

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 538.56+535

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАССИЧЕСКИХ СЖАТЫХ ПОЛЕЙ

Ю. Е. Дьяков

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Для описания полей, находящихся в «сжатом» состоянии, введен базовый параметр — степень сжатия \varkappa , — который определяется дисперсиями квадратурных компонент поля и их взаимной корреляцией. Приведена зависимость различных характеристик сжатого поля от \varkappa и угла поворота фазовой плоскости.

1. Рассмотрим случайный процесс

$$y = \frac{1}{2} \tilde{A}_0(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.}, \quad \langle y \rangle = 0, \quad (1)$$

комплексная амплитуда которого \tilde{A}_0 является стационарным случайным процессом. Согласно (1)

$$\langle y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \tilde{A}_0 \tilde{A}_0^* \rangle [1 + \varkappa \cos 2(\omega_0 t + \theta_0)], \quad (2)$$

где

$$\varkappa = \frac{|\langle \tilde{A}_0^2 \rangle|}{\langle \tilde{A}_0 \tilde{A}_0^* \rangle} \quad (0 \leq \varkappa \leq 1), \quad 2\theta_0 = \arg \langle \tilde{A}_0^2 \rangle. \quad (3)$$

Параметр \varkappa имеет смысл коэффициента гармонической модуляции дисперсии (2) поля (1). Он характеризует также и «сжатие» этого поля. Для стационарного (несжатого) поля, очевидно, $\varkappa = 0$, так как дисперсия (2) в этом случае не зависит от времени. Величину \varkappa назовем *степенью сжатия*, различая поля в несжатом ($\varkappa = 0$), частично сжатом ($0 < \varkappa < 1$) и полностью сжатом ($\varkappa = 1$) состояниях.

Если ввести квадратурные компоненты $a_0 = \text{Re } \tilde{A}_0$, $b_0 = \text{Im } \tilde{A}_0$ ($\tilde{A}_0 = a_0 + ib_0$), то выражение (1) примет вид

$$y = a_0 \cos \omega_0 t - b_0 \sin \omega_0 t. \quad (4)$$

Параметры квадратурных компонент

$$\gamma_0 = \frac{\langle a_0^2 \rangle + \langle b_0^2 \rangle}{2} > 0, \quad \gamma_1 = \frac{\langle a_0^2 \rangle - \langle b_0^2 \rangle}{2} \geq 0, \\ \gamma_2 = \langle a_0 b_0 \rangle \geq 0$$

полностью определяют степень сжатия \varkappa и угол θ_0 в (2):

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}{\gamma_0}, \quad \cos 2\theta_0 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \geq 0, \\ \sin 2\theta_0 = \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \geq 0. \quad (5)$$

Из (3) и (5) следует, что условие сжатия поля типа (1) может быть выражено тремя способами: через степень сжатия ($\varkappa \neq 0$), комплексную амплитуду ($\langle \tilde{A}^2 \rangle \neq 0$), квадратурные компоненты ($\langle a_0^2 \rangle \neq \langle b_0^2 \rangle$ и (или) $\langle a_0 b_0 \rangle \neq 0$).

2. Выражения (1) и (4) можно преобразовать к виду

$$y = \frac{1}{2} \tilde{A} \exp[i(\omega_0 t + \theta)] + \text{к.с.} = \\ = a \cos(\omega_0 t + \theta) - b \sin(\omega_0 t + \theta), \quad (6)$$

где θ — произвольный угол,

$$a = a_0 \cos \theta + b_0 \sin \theta, \quad b = b_0 \cos \theta - a_0 \sin \theta, \\ \tilde{A} = \tilde{A}_0 e^{-i\theta}. \quad (7)$$

Переход от (4) к (6) соответствует повороту против часовой стрелки на угол θ координатных осей на фазовой плоскости (a_0, b_0) (рис. 1). Статистические характеристики квадратурных компонент следующим образом меняются при этом повороте:

$$\langle a^2 \rangle = \gamma_0(1 + \varkappa \cos \psi), \quad \langle b^2 \rangle = \gamma_0(1 - \varkappa \cos \psi), \quad (8)$$

$$\langle ab \rangle = \gamma_0 \varkappa \sin \psi, \quad \psi = 2(\theta_0 - \theta) \quad (9)$$

(рис. 2).

Отсюда находим зависимость от θ других характеристик сжатых полей: разности дисперсий $\Delta = \langle a^2 \rangle - \langle b^2 \rangle$, «произведения неопределенностей» $u = (\langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle)^{1/2}$, коэффициента сжатия $S = \langle a^2 \rangle / \langle b^2 \rangle$, коэффициента корреляции квадратурных компонент $R = \langle ab \rangle / \langle a^2 \rangle^{1/2} \langle b^2 \rangle^{1/2}$:

$$\Delta = 2\gamma_1 = 2\gamma_0 \varkappa \cos \psi, \quad u = \gamma_0 \sqrt{1 - \varkappa^2 \cos^2 \psi}, \quad (10)$$

$$S = \sqrt{\frac{1 + \varkappa \cos \psi}{1 - \varkappa \cos \psi}}, \quad R = \frac{\varkappa \sin \psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \cos^2 \psi}} \quad (11)$$

(рис. 2). При повороте остаются инвариантными

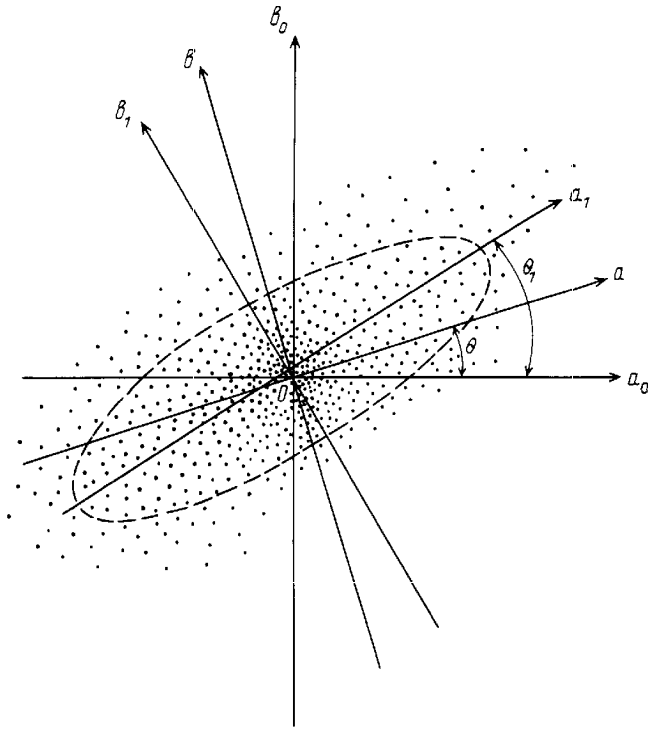


Рис. 1. Плоскость квадратурных компонент (фазовая плоскость). Эллипс сжатия (пунктирная линия)

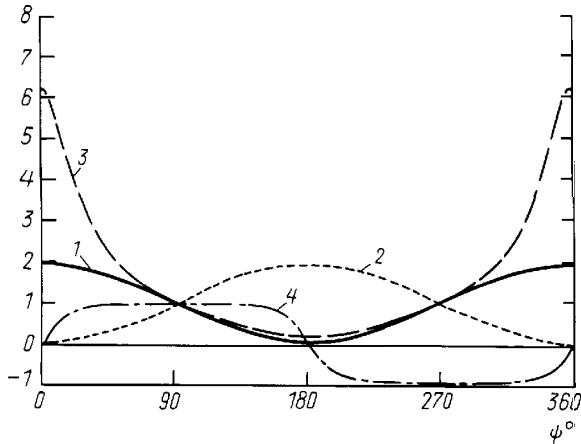


Рис. 2. Зависимость параметров сжатия от угла $\psi = 2(\theta_0 - \theta)$, где θ_0 — угол ориентации эллипса сжатия, θ — угол поворота фазовой плоскости (или фаза гомодина). Кривые 1–4 построены по формулам (8)–(11) при $\varkappa = 0.95$: 1 — $\frac{\langle a^2 \rangle}{\gamma_0}$, 2 — $\frac{\langle b^2 \rangle}{\gamma_0}$, 3 — $S = \frac{\langle a^2 \rangle^{1/2}}{\langle b^2 \rangle^{1/2}}$, 4 — $R = \frac{\langle ab \rangle}{\langle a^2 \rangle^{1/2} \langle b^2 \rangle^{1/2}}$, $\gamma_0 = \frac{\langle a^2 \rangle + \langle b^2 \rangle}{2}$ — средняя интенсивность сжатого поля

параметры $\gamma_0 = [\langle a^2 \rangle + \langle b^2 \rangle]/2$, $\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = [(\langle a^2 \rangle - \langle b^2 \rangle)/4 + \langle ab \rangle]^{1/2}$, а также, очевидно, степень сжатия $\varkappa = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}/\gamma_0$. Как следует из (8) и (11),

$$S = S_{\max} = \sqrt{\frac{1 + \varkappa}{1 - \varkappa}},$$

$$R = 0 \text{ (если } \psi = 0)$$

и

$$S = 1, \quad \langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle,$$

$$R = \pm |R_{\max}| = \pm \varkappa \text{ (если } \psi = \pm \pi/2).$$

3. Для выделения квадратурных компонент и измерения их статистических характеристик применяется гомодинное (синхронное, фазовое) детектирование [1]. При этом исследуемое поле y умножается на поле $y_0 \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, создаваемое местным генератором той же частоты (гомодинном), после чего отфильтровывается низкочастотная составляющая $(yy_0) \sim a_0 \cos \varphi_0 + b_0 \sin \varphi_0$ произведения yy_0 . Согласно (7), $(yy_0)_0 \sim a$, если $\varphi = \theta$, и $(yy_0)_0 \sim b$, если $\varphi_0 = \theta + \pi/2$. Таким образом, первая из формул (8) будет описывать зависимость $\langle a^2 \rangle$ от φ_0 . Согласно (8), имеет место π -периодическая гармоническая зависимость $\langle a^2 \rangle$ от φ_0 , что согласуется с экспериментальными данными (см. рис. 1 в [2] и рис. 3 в [3]). По наблюдаемым осцилляциям дисперсии $\langle a^2 \rangle$ можно оценить степень сжатия \varkappa :

$$\varkappa = \frac{v - 1}{v + 1}, \quad v = \frac{\langle a^2 \rangle_{\max}}{\langle a^2 \rangle_{\min}}.$$

4. Все полученные выше соотношения верны при любых статистических свойствах случайных процессов y , a и b . Теперь сделаем частное предположение, что поле y является гауссовским. При этом a и b также будут гауссовскими случайными переменными, вообще говоря, статистически связанными. Исключением является случай $a = a_1$, $b = b_1$, когда угол поворота фазовой плоскости θ равен углу θ_0 , определенному соотношениями (3) или (5). При этом согласно (9) $\psi = 0$ и $\langle a_1 b_1 \rangle = 0$. Поскольку для гауссовских случайных величин некоррелированность эквивалентна статистической независимости [4, с. 121], то в этом случае двумерное статистическое распределение для a_1 и b_1 распадается на произведение одномерных, т. е.

$$W(a_1, b_1) = W(a_1)W(b_1) \sim \exp \left[-\frac{a_1^2}{2\langle a_1^2 \rangle} - \frac{b_1^2}{2\langle b_1^2 \rangle} \right]. \tag{12}$$

Согласно (12), наиболее вероятные значения a_1 и b_1 будут сконцентрированы в области

$$\frac{a_1^2}{\langle a_1^2 \rangle} + \frac{b_1^2}{\langle b_1^2 \rangle} = \text{const},$$

имеющей форму эллипса (эллипс ошибок, или эллипс сжатия) с полуосями, пропорциональными $\langle a_1^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\gamma_0(1 + \varkappa)}$ и $\langle b_1^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\gamma_0(1 - \varkappa)}$, и углом наклона $\theta = \theta_0$ (рис. 1).

5. Сформулируем полученные результаты.

Введен базовый параметр κ — степень сжатия, — для определения которого достаточно найти дисперсии квадратурных компонент и их корреляцию при произвольном повороте фазовой плоскости.

Получены соотношения, описывающие связь с κ различных параметров сжатого поля и изменение этих параметров при повороте фазовой плоскости.

Показано, что, анализируя сжатые поля, не всегда имеет смысл выполнять процедуру (часто очень громоздкую) разложения их на квадратурные компоненты, поскольку величина κ просто выражается также через статистические характеристики комплексной амплитуды поля.

Литература

1. Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С. // Новые физические принципы оптической обработки информации / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 83.
2. Maeda M.W., Kumar P., Shapiro J.H. // Phys. Rev. 1985. **A32**, No. 6. P. 3803.
3. Wu L.A., Kimble H.J., Hall J.L., Wu H. // Phys. Rev. Lett. 1986. **57**, No. 20. P. 2550.
4. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
30.06.00

АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 536.46

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ФРОНТА ПЛАМЕНИ В ГАЗЕ ДЛЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ ЛЬЮИСА

А. В. Уваров, Е. А. Савченкова, А. И. Осипов

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

E-mail: uvarov@mol.phys.msu.su

Решена задача об устойчивости волн горения в условиях, когда неприменима известная теория Ландау–Даррье. Определены границы применимости теории Ландау–Даррье.

Одним из фундаментальных результатов теории горения является обнаружение Ландау и Даррье [1, 2] неустойчивости волн горения для всех режимов распространения. Этот результат известен под названием «парадокса Ландау — Даррье» (ЛД), поскольку, как показывают эксперименты, волна горения обычно устойчива в достаточно широком диапазоне параметров. Парадокс Ландау — Даррье стимулировал многочисленные исследования (см. обзор в работе [3]).

Однако авторы всех этих исследований не ставили под сомнение решение ЛД в области низких частот и ограничивались лишь рассмотрением поправок за счет различных эффектов (см., напр., поправку Маркштейна для средних и высоких частот [3]).

Кроме того, было показано, что решение ЛД основано на предположении одинакового вида температурных членов двух частных решений, соответствующих тепловой и акустической волнам, которые образуются в неравновесной области. Это позволяет (при соответствующем выборе коэффициентов) полностью исключить температурную составляющую (кроме колебаний фронта как целого) и рассматривать только изменение возмущений давления p' , скорости в направлении распространения волны v'_x

и перпендикулярной ей компоненты v'_y (для плоской волны все возмущения рассматриваются в виде $a'(x) \exp(i\omega t +iky)$).

Сравнительно недавно [4] была строго решена задача об устойчивости волны горения в газе для случая, когда уравнения для температуры и концентрации горючего компонента совпадают, т.е. когда число Льюиса $Le = D/\lambda_T$, где D — коэффициент диффузии, λ_T — коэффициент температуропроводности, равно единице. При этом число уравнений можно существенно уменьшить. Проведенный в работе [4] расчет подтвердил справедливость предположений ЛД.

Цель настоящей работы состоит в решении задачи об устойчивости волн горения в газе при $Le \neq 1$.

Рассмотрим проблему устойчивости на примере волны релаксации в колебательно-неравновесном газе, которая отделяет колебательно-неравновесный газ от равновесного [5]. Задачу будем решать в приближении высокой энергии активации [3], что исключает зависимость задачи от конкретной схемы реакции. Единственным требованием при этом является сильная зависимость константы скорости реакции от температуры. Это приводит к следующему неравенству для времени колебательной ре-