МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

На правах рукописи

Андреев Павел Александрович

Линейная и нелинейная эволюция возбуждений в конденсате Бозе-Эйнштейна и плотной квантовой плазме

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре общей физики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Кузьменков Л. С.
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор Рыбаков Ю. П. кандидат физико–математических наук, Алёшин И. М.
Ведущая организация:	Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова

Защита состоится «21» октября 2010г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр.2, МГУ, физический факультет, ауд. СФА

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан « __ » ______ 2010 года.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 501.002.10
в МГУ имени М. В. Ломоносова
доктор физико–математических наук профессор Грац Ю.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования и актуальность темы Необходимость развития методов полевого описания квантовых распределенных систем многих частиц диктуеся как необходимостью развития нового теоретического метода исследования процессов в системах многих частиц, так и конкретными физическими задачами, в частности задачами связанными с разработкой приборов, устройств спинтроники, задачами динамики ультрохолодных атомов щелочных металлов в магнитных ловушках и т.п. В связи с этим в последние годы активно развивается метод квантовой гидродинамики, основанный на представлении наблюдаемых физических величин в виде наборов полевых функций различной тензорной размерности. Этот метод включает в себя как частный случай квантовые уравнения баланса числа частиц, импульса и энергии, содержит наряду с величинами, имеющими тот же физический смысл, что и в классической физике, также и величины чисто квантового происхождения, к примеру квантовый потенциал Бома. Этот метод позволяет, исходя из первых принципов квантовой механики, выполнять расчеты физических свойств таких квантовых систем, как конденсат Бозе-Эйнштейна. Важным преимуществом метода квантовой гидродинамики по сравнению с исходным методом непосредственного решения уравнения Шредингера для многих частиц в многомерном конфигурационном пространстве, является возможность учета диссипативных явлений для систем для которых справедлив принцип суперпозиции силовых полей. Уравнение Шредингера относиться лишь к гамильтоновым системам и не содержит механизма релаксации импульса и энергии за счет диссипативных сил. Далее, набор стационарных состояний системы, как собственных значений гамильтониана характеризует лишь значения полных энергий системы частиц, что явно недостаточно в нестационарных задачах в распределенных системах, в которых происходит изменение плотности энергии, даже при сохраняющейся полной энергии. В диссертации исследуются физические процессы в системах многих заряженных или нейтральных частиц, обладающих собственным магнитным моментом. Примерами таких систем являются плотная плазма и плазмоподобные системы, состоящие из электрически заряженных и нейтральных частиц с магнитным моментом. В часности в диссертации выполнены расчеты динамики коллективного поведения частиц в среде пронизанной потоком нейтронов, взаимодействующего со средой посредством собственных магнитных моментов. Другой физически важной системой, рассматриваемой в диссертации является система ультрахолодных бозонов, например,^4He,ультрохолодные атомы щелочных элементов, таких как ^7Li, ^{23}Na, ^{87}Rb, ^{40}K, находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна в магнитных ловушках или оптических решетках.

<u>Цель диссертационной работы</u> Основной целью диссертации является разработка замкнутого аппарата исследований неравновесных процессов для широкого класса квантовых физических систем, получение уравнений квантовой гидродинамики заряженных частиц, обладающих магнитным моментом, учитывающей взаимодействие спинов частиц с токами частиц и воздействие как внешнего электрического поля, так и действие электрического поля, создаваемого частицами системы, на спины частиц, находящихся в движении. В качестве самостоятельной задачи

рассмотрен вывод уравнений квантовой гидродинамики частиц с короткодействующим потенциалом взаимодействия, установление явного вида в терминах волновых функций тензора квантовых напряжений ультрахолодных бозонов в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Важной в практическом отношени целью диссертации было получение решений уравнений для конкретных физических систем многих частиц и исследование физических процессов в таких системах.

Научная новизна В первых работах, посвященных квантовой гидродинамике систем многих частиц, в качестве исходного уравнения выступает уравнение Шредингера для N заряженных частиц обладающих магнитным моментом и находящихся во внешнем электромагнитном поле. При этом принималось также во внимание кулоновское и спин-спиновое взаимодействие между частицами системы. Таким образом спин-токовое и спин-орбитальные взаимодействия не учитывались. Новое содержание этому методу дает учет спин-токового и спин-орбитального взаимодействий в процессах, в которых существенна динамика спинов.

Далее, квантовая гидродинамика частиц, взаимодействие между которыми является короткодействующим, непосредственно вытекающая из многочастичного уравнения Шредингера, ранее не рассматривалась. В результате такого вывода уравнений квантовой гидродинамики для частиц с короткодействующим взаимодействием оказалось, что взаимодействие входит в континуальные уравнения в виде тензора напряжений, симметричного по обоим тензорным индексам, подобно классической гидродинамике. В качестве конкретной физической системы рассматривается система ультрахолодных бозонов в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Подобие уравнений квантовой гидродинамики для одной и многих частиц дает возможность построения для многочастичных систем эффективного одночастичного уравнения Шредингера. В диссертации получено соответствующее уравнения для волновых функций в среде (параметр порядка). В первом порядке по радиусу взаимодействия уравнения для волновой функции бозонов в среде, как оказывается, имеет вид уравнения Гросса-Питаевского. И учет короткодействующих потенциалов, и выражение для тензора напряжений в виде разложения по радиусу взаимодействия, и вывод на этой основе уравнения Гросса-Питаевского являются новыми. К новым результатам, полученым в диссертации, относятся также исследования эволюции возмущений в квантовых системах многих частиц, вывод дисперсионных соотношений, установление формул для инкрементов нарастания возмущений в квантовых системах содержащих нейтроны.

Научная и практическая значимость. Полученные в диссертации уравнения могут широко применяться для расчета нестационарных физических процессов в системах многих взаимодействующих частиц во внешних электромагнитных полях. Найденные формулы для зависимости частот возбуждений от волновых векторов могут непосредственно использоваться при разработке технологий создания приборов и устройств, функционирующих на основе учета поляризации спинов, в частности спинтроники. Произведенный расчет влияния внешнего магнитного поля на нестационарные процессы показывает возможность управления такими процессами путем изменения напряженности магнитного поля.

Апробация работы Результаты диссертации докладывались на международной конференции студентов и аспирантов "Ломоносов - 2005"(Москва, 2005 г.), "Ломоносов - 2006"(Москва, 2006 г.), "Ломоносов - 2007"(Москва, 2007 г.), "Ломоносов - 2008"(Москва, 2008 г.), "Ломоносов - 2009"(Москва, 2009 г.), “Ломоносовские чтения” секция физики, (Москва, 2007 г., 2008г.)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 печатных работ, в том числе 6 статей в рецензируемых научных журналах и 7 тезисов докладов на конференциях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 158 наименований. Общий объем текста – 144 машинописных страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулирована цель и задачи диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты, их практическая ценность, представлены положения, выносимые на защиту и описана структура диссертации. Представлен обзор современного состояния исследований по теме диссертации.

Во второй главе произведен вывод уравнений квантовой гидродинамики с учетом кулоновского, спин-спинового, спин-токового и спин-орбитального взаимодействий.

В первом параграфе сформулирована постановка проблеммы и представлен гамильтониан, на основе которого далее выводятся уравнения квантовой гидродинамики. Установлено аналитическое выражение для плотности тока многих частиц с кулоновским, спин-спиновым, спин-токовым и спин-орбитальным взаимодействиями.

Во втором параграфе для систем, описываемых при помощи уравнения Шредингера выведено уравнение эволюции плотности тока системы частиц с указанными выше взаимодействиями.

В третьем параграфе выведено общее уравнение эволюции плотности магнитного момента. Это уравнение в определенных приближениях содержит уравнение Блоха.

В четвертом параграфе выведено уравнение эволюции плотности энергии. Для случая медленого изменения физических характеристик это уравнение может рассматриваться как основное для квантовой термодинамики.

В пятом параграфе выполнена процедура введения поля скоростей в систему уравнений квантовой гидродинамики.

В шестом параграфе рассмотрено приближение самосогласованного поля в уравнениях квантовой гидродинамики. В приближении самосогласованного поля система уравнений квантовой гидродинамики имеет следующий вид. Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}n(\mathbf{r},t)+div\mathbf{j}(\vec{r},t)=0,$$

здесь $n(\mathbf{r},t)$ концентрация числа частиц, $\mathbf{j}(\vec{r},t)$; уравнение баланса импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t}j^{\alpha}(\mathbf{r},t)+\nabla^{\beta}\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)=\frac{e}{m}n(\mathbf{r},t)E^{\alpha}(\mathbf{r},t)$$
$$+\frac{e}{mc}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}j^{\beta}(\mathbf{r},t)B^{\gamma}(\mathbf{r},t)+\frac{1}{m}M^{\beta}(\mathbf{r},t)\nabla^{\alpha}B^{\beta}(\mathbf{r},t)$$

$$+F^{\alpha}_{s-p,s.s.p.}(\mathbf{r},t)+F^{\alpha}_{s-o,s.s.p.}(\mathbf{r},t).$$

Здесь e-заряд частицы, m её масса, $E^{\alpha}(\mathbf{r},t)$-напряженность электрического поля, $B^{\alpha}(\mathbf{r},t)$-индукция магнитного поля, $M^{\alpha}(\mathbf{r},t)$-магнитный момент единицы объёма, $\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)$-тензор плотности потока импульса.

Поле силы спин-токового взаимодействия имеет вид:

$$F^{\alpha}_{s-p,s.s.p.}(\mathbf{r},t)=-\frac{1}{m}n(\mathbf{r},t)\int d\mathbf{r}'(\nabla^{\beta}C^{\alpha\gamma}(\mathbf{r},\mathbf{r}'))J^{\beta\gamma}_{M}(\mathbf{r}',t)$$

$$+\frac{1}{m}\frac{2\gamma}{\hbar}n(\mathbf{r},t)\int d\mathbf{r}'C^{\alpha\beta}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varepsilon^{\beta\nu\delta}B^{\nu}(\mathbf{r}',t)M^{\delta}(\mathbf{r}',t),$$

В эту формулу входят величины: γ-гиромагнитное отношение, $J^{\alpha\beta}_{M}(\mathbf{r},t)$-тензор плотности потока магнитного момента, $C^{\alpha\beta}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_n) = (e_n/c)\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}r^{\gamma}_{pn}/r^{3}_{pn}$-функция Грина спин-токового взаимодействия.

Соответственно выражение для поля силы спин-орбитального взаимодействия:

$$F^{\alpha}_{s-o,s.s.p.}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{mc}\frac{2\gamma}{\hbar}\varepsilon^{\alpha\beta\mu}\varepsilon^{\beta\gamma\delta}B^{\gamma}(\mathbf{r},t)M^{\delta}(\mathbf{r},t)E^{\mu}(\mathbf{r},t)$$

$$-\frac{1}{mc}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}M^{\beta}(\mathbf{r},t)\partial_{t}E^{\gamma}_{ext}(\mathbf{r},t)-\frac{1}{mc}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^{\delta}E^{\gamma}_{ext}(\mathbf{r},t)J^{\beta\delta}_{M}(\mathbf{r},t)$$

$$-\frac{1}{mc}\varepsilon^{\beta\gamma\mu}J^{\beta\gamma}_{M}(\mathbf{r},t)\partial^{\alpha}E^{\mu}(\mathbf{r},t)-\frac{e}{mc}\varepsilon^{\alpha\beta\mu}M^{\beta}(\mathbf{r},t)\partial^{\gamma}\partial^{\mu}\int d\mathbf{r}'G(\mathbf{r},\mathbf{r}')j^{\gamma}(\mathbf{r}',t)$$

$$+\frac{1}{mc}n(\mathbf{r},t)(e_{p}\varepsilon^{\alpha\beta\mu}\partial^{\gamma}+e_{n}\varepsilon^{\gamma\beta\mu}\partial^{\alpha})\partial^{\mu}\int d\mathbf{r}'G(\mathbf{r},\mathbf{r}')J^{\beta\gamma}_{M}(\mathbf{r}',t).$$

Здесь $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ функция Грина кулоновского взаимодействия.

Уравнение баланса магнитного момента:

$$\frac{\partial}{\partial t}M^{\alpha}(\mathbf{r},t)+\nabla^{\beta}J^{\alpha\beta}_{M}(\mathbf{r},t)$$

$$= \frac{2\gamma}{\hbar}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(M^{\beta}(\mathbf{r},t)B^{\beta}(\mathbf{r},t)+\frac{1}{c}\varepsilon^{\beta\mu\nu}J_{M}^{\gamma\nu}(\mathbf{r},t)E^{\mu}(\mathbf{r},t)\right).$$

Уравнения поля в этом приближении возникают в виде:

$$div\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0,\ \ div\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=4\pi\sum_{a}e_{a}n_{a}(\mathbf{r},t)\ ,$$

$$rot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0,\ \ rot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t)+4\pi rot\mathbf{M}(\mathbf{r},t).\ ,$$

В седьмом параграфе обсуждаются методы получения замкнутого аппарата квантовой гидродинамики.

В третьей главе решена задача о распространении волн малой амплитуды в системе из двух сортов многих заряженных частиц с собственным магнитным моментом.

В первом параграфе рассматривается квантовая система многих взаимодействующих заряженных частиц с собственным магнитным моментом во внешнем магнитном поле. Формулируется задача о распространении малых возмущений в такой системе.

Во втором параграфе приводятся уравнения, описывающие коллективные процессы в такой системе, находится решение приведенной системы уравнений в приближении малых амплитуд возмущений.

В третьем параграфе решение исследуется в частном случае для распространения волн перпендикулярно внешнему магнитному полю. Получен вклад намагниченности в известные дисперсионные соотношения. Показана возможность существования двух новых волновых мод, для них получена зависимость $\omega(k)$ которая имеет вид:

$$\omega=|\Omega_{a}|(1-\frac{2\pi k^{2}c^{2}\chi_{a}}{\omega_{e}^{2}+k^{2}c^{2}-\Omega_{a}^{2}}). \qquad (1)$$

В этой формуле использованны следующие обозначения: $\Omega_a = e_a B_0/m_a c$-циклотронная частота частиц сорта a, ω_e-ленгмюровская частота электронов, χ_a- магнитная восприимчивость, n_{0a}-равновесное значение концентрации частиц.

В четвертом параграфе исследован случай распространения волн параллельно внешнему магнитному полю. Получены дисперсионные соотношения для электромагнитных, плазменной и акустической волн, показан вклад равновесной намагниченности и квантового потенциала Бома. Эти соотношения имеют:

$$\omega^2 = \omega_e^2 + v_{Fe}^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2} k^4, \tag{2}$$

$$\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = \frac{1 - \sum_a \frac{\omega_a^2}{\omega(\omega \pm \Omega_a)}}{1 \mp \sum_a \frac{4\pi\Omega_a \chi_a}{\omega \pm \Omega_a}}. \tag{3}$$

Здесь v_{Fe}-скорость Ферми для электронов.

В пятом параграфе исследованны спиновые волны, т.е. волны не сопровождающиеся возбуждением коллективного электрического поля. Дисперсионное соотношение для волны распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля представленно формулой:

$$\omega^2 = (v_{Fe}^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2} k^4) \frac{\chi_i}{\chi_i - \chi_e \mid \frac{\Omega_e}{\Omega_i} \mid}. \tag{4}$$

Показано, что в двухсортной системе многих заряженных частиц с собственным магнитным моментом возможно распространение спиновых волн малой амплитуды. Также показанно существование колебаний с частотами близкими абсолюдным значениям электронной и ионной циклотронной частотам.

В четвертой главе решена задача о возбуждении волн пучком нейтронов в двухсортной системе многих заряженных частиц с собственным магнитным моментом. Механизмом возбуждения волн является спин-спиновое и спин-токовое взаимодействие магнитных моментов нейтронов со спинами и токами в плазме.

В первом параграфе рассматривается система многих взаимодействующих заряженных частиц с собственными магнитными моментами во внешнем магнитном поле. Формулируется задача о распространении малых возмущений в такой системе и приводятся уравнения, описывающие коллективные процессы в этой системе.

Во втором параграфе рассмотрено возбуждение волн распространяющихся перпендикулярно направлению внешнего магнитного поля.

При $\omega = \mathbf{kU} + \varepsilon\Omega_b + \delta\omega$ (Ω_b-циклотронная частота нейтронов пучка), в окрестности точки пересечения этой ветви с кривой $\omega = |\Omega_d|(1 - 2\pi k^2c^2\chi_d/(\omega_e^2 + k^2c^2 - \Omega_d^2))$, реализуются условия для резонансного взаимодействия пучка нейтронов с электронами и ионами среды (индексом d обозначаются заряженные частицы). Сдвиг частоты $\delta\omega$ в этих условиях оказывается равным

$$\delta\omega = \pm 2\pi i\sqrt{\varepsilon\chi_b\chi_d \mid \Omega_b \mid \mid \Omega_d \mid}\frac{k^2c^2}{\omega_e^2 + k^2c^2} \qquad (5)$$

При возбуждении ионной волны неустойчивость имеет место для пучковой моды с $\varepsilon = +1$, при условии парамагнитности ($\chi_i > 0$) ионов, а также при $\varepsilon = -1$, если ионы диамагнитны ($\chi_i < 0$). При $\varepsilon = +1$ происходит эффективное возбуждение электронной волны пучком.

В третьем параграфе рассмотрен процесс возбуждения волн распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля.

В случае резонансного взаимодействия:

$$\omega = \omega_{resj}(k) + \delta\omega = kU_z + \varepsilon\Omega_b + \delta\omega, \tag{6}$$

где $\omega_{resj}(k)$ при $j = 1$ обозначена дисперсионная зависимость для альвеновской волны (А), при $j = 2$ для быстрой магнитозвуковой волны, $\mathbf{U}$-невозмущенная скорость нейтронов пучка; получено выражение для инкрементов неустойчивостей этих волн:

$$\delta\omega = \pm i\sqrt{\frac{4\pi\chi_b k^2 c^2 \mid \Omega_b \mid}{2\omega_{resj}(k) + \varepsilon\sum_d \omega_d^2 \frac{\Omega_d}{(\omega_{resj}(k) - \varepsilon\Omega_d)^2}}}. \tag{7}$$

Неустойчивость возникает при резонансе пучковой моды, для которой $\varepsilon = +1$, с альвеновской волной. Резонансное взаимодействие той же пучковой моды с БМЗ-волной приводит к неустойчивости БМЗ-волны при значениях волнового вектора k: $\omega_{res2}(k) < (2 + \delta)\Omega_i$, где δ-положительное число порядка $10^{-3} - 10^{-4}$. Неустойчивость не возникает при резонансе с пучковой модой, для которой $\varepsilon = -1$. В этом случае решение дисперсионного уравнения соответствует волнам с конечной амлитудой.

В четвертом параграфе рассмотрен процесс возбуждения спиновых волн.

При выполнении условий резонанса $kU_z + \varepsilon\Omega_b = |\Omega_d|(1 - 4\pi\chi_d)$ с колебаниями на циклотронных частотах Ω_d возникает неустойчивость с инкрементом:

$$\delta\omega^2 = -(4\pi)^2\chi_b\chi_d \mid \Omega_b \mid \Omega_d, \tag{8}$$

справедливое для электронов при $\varepsilon = -1$, для ионов при $\varepsilon = +1$, и выражение

$$\delta\omega^2 = -4\frac{\chi_b}{\chi_d} \mid \Omega_b \mid \Omega_d, \qquad (9)$$

для ионов при $\varepsilon = -1$ и для электронов при $\varepsilon = +1$.

Отметим, что неустойчивость в (8),(9) имеет место для ионной моды только в случае парамагнитных ионов.

В линейном приближении наличие пучка не влияет на дисперсию коллективной электрон-ионной спиновой волны (4).

<u>В пятой главе</u> решена задача о выводе уравнений квантовой гидродинамики системы нейтральных бозонов находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна.

В первом параграфе формулируется задача о квантовой динамике систем многих взаимодействующих нейтральных бозонов, с короткодействующим потенциалом взаимодействия.

Во втором параграфе показано, что для призвольной квантовой системы частиц с короткодействующим потенциалом взаимодействия поле силы взаимодействия, в уравнении баланса импульса, представляется как дивергенция симметрического тензора- тензора квантовых напряжений.

В третьем параграфе получена замкнутая система уравнений квантовой гидродинамики для конденсата Бозе-Эйнштейна. Выведено выражение для тензора квантовых напряжений в первом порядке по радиусу взаимодействия. При этом система уравнений квантовой гидродинамики имеет вид:

$$\partial_t n(\mathbf{r},t) + \nabla(n(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)) = 0,$$

$$mn(\mathbf{r},t)(\partial_t v^\alpha(\mathbf{r},t)+v^\beta(\mathbf{r},t)\nabla^\beta v^\alpha(\mathbf{r},t))+\partial^\beta p^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)-\frac{\hbar^2}{2m}n(\mathbf{r},t)\partial_\alpha\frac{\triangle\sqrt{n(\mathbf{r},t)}}{\sqrt{n(\mathbf{r},t)}}-$$
$$-\Upsilon n(\mathbf{r},t)\partial^\alpha n(\mathbf{r},t) = -n(\mathbf{r},t)\nabla^\alpha V_{ext}(\mathbf{r},t).$$

где через Υ обозначен следующий интеграл:

$$\Upsilon = \frac{4\pi}{3}\int dr(r)^3\frac{\partial U(r)}{\partial r},$$

$p^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)$-тензор кинетического давления, $V_{ext}(\mathbf{r},t)$-потенциал внешнего поля.

При выполнении условий $U(r)r^3 \to 0$ при $r \to 0$ и $r \to \infty$ справедливо равенство:

$$\Upsilon = -\int d\mathbf{r}U(r),$$

что согласуется с результатами работ других авторов.

Исходя из системы уравнений квантовой гидродинамики выведено уравнение для макроскопической волновой функции, которая определена через гидродинамические переменные: концентрацию и потенциал поля скоростей:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \sqrt{n(\mathbf{r},t)}\exp(\frac{i}{\hbar}m\phi(\mathbf{r},t)).$$

Величина $\phi(\mathbf{r},t)$ -потенциал поля скоростей.

Это уравнение имеет вид нелинейного уравнения Шредингера, и совпадает с уравнением Гросса-Питаевского:

$$\imath\hbar\partial_t\Phi(\mathbf{r},t) = (-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+\mu(\mathbf{r},t)+V_{ext}(\mathbf{r},t)-\Upsilon\mid\Phi(\mathbf{r},t)\mid^2)\Phi(\mathbf{r},t),$$

где $\mu(\mathbf{r},t)$ - химический потенциал.

В четвертом параграфе показанно, что в третьем порядке по радиусу взаимодействия тензор квантовых напряжений зависит от концентрации и ее производных. Установлена эта зависимость:

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{2}\Upsilon\delta^{\alpha\beta}n^2(\mathbf{r},t) - \frac{1}{48}\Upsilon_2(\delta^{\alpha\beta}\triangle + 2\partial_\alpha\partial_\beta)n^2(\mathbf{r},t).$$

здесь

$$\Upsilon_2 \equiv \frac{4\pi}{15}\int dr(r)^5\frac{\partial U(r)}{\partial r}.$$

Таким образом, получено уравнение состояния неидеального, неоднородного конденсата Бозе-Эйнштейна. Выведено соответствующее нелинейное уравнение Шредингера для макроскопической волновой функции, в этом приближении оно является интегро-дифференциальным:

$$\imath\hbar\partial_t\Phi(\mathbf{r},t) = (-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r},t) + \mu(\mathbf{r},t) - \Upsilon n(\mathbf{r},t) -$$
$$-\frac{1}{16}\Upsilon_2\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\frac{1}{n(\mathbf{r},t)}d\triangle n^2(\mathbf{r},t))\Phi(\mathbf{r},t),$$

В пятом параграфе исследована дисперсия собственных волн в конденсате Бозе-Эйнштейна в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Получена зависимость $\omega(k)$:

$$\omega_0^2 = (\frac{\hbar^2}{4m^2} + \frac{n_0\Upsilon_2}{8m})k^4 - \frac{\Upsilon n_0}{m}k^2.$$

<u>В шестой главе</u> рассмотрена нелинейная динамика волн в конденсате Бозе-Эйнштейна.

В первом параграфе формулирутся задача о распространении нелинейных возбуждений малой амплитуды в конденсате Бозе-Эйнштейна.

Во втором параграфе решается задача о нахождении нелинейного сдвига частот $B(b,k)$ собственных волн в конденсате Бозе-Эйнштейна.

Для решении этой задачи используется метод Крылова-Боголюбова-Митропольского.

Нелинейный сдвиг частоты $B(b,k)$ оказывается равным:

$$B(b,k) = b^2 \frac{12\hbar^2 k^2 \Upsilon - 3\hbar^2 \Upsilon_2 k^4 - 36 m n_0 \Upsilon^2 + \frac{21}{2} m n_0 \Upsilon \Upsilon_2 k^2 - \frac{7}{8} m n_0 \Upsilon_2^2 k^4}{12 m n_0 \omega_0 (2\hbar^2 + m n_0 \Upsilon_2)}.$$

В третьем параграфе рассмотрена динамика яркого солитона в конденсате Бозе-Эйнштейна в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Форма солитона в этом приближении получена в виде:

$$n(\xi) = \frac{2n_0}{\sqrt{\kappa^2 - \frac{1}{2}\kappa + 1}\cosh(2\alpha) + 1 + \kappa}.$$

В этой формуле использованы следующие обозначения: $n_0 = 2m|E|/(|\Upsilon|)$ и $\alpha = \sqrt{2 \mid E \mid} m\xi/\hbar$, $\xi \equiv x - v_0 t$, $\kappa =4 \mid E \mid m^2 \Upsilon_2/(\hbar^2 \mid \Upsilon \mid)$. Это решение получено при условиях $E < 0$, $\Upsilon > 0$ (притяжение между частицами).

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Установление зависимостей между физическими характеристиками квантовых систем взаимодействующих частиц; вывод уравнения квантовой гидродинамики, учитывающие спин-токовое и спин-орбитальное взаимодействия.

2. Получены решения уравнений квантовой гидродинамики, учитывающих собственные магнитные моменты частиц, в виде электромагнитных, плазменных и спиновых волн в системе многих заряженных частиц, электронов, ионов и т.п.

3. Путем решения и анализа уравнений квантовой гидродинамики установлено наличие неустойчивостей в системе заряженных частиц под действием пучка нейтронов находящихся в магнитном поле. Показано, что физическим механизмом возбуждения таких неустойчивостей является спин-токовое и спин-спиновое взаимодействия. Получены аналитические формулы для инкрементов неустойчивостей.

4. Вывод уравнений квантовой гидродинамики и соответствующего одночастичного нелинейного уравнения Шреденгера для системы нейтральных бозонов находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна в третьем порядке по радиусу взаимодействия.

5. Установлен общий вид квантового тензора напряжений в терминах волновых функций и продемонстрирован метод его вычисления на примере конденсата Бозе-Эйнштейна. Оказывается, что в этом случае квантовый тензор напряжений является функцией от концентрации частиц и её производных.

6. Посредством решения уравнений квантовой гидродинамики получена дисперсионная зависимость для волн которые могут возбуждаться и распространяться в системе нейтральных бозонов находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна. Решение выполнено с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

7. Найден нелинейный сдвиг частоты и амплитуды высших гармоник волн в конденсате Бозе-Эйнштейна путем решения нелиней-

ных уравнений квантовой гидродинамики в кубическом по возмущениям приближении. Решение выполнено с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

8. Аналитически вычислен профиль яркого солитона в конденсате Бозе-Эйнштейна. Решение выполнено с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

Основные результаты диссертации опубликованны в работах:

1. *Андреев П.А., Кузъменков* Л.С. Об уравнениях эволюции коллективных явлений в системах фермионов//Изв.вузов.Физика. 2007. №12. С.74. [Russian Physics Journal, v.**50**, No.12, 2007, pp.1251-1258.]

2. *Andreev P.A., Kuz'menkov* L.S. Problem with the single-particle description and the spectra of intrinsic modes of degenerate boson-fermion systems//Phys.Rev.A. 2008. v.**78**. p.053624(12).

3. *Андреев П.А. Кузъменков Л.С.* О собственных волнах в двухкомпонентной системе частиц с магнитными моментами//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2007. N.5. С.5-7. [Moscow University Physics Bulletin, 2007, v.**62**, No.5, p.271-276.]

4. *Андреев П.А., Кузъменков Л.С.* Возбуждение волн пучком нейтронов в двухкомпонентной системе заряженных частиц со спином //Ядерная Физика 2008. Т.71. С.1755-1760. [Physics of Atomic Nuclei, v.**71**, No.10, 1724-1729 (2008)].

5. *Андреев П.А., Кузьменков Л.С.* Дисперсия и нелинейный сдвиг частоты собственных волн в конденсате Бозе-Эйнштейна //Изв.вузов.Физика., 2009, №.9, С.24-30. [Russian Physics Journal, 2009, v.**52**, N.9, p.912-919.]

6. *Андреев П.А., Кузьменков Л.С.* Уравнения квантовой гидродинамики с учетом спин-токового и спин-орбитального взаимодействий //Динамика сложных систем, 2009, т.**3**, N.3. С.3-29.

7. *Андреев П.А., Кузьменков Л.С.* Коллективные явления при взаимодействии пучка нейтронов с квантовой плазмой. //Сборник тезисов конференции "Ломоносовские чтения"секция физики. 2007. С.115-119.

8. *Андреев П.А., Кузьменков Л.С.* Об уравнениях квантовой гидродинамики ультрахолодных бозонов и фермионов с короткодействующим потенциалом взаимодействия. //Сборник тезисов конференции "Ломоносовские чтения"секция физики. 2008. С.145-147.

9. *Андреев П. А., Кузьменков Л. С., Харабадзе Д. Э.* Спин-токовое взаимодействие в квантовой гидродинамике. //Сборник тезисов конференции “ЛОМОНОСОВ-2005” секция “ФИЗИКА”. 2005. т.2. С.88-90.

10. *Андреев П. А.* Новая собственная мода в парамагнетике//Сборник тезисов конференции “ЛОМОНОСОВ-2006” секция “ФИЗИКА”. 2006. т.2. С.81-82.

11. *Андреев П. А.* Материальные поля фермионов в квантовой механике и их динамика//Сборник тезисов конференции “ЛОМОНОСОВ-2007” секция “ФИЗИКА”. 2007. С.216-217.

12. *Андреев П. А.* Дисперсия нелинейных возбуждений в конденсате Бозе-Эйнштейна//Сборник тезисов конференции “ЛОМОНОСОВ-2008” секция “ФИЗИКА”. 2008. С.242-243.

13. *Андреев П. А., Труханова М. И.* //Сборник тезисов конференции “ЛОМОНОСОВ-2009” секция “ФИЗИКА”. 2009. С.237-239.