant h_2$. Учитывая полученное ранее соотношение $h_1 \leqslant h_2$, будем иметь условия $l_0 \geqslant l_2$, $h_1=h_2$, $l_0 \geqslant l_1$. Данные соотношения записаны для участков лент, далеких от границ матрицы, однако они могут быть перенесены и на элементы, находящиеся возле ее границ, путем введения фиктивного окаймления матрицы. Наиболее жестким является требование равноудаленности ($h_1=h_2$) боковых лент от центральной. Однако это требование можно обойти, если на начальном этапе обработки матрицы провести симметризацию ее портрета. Требование неуширения главной ленты дает критерий применимости алгоритмов «обратная волна Гивенса» и «прямая волна Гивенса»: $l_0/2+h_1 \geqslant l_2+h_2$ для $h_2 \geqslant h_1$ и $l_0/2+h_2 \geqslant l_1+h_1$ для $h_1 \geqslant h_2$.

Заметим, что исключение по столбцам для нижней ленты возможно, пока номер строки исключаемого элемента не превышает $n-l_0/2+1$. Однако если номер столбца j исключаемого элемента a_{ij} удовлетворяет неравенству $j \geqslant l_0/2+1$, то для исключения такого элемента можно использовать строку с номером $j-l_0/2$. Использование элементарных вращений Гивенса для исключения таких элементов становится уже невозможным, поскольку, как нетрудно показать, на местах исключенных элементов в процессе обработки матрицы возникает заполнение.

Эта проблема может быть устранена, если для обработки таких элементов использовать исключение по Гауссу. Число элементов, подлежащих такому исключению, в каждой поддиагонали (или наддиагонали для верхней ленты) постоянно и равно $l_0/2$. Необходимо отметить, что только при исключении этих элементов могут возникнуть заметные ошибки округления, поэтому исключение следует проводить с модифицированным пивотированием по столбцу [4].

При использовании алгоритма «обратная волна Гивенса» нужно учесть, что существуют элементы, для исключения которых уже нельзя подобрать ни строки, ни столбца. Такие элементы располагаются в областях $j \leqslant l_0/2$, $i \geqslant n-l_0/2-1$ и $j \geqslant n-l_0/2-1$, $i \leqslant l_0/2$, где i — индекс строки, j — индекс столбца. Однако такой портрет матрицы может быть эффективно обработан стандартными способами [5].

Для определения возможности обработки матрицы с помощью алгоритмов «волна Гивенса» или «обратная волна Гивенса» удобно воспользоваться понятием трафарета. Определим трафарет как портрет, включающий в себя заданное семейство портретов. В данной задаче такое семейство портретов определяется двумя условиями:

1) ширины боковых лент должны быть не более l_0;

2) элементы a_{ij} боковых лент удовлетворяют условию $|i-j| \geqslant n/2$.

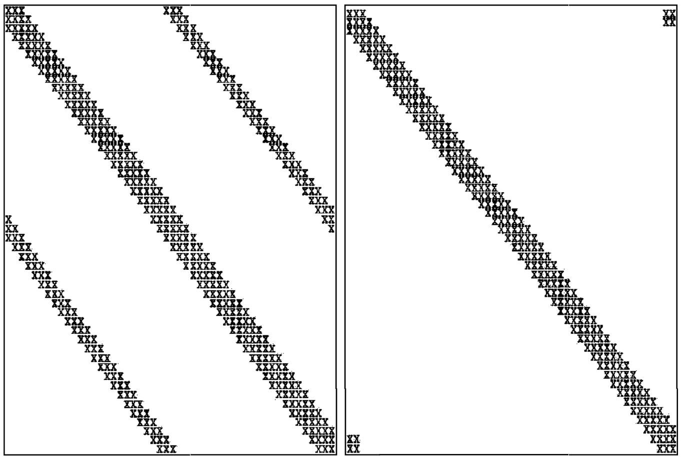
Таким образом, трафарет определяется симметричным портретом с множеством ненулевых элементов вида

$$\{a_{ij} : |i-j| \leqslant l_0,$$
$$\frac{1}{2}(n - \frac{l_0}{2} + 1 - l_1) \leqslant m_0 \leqslant |i-j| \leqslant m_0 + l_0\}.$$

Здесь m_0 фактически определяется ближайшим к главной ленте элементом боковых лент (т. е. имеющим наименьшее значение $|i-j|$). Критерий применимости состоит в том, что портрет преобразуемой матрицы можно представить как частный случай трафарета.

На рис. 3 приведен пример обработки СЛ-матрицы с помощью алгоритма «обратная волна Гивенса». Из сравнения рис. 2 и 3 следует, что алгоритм «обратная волна Гивенса» выгодно отличается от алгоритма Шварца, поскольку при его применении вследствие эффекта образования «волны Гивенса» не происходит заполнения матрицы.

Разработанный алгоритм «обратная волна Гивенса» является эффективным специализированным алгоритмом для обработки достаточно широкого класса СЛ-матриц. По сравнению с существующими алгоритмами он обладает следующими преимуществами. 1. В процессе обработки СЛ-матриц не возникает заполнения матрицы в связи с эффектом образования «волны Гивенса». 2. По сравнению с алгоритмом Шварца, в котором требуется порядка $O(n^3)$ арифметических операций для обработки СЛ-матрицы n-го порядка, в алгоритме «обратная волна Гивенса» число операций снижено до $O(n^2)$, в связи с чем достигается значительное уменьшение времени счета для больших порядков обрабатываемых матриц. 3. Многочисленные эксперименты показали, что предлагаемый метод обработки СЛ-матриц обнаруживает хорошую устойчивость по отношению к ошибкам округления.



а *б*

Рис. 3. Пример обработки СЛ-матрицы ($n = 50$) с помощью алгоритма «обратная волна Гивенса»: портрет матрицы до обработки (*а*) и после обработки (*б*)

Авторы выражают искреннюю благодарность проф. А.Г. Свешникову за ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-01-00111).

Литература

1. *Боголюбов А.Н., Делицин А.Л., Красильникова А.В.* и др. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 5. С. 39.
2. *Боголюбов А.Н., Красильникова А.В., Минаев Д.В., Свешников А.Г.* // Радиотехника. 1997. № 1. С. 81.
3. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.
4. *Тыртышников Е.Е.* Краткий курс численного анализа. М.: ВИНИТИ, 1994.
5. *Тьюарсон Р.* Разреженные матрицы. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию
21.06.00