

и  $\mu = 0,0025$  значение корня  $\lambda_1 = 4,1650$ , определяющее энергию первого возбужденного состояния  $E_1 = -(V_0/\lambda_1)^2$ , имеет точность 4 знака после запятой. Естественно, что при заданном  $N$  нижние уровни энергии имеют большую точность, так как они вычисляются в более высоком приближении. Например, рангу матрицы  $N = 4$  соответствует четвертое приближение для наименьшего физического корня  $\lambda_0$  характеристического уравнения (11), тогда как корень  $\lambda_3$  при этом может быть вычислен (при малых значениях  $\mu$ ) только в первом приближении.

Отметим, что в нашем подходе определение энергетического спектра УШ (1) значительно проще и точнее, чем при использовании стандартной теории возмущений [6], в которой для получения подобной точности требуется проведение значительно более сложных вычислений.

Подобным образом могут быть определены и уровни энергии радиального УШ с произвольными значениями  $l \neq 0$  и  $Z \neq 0$ .

В заключение отметим, что рассмотренный подход может быть использован и для других потенциалов, например для комбинации короткодействующего притягивающего ядерного потенциала  $V(r) = -V_0 e^{-r/a}$ ,  $V_0 > 0$ , с дальнедействующими потенциалами: кулоновским и вида  $1/r^2$ . Тогда эффективный потенциал задачи имеет вид

$$V(r) = -V_0 e^{-r/a} + \frac{Z}{r} + \frac{A}{r^2}.$$

Естественно, предполагается, что величина  $A$ , как и в случае потенциала (1), такова, что нет падения на центр, т.е.  $A > -(2l+1)^2/4$  при заданном значении орбитального момента  $l$ .

Авторы глубоко благодарны А.В. Борисову, В.Ч. Жуковскому и Ю.М. Лоскутову за плодотворное обсуждение результатов работы.

#### Литература

1. Павлова О.С., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №1. С. 58 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No 1. P. 69).
2. Вишвецев А.С., Норин Н.В., Сорокин В.Н. // ТМФ. 1996. 109, №1. С. 107.
3. Вишвецев А.С., Вишвецев В.А., Татаринцев А.В., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. №5. С. 61 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 5. P. 76).
4. Блатт Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. М.: ИЛ, 1954.
5. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1966.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию  
19.01.00

УДК 519.632.4:517.968.23:537.874.37

## МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВОЛНОВОДНОЙ БИОИНФОРМАТИКИ

В. П. Моденов, И. К. Трошина

(кафедра математики)

Методом волноводного электромагнитного зондирования исследовано влияние электродинамических и геометрических характеристик биообъекта на распределение рассеянного электромагнитного поля. Рассмотрена дифракция волны  $H_{10}$  на диэлектрической неоднородности, моделирующей биологический объект. Соответствующая краевая задача для уравнения Гельмгольца решена методом интегральных уравнений с аналитической регуляризацией ядра.

### Введение

Проблема взаимодействия электромагнитных полей с живыми организмами возникла в связи с широким техническим использованием высокочастотных электромагнитных излучений. Результаты большого числа исследований в этом направлении широко применяются в биоинформатике [1–4] и практической медицине для диагностики и лечения различных заболеваний. Одним из перспективных и интенсивно развивающихся методов диагностики является дистанционное определение строения биологического объекта методом СВЧ-томографии [2]. Особый интерес представляет проблема моделирования искусственных объектов [3], дифракционные характеристики которых совпадали бы с характеристиками реаль-

ных живых объектов. Из практических потребностей возникают два основных типа обратных задач: распознавание и синтез [4], решение которых связано с информацией, следующей из решения прямой задачи.

Прямая же задача заключается в отыскании дифракционной картины поля на известном объекте. Математически это означает необходимость решения краевых задач для системы уравнений Максвелла или для уравнения Гельмгольца.

Краевая задача для уравнения Гельмгольца может быть сведена [5, 6] к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода в объеме, содержащем диэлектрическую неоднородность. Преимущество этого метода заключается главным образом в том, что он дает возможность получить картину

поля во всем рассматриваемом объеме. К сожалению, численная реализация метода требует значительной оперативной памяти компьютера.

Ядро получающегося интегрального уравнения (функция Грина) при совпадении аргументов имеет логарифмическую особенность. В работах [7, 8] был предложен метод аналитической регуляризации ядра, который позволяет ускорить сходимость численного решения.

В настоящей работе рассмотрена задача определения дифракционной картины поля на заранее известном неоднородном диэлектрическом образце, моделирующем биологический объект. Методом волноводного электромагнитного зондирования [9] исследовалось влияние электродинамических и геометрических характеристик образца на распределение рассеянного электромагнитного поля. На примере плоского волновода с идеально проводящими стенками рассмотрена задача дифракции волны  $H_{10}$  на образце, целиком заполняющем поперечное сечение параллельно узкой стенке волновода. Полученная краевая задача для уравнения Гельмгольца решалась методом интегральных уравнений по объему с аналитической регуляризацией ядра.

## 1. Математическая постановка задачи

Математическая задача определения электромагнитного поля в бесконечном волноводе с диэлектрическим включением сводится к нахождению в полосе  $\{-\infty < z < \infty, 0 < x < a\}$  решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца (ось  $z$  параллельна, а ось  $x$  перпендикулярна стенке волновода)

$$\Delta_{x,z}U + k^2\hat{\varepsilon}(x,z)U = 0 \quad (1)$$

с переменным коэффициентом

$$\hat{\varepsilon}(x,z) = 1, \quad (2a)$$

если  $(x,z)$  не принадлежит биообъекту,

$$\hat{\varepsilon}(x,z) = \varepsilon(x,z), \quad (2б)$$

если  $(x,z)$  принадлежит биообъекту, где  $\varepsilon(x,z)$  — в общем случае кусочно-гладкая комплекснозначная функция,  $k$  — волновое число. Это решение должно удовлетворять граничным условиям первого рода

$$U|_{x=0} = U|_{x=a} = 0, \quad z \in (-\infty, \infty), \quad (3)$$

условиям сопряжения на границе диэлектрической среды ( $\partial S$ )

$$[U]|_{\partial S} = 0, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]|_{\partial S} = 0, \quad 0 < x < a, \quad (4)$$

и линиях разрыва функции  $\varepsilon(x,z)$ , а также условиям излучения и возбуждения, заключающимся в требо-

вании отсутствия при  $z \rightarrow -\infty$  и  $z \rightarrow \infty$  нормальных волн, кроме падающих волн типа  $H_{10}$ :

$$\begin{aligned} U|_{z \rightarrow -\infty} &= \sin \frac{n_0 \pi x}{a} e^{i\gamma_{n_0} z} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin \frac{n \pi x}{a} e^{-i\gamma_n z}, \\ U|_{z \rightarrow \infty} &= \sin \frac{n_0 \pi x}{a} e^{-i\gamma_{n_0} (z-d)} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin \frac{n \pi x}{a} e^{i\gamma_n z}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $n_0$  — номер падающей волны единичной амплитуды,  $d$  — ширина области, содержащей диэлектрик,  $\gamma_n = \sqrt{k^2 - (n\pi/a)^2}$  — постоянные распространения нормальных волн,  $R_n$  и  $T_n$  — соответственно комплексные коэффициенты отражения и прохождения этих волн. Будем считать функцию  $\varepsilon(x,z)$  либо непрерывной, либо разрывной, с линиями разрыва вдоль осей координат.

Рассматриваемая краевая задача (1)–(5) сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} U(x,z) &= U_0(x,z) + \\ &+ k^2 \iint_S (\varepsilon(x',z') - 1) G(x,x';z,z') U(x',z') dx' dz', \end{aligned} \quad (6)$$

где функция Грина бесконечного волновода имеет вид [10]

$$G(x,x';z,z') = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma_n |z-z'|}}{i\gamma_n} \sin \frac{n \pi x}{a} \sin \frac{n \pi x'}{a}. \quad (7)$$

Таким образом, задача заключается в нахождении решения  $U(x,z)$  интегрального уравнения (6) с функцией Грина (7).

## 2. Численное решение интегрального уравнения

Для численного решения уравнения (6) область интегрирования разбивается прямоугольной сеткой с шагом  $\Delta x$  вдоль оси  $x$  и  $\Delta z$  вдоль оси  $z$  так, что количество узлов на осях  $x$  и  $z$  соответственно равно  $M$  и  $N$ . При этом интеграл в (6) преобразуется в сумму, и задача сводится к нахождению решения системы линейных алгебраических уравнений.

Ядро интегрального уравнения (6) при совпадении аргументов имеет логарифмическую особенность. Поэтому при численном решении задачи была проведена регуляризация ядра интегрального уравнения. Для этого область интегрирования  $S$  была разбита на две подобласти:  $S_0$ , содержащую особую точку, и область  $S \setminus S_0$ . Область  $S_0$  представляет собой  $\delta$ -окрестность точки  $(x',z')$ , причем величина  $\delta$  выбирается таким образом, чтобы вся область  $S_0$  лежала внутри одной ячейки интегрирования. Будем считать, что внутри области  $S_0$  функции  $\tau(x,z) = \varepsilon(x,z) - 1$  и  $U(x,z)$  постоянны, тогда урав-

нение (6) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 U(x, z) &= U_0(x, z) + \\
 &+ k^2 \iint_{S \setminus S_0} \tau(x', z') G(x, x'; z, z') U(x', z') dx' dz' + \\
 &+ k^2 \tau(x, z) U(x, z) \iint_{S_0} G(x, x'; z, z') dx' dz'.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь второй интеграл вычисляется аналитически:

$$\begin{aligned}
 I(x, z) &= \iint_{S_0} G(x, x'; z, z') dx' dz' = \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\gamma_n^2} \left( \sin \frac{\pi n x}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi n \delta_x}{a} (1 - e^{i\gamma_n \delta_z}).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Полученная функция (9) не имеет особенностей. Первый интеграл в (8) вычисляется по квадратурным формулам. Подставляя (9) в уравнение (8) и переходя в первом интеграле в (8) к сумме, получаем систему линейных алгебраических уравнений с коэффициентами

$$a_{t,s} = \begin{cases} 1 - k^2 (\varepsilon(x_i, z_j) - 1) I^{i,j}, & t = s, \quad I^{i,j} = I(x_i, z_j), \\ -k^2 \Delta x \Delta z (\varepsilon(x_n, z_m) - 1) G_{i,j}^{n,m}, & \\ t \neq s, \quad G_{i,j}^{n,m} = G(x_i, z_j; x_n, z_m), & \end{cases} \tag{10}$$

где  $t, s = 1, 2, \dots, M \times N$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $j = 1, 2, \dots, M$ . Система с коэффициентами (10) решается с помощью метода единственного деления Гаусса. Ее решение позволяет определить значения искомой составляющей вектора напряженности электрического поля ( $E_y$ ) в узлах сетки.

Обратим внимание на проблему, возникающую в процессе численного решения интегрального уравнения (6). Как уже отмечалось, при совпадении аргументов функция Грина имеет логарифмическую особенность. Полученный в результате выделения особенности ряд (6) содержит параметры  $\delta_x$  и  $\delta_z$ . При численном решении мы вынуждены ограничиваться конечным числом членов ряда  $\tilde{n}$  и иметь дело с его частичной суммой

$$I_n = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{n\gamma_n^2} \left( \sin \frac{\pi n x}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi n \delta_x}{a} (1 - e^{-i\gamma_n \delta_z}). \tag{11}$$

Казалось бы, размеры  $\delta$ -окрестности особой точки  $\delta_x$  и  $\delta_z$  должны быть малыми, однако нетрудно показать, что при  $\delta_{x,z} \rightarrow 0$  частичная сумма (11) ведет себя, как сумма  $\sum_{n=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{n}$  и, следовательно, ее величина в значительной степени зависит от количества слагаемых  $\tilde{n}$ . Оказывается, получаемое численное решение зависит от числа членов  $\tilde{n}$  суммы (11). В то же время

существуют значения  $\delta_x$  и  $\delta_z$ , при которых частичная сумма (11) ведет себя, как  $\sum_{n=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{n^3}$ . Исследование показывает, что такое поведение частичной суммы (11) для выбранного конечного значения  $\tilde{n}$  реализуется при значениях  $\delta_x$  и  $\delta_z$ , удовлетворяющих условиям

$$\sqrt{0,6} \frac{a}{\pi \tilde{n}} < \delta_x < \frac{\Delta x}{2}$$

и

$$0,56 \left( \left( \frac{\pi \tilde{n}}{a} \right)^2 - k^2 \right)^{-1/2} < \delta_z < \frac{\Delta z}{2}.$$

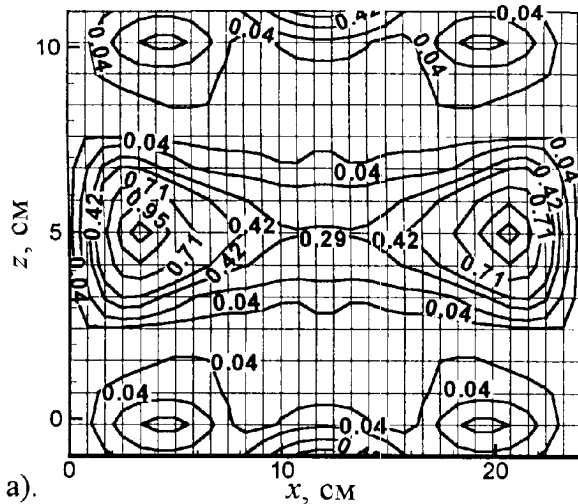
Такой выбор параметров  $\delta_x$  и  $\delta_z$  позволил получить численные решения, не зависящие от величины  $\tilde{n}$ , начиная с достаточно низких значений  $\tilde{n}$ .

### 3. Результаты численных расчетов

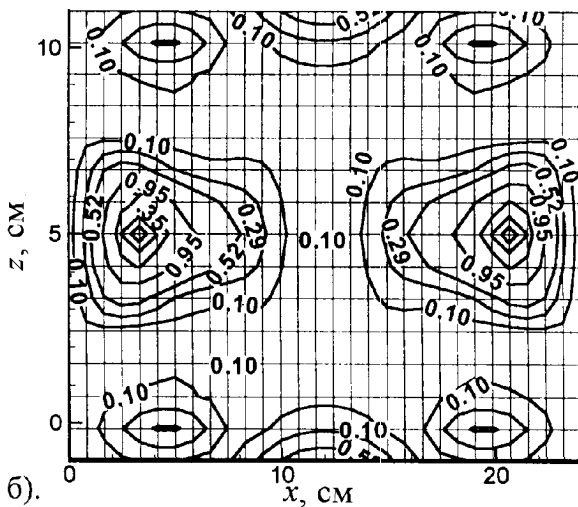
Численные расчеты выполнены на примере плоского волновода шириной 24 см, содержащего модель биологического объекта, которая представляет собой слой толщиной 10 см, целиком заполняющий поперечное сечение волновода. Слой содержит включение прямоугольной формы. В ряде расчетов внутри прямоугольного включения располагалась неоднородность прямоугольной формы размерами 4 × 4 см. Были выбраны диэлектрические параметры системы, характерные для биологических объектов (по данным работы [1]) в рассматриваемом диапазоне частот. Диэлектрическая проницаемость слоя принималась равной диэлектрической проницаемости мышечной ткани ( $\varepsilon = 49,55 + i \cdot 0,76$ ), включения — костной ткани ( $\varepsilon = 8,00 + i \cdot 0,01$ ), а неоднородности — воды ( $\varepsilon = 61,45 + i \cdot 10,00$ ). Предполагалось, что на модель биологического объекта с двух сторон падает волна  $H_{10}$  с частотой 1,225 ГГц.

Проведены расчеты для случаев однородной костной ткани, костной ткани с неоднородностью, а также для различного расположения неоднородности относительно оси волновода. Изменение картины поля в результате введения в однородный слой костной ткани неоднородного включения иллюстрируется на рис. 1.

На рис. 2 показаны зависимости квадрата модуля амплитуды  $y$ -й компоненты электрического поля вблизи исследуемого образца от координаты  $x$  для различного расположения неоднородности внутри костной ткани. В случае, когда неоднородность находится на одинаковом расстоянии от стенок волновода, кривая рассматриваемой зависимости симметрична относительно оси волновода и имеет локальный максимум в точке  $x = 12$  см, соответствующей положению оси волновода. Как видно из рис. 2, при смещении включения вдоль оси  $x$  к верхней стенке волновода точка локального максимума смещается вправо, при смещении вниз перемещается соответственно влево. Таким образом, по форме рассматриваемых кривых можно определять положение центра неоднородности.



а).



б).

Рис. 1. Влияние структуры биообъекта на распределение линий уровня  $|E_y|^2$  в волноводе (стенки волновода параллельны оси  $z$ ): слой костной ткани однороден (а) и включает неоднородность (б)

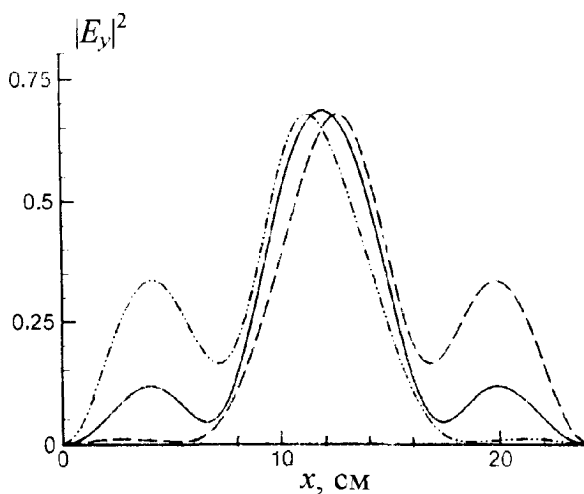
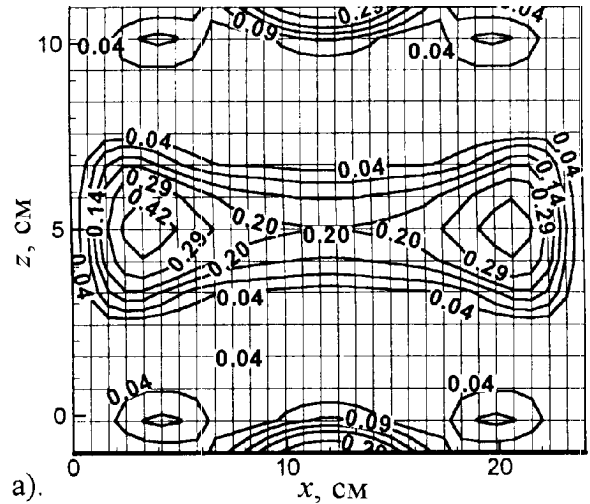
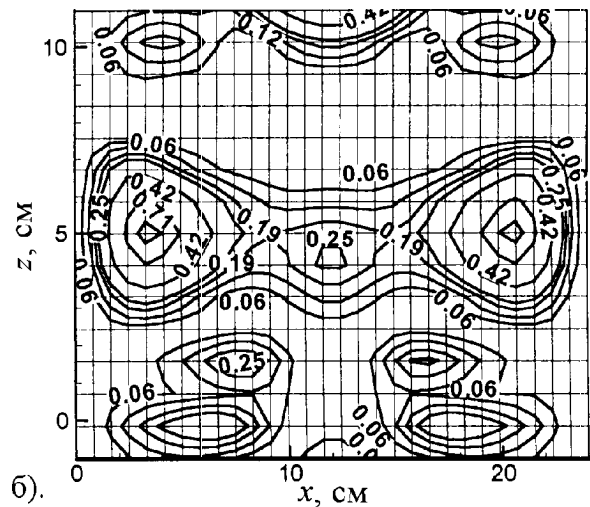


Рис. 2. Распределение мощности СВЧ-поля ( $|E_y|^2$ ) вне биообъекта в поперечном сечении волновода. Включение воды в костную ткань расположено на расстоянии от 8 до 12 см (штрих-пунктир), от 10 до 14 см (сплошная линия) и от 12 до 16 см (пунктир)



а).



б).

Рис. 3. Влияние расположения внутреннего слоя на распределение линий уровня  $|E_y|^2$  в волноводе (трехслойная модель биообъекта, стенки волновода параллельны оси  $z$ ): симметричное (а) и несимметричное (б) расположение внутреннего слоя в биообъекте

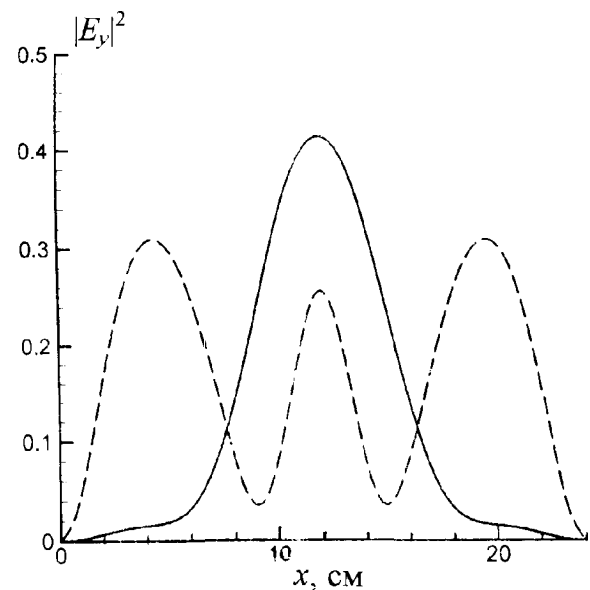


Рис. 4. Распределение мощности СВЧ-поля ( $|E_y|^2$ ) вне биообъекта в поперечном сечении волновода при различной ширине внутреннего слоя: 4 (сплошная линия) и 8 см (пунктир)

Кроме того, исследовалась дифракционная картина поля для трехслойной модели биологического объекта, т. е. для случая, когда костная ткань однородна и полностью заполняет поперечное сечение волновода. Были проведены расчеты для различных размеров внутреннего слоя и различного расположения его относительно внешних слоев. На рис. 3 представлены картины линий уровня  $|E_y|^2$  для трехслойной модели биологического объекта при симметричном и несимметричном расположении внутреннего слоя в образце. Влияние ширины внутреннего слоя на величину  $|E_y|^2$  вблизи исследуемого биообъекта хорошо видно из рис. 4.

Полученные результаты показывают, что распределение электрического поля в волноводе определяет характер неоднородности биологического объекта. По величине квадрата модуля его амплитуды можно судить о геометрических и физических свойствах исследуемого объекта. Это позволяет сделать вывод о возможности решения обратных задач, например задачи о создании заданного распределения мощности СВЧ-излучения внутри биологической среды путем варьирования величины ее диэлектрической проницаемости или изменения ее геометрических характеристик. Кроме того, полученные результаты показывают, что возможно решение задач синтеза многослойных структур с целью создания необходимого распределения электромагнитного поля в волноводе.

#### Литература

1. Shizuo Mizuthina, Yong Xiang, Toshifumi Sugiura // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1986. МТТ-34, No. 5. P. 644.
2. Еремин Ю.А., Ивахненко В.И., Рязанов М.В. // Радиотехн. и электроника. 1998. 43, №2. С. 133.
3. Афромеев В.И., Яшин С.А. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 1998. 1, №4. С. 58.
4. Еремин Ю.А., Свешиников А.Г. // ЖВМ и МФ. 1992. 32, №10. С. 1594.
5. Лерер А.М. // Изв. вузов, Радиоэлектроника. 1990. №5. С. 56.
6. Моденов В.П., Трошина И.К. // Вестн. новых медицинских технологий. 1998. 5. №3-4. С. 106.
7. Тихонов А.Н., Дмитриев В.И. // Вычислит. методы и программирование. Вып. X. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. С. 3.
8. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. // Вычислит. методы и программирование. Вып. X. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. С. 49.
9. Моденов В.П. // Вестн. новых медицинских технологий. 1996. 3, №1. С. 17.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию  
24.03.00

## АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.172.3

### ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФОТОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ПРОЦЕССАХ ДЕЛЕНИЯ

Б. С. Ишханов, С. П. Лихачев, В. И. Мокеев

(НИИЯФ)

Для оценки возможности поджига ядерных цепных реакций деления в подкритических сборках под действием интенсивных электронных пучков рассчитан выход нейтронов из мишени  $^{238}\text{U}$  в результате реакций  $(\gamma, n)$ ,  $(\gamma, 2n)$  и  $(\gamma, f)$  при облучении пучками электронов с энергиями 10 и 30 МэВ и током 100 мА и отношение энергии, выделенной в результате реакции  $(\gamma, f)$ , к энергии начального пучка электронов. Показано, что в результате такого облучения мишени из  $^{238}\text{U}$  формируются потоки нейтронов, интенсивность которых сравнима с интенсивностью потоков в ядерных реакторах.

В настоящее время ведутся обширные исследования, цель которых — определить возможности производства энергии в подкритических сборках, где цепные реакции деления инициируются потоками частиц, образующимися в ядерных реакциях [1, 2]. В работе [2] предложено для производства энергии в качестве средства поджига цепной реакции деления использовать нейтроны, образующиеся в фотоядерных реакциях  $(\gamma, n)$ ,  $(\gamma, 2n)$ ,  $(\gamma, f)$  в результате облучения отработанного ядерного топлива пучком электронов с энергией 10 МэВ.

Если выбрать энергию налетающего электрона

достаточно большой, то фотоны, образующиеся в электромагнитных ливнях, будут вызывать  $(\gamma, n)$ ,  $(\gamma, 2n)$  и  $(\gamma, f)$  реакции. Помимо нейтронов, образующихся в реакциях  $(\gamma, n)$ ,  $(\gamma, 2n)$ , низкоэнергичные нейтроны ( $T < 1,0$  МэВ) будут испускаться также осколками деления в реакциях  $(\gamma, f)$ . Поскольку энергия большей части (более 90%) образовавшихся в фотоядерных реакциях нейтронов не превышает нескольких МэВ, их использование предпочтительнее для поджига цепных реакций деления по сравнению с использованием нейтронов из реакций «spallation» [1], в которых больше 95% нейтронов