УДК 621.372.2

РАСЧЕТ НЕОДНОРОДНОСТИ ВОЛНОВОДА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. В. Лаврёнова

(*кафедра математики*)

В работе построен и реализован алгоритм численного решения задачи о рассеянии нормальной моды на локальной неоднородности в волноводе на основе метода конечных элементов. Для ограничения области используются разностные аналоги парциальных условий излучения. Сравниваются результаты применения линейных и квадратичных конечных элементов.

В настоящее время в сверхвысокочастотной электродинамике все большее применение находят металлодиэлектрические волноводы с неоднородным заполнением и нерегулярной геометрией, а также различные системы и устройства на их основе. Современная техника высокоточных измерений требует соответствующих методов расчета, что исключает применение приближенных аналитических методов и приводит к необходимости создания мощных, высокоточных алгоритмов численного расчета конкретных систем. Этим требованиям отвечают алгоритмы, разработанные на основе конечно-разностных методов в прямой и вариационной постановках [1, 2]. Такие методы позволяют создавать универсальные и чрезвычайно эффективные алгоритмы для математического моделирования широкого класса систем сверхвысокочастотной электродинамики, а также для решения задач математического проектирования подобных систем [3, 4]. Однако применение конечно-разностных методов, в частности метода конечных элементов, для расчета волноведущих систем вызывает ряд сложностей, одной из которых является проблема ограничения области, в которой ищется решение. В случае локальной неоднородности весьма эффективным оказывается использование парциальных условий излучения, впервые предложенных А. Г. Свешниковым в работе [5]. Для алгоритмов расчета волноведущих систем на основе метода конечных разностей такой подход был впервые использован в работе [6]. В настоящей работе аналогичный подход к ограничению области применяется в алгоритме, построенном на основе метода конечных элементов. Использование этого метода для расчета волноведущих систем позволяет, в частности, существенно повысить его точность, сохраняя экономичность, путем повышения степени аппроксимирующих решение базисных функций.

Запишем математическую постановку задачи дифракции электромагнитных волн на локальной неоднородности в волноводе без поглощения (двумерный случай). Стенки волновода предполагаются идеально проводящими. Пусть ось z направлена по оси волновода, а ось x – перпендикулярно оси z. В связи с решением задачи дифракции на неоднородности в волноводе рассматривается задача для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 \varepsilon\, u = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \{z \in (-\infty, \infty);\ x \in [0, 1]\}$ с однородными граничными условиями на боковой поверхности волновода:

$$u|_{x=0} = 0, \qquad (2)$$

$$u|_{x=1} = 0, \qquad (3)$$

где u — поле в волноводе, $\varepsilon(z, x)$ — диэлектрическая проницаемость:

$$\varepsilon(z, x) = \begin{cases} 1, & z < z_1, \ \ z > z_2, \\ \varepsilon \geqslant 1, & z_1 < z < z_2, \end{cases} \qquad (4)$$

k — волновое число.

Вне области D $(z_1 < z < z_2)$, где заключена неоднородность заполнения, поле можно представить в виде разложения по системе собственных волн:

$$\varphi_n = \psi_n \, e^{\pm i \, \gamma_n \, z},$$

где $\gamma_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$, λ_n, ψ_n — собственные значения и собственные функции индуцированной задачи в сечении.

В данном случае сечением является отрезок $x \in (0, 1)$, поэтому

$$\lambda_n = \pi^2 n^2, \quad \psi_n = \sqrt{2} \sin \pi \, n \, x, \quad n = 1, \dots \, .$$

Так как для распространяющейся волны с вещественным $\gamma_n = \sqrt{\pi^2 \, n^2 - k^2}$, задача может рассматриваться только для k ниже частоты отсечки — в данном случае $k < \pi$.

На сечениях волновода плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$ поставим парциальные условия излучения, которые позволяют рассматривать внутреннюю краевую задачу с нелокальными краевыми условиями:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=z_1} = -\sum_n i\gamma_n (u, \psi_n)_{S_1} \psi_n + \sum_n 2i\gamma_n (\xi, \psi_n)_{S_1} \psi_n, \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=z_2} = \sum_n i\gamma_n (u, \psi_n)_{S_2} \psi_n \qquad (6)$$

(ξ — падающая волна).

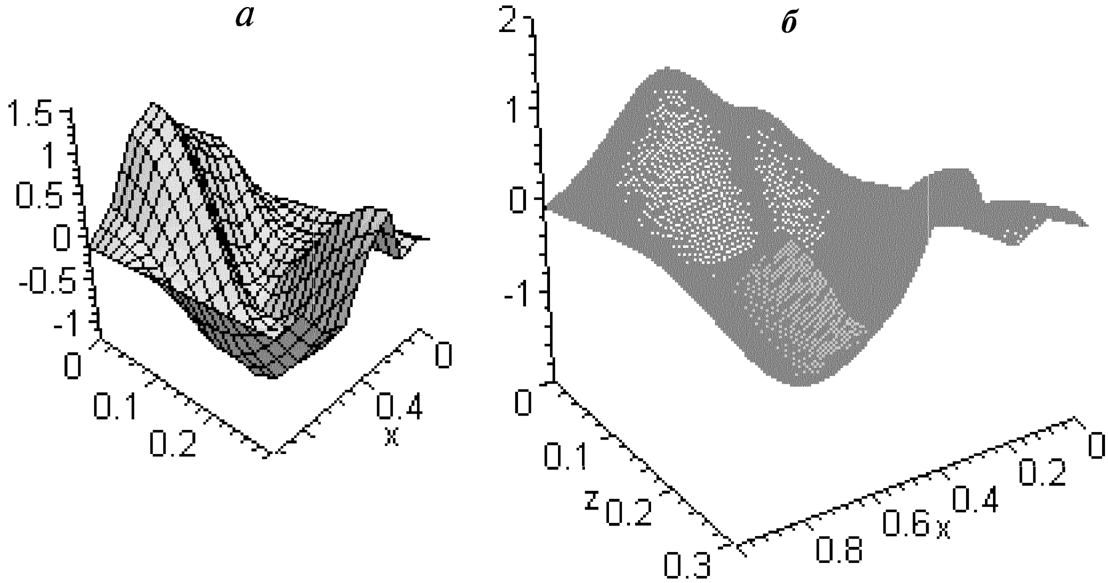

Рис. 1. Вставка в верхней половине волновода: (*а*) конечные элементы первого порядка, (*б*) конечные элементы второго порядка

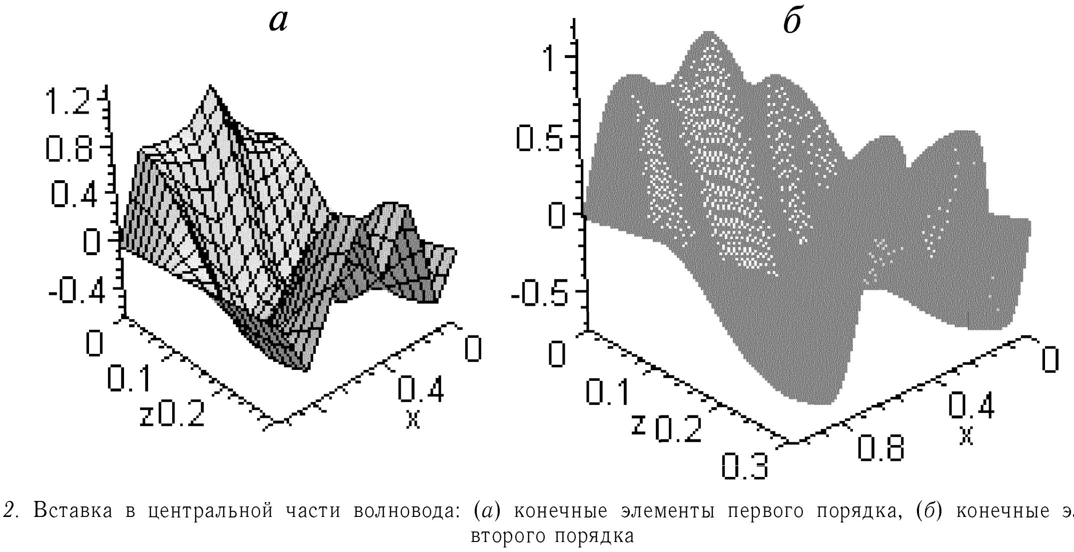

Рис. 2. Вставка в центральной части волновода: (*а*) конечные элементы первого порядка, (*б*) конечные элементы второго порядка

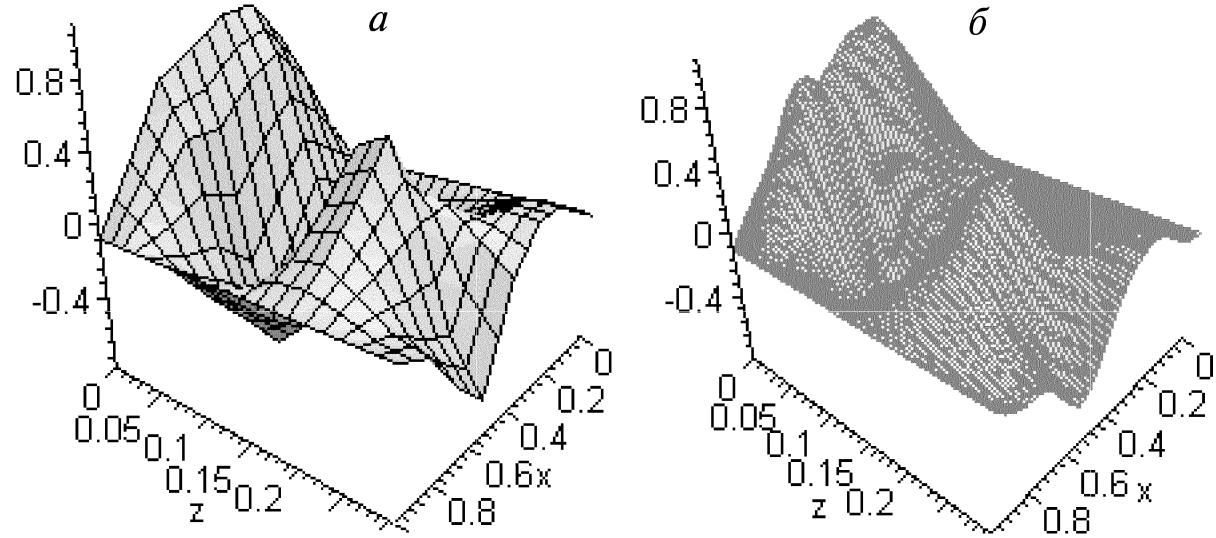

Рис. 3. Две вставки: (*а*) конечные элементы первого порядка, (*б*) конечные элементы второго порядка

Обобщенная постановка задачи, соответствующая краевой (1)–(6), заключается в поиске решения уравнения

$$-(\nabla u, \nabla v)_D + \sum_{l=1}^{2} \sum_{n=1}^{\infty} i\gamma_n (u, \psi_n)_{S_l} (v, \psi_n)_{S_l} - \\ - k^2(\varepsilon u, v)_D = 2\sum_{n=1}^{\infty} i\gamma_n (\xi, \psi_n)_{S_1} (v, \psi_n)_{S_1}, \tag{7}$$

что эквивалентно ранее поставленной задаче. Для решения уравнения (7) применяется метод конечных элементов. В качестве базисных функций выбираются билинейные и биквадратные функции.

Результаты решения задачи дифракции электромагнитных волн на локальной неоднородности в волноводе без поглощения методом конечных элементов представлены для трех видов неоднородности. В качестве падающей волны берется первая собственная волна, т. е. $\xi = \sqrt{2} \sin \pi x$, которая распространяется вдоль оси z в положительном направлении.

На рис. 1 показана картина распределения поля в волноводе в случае расположения неоднородности в верхней половине волновода — $x \in (1/2, 1)$, $z \in (z_1, z_2)$, а $\varepsilon = 2 + i$ (используется билинейная и квадратичная аппроксимации (рис. 1, *а, б*) соответственно). При наличии такой несимметрично расположенной вставки появляется эффект втягивания поля в область с большей оптической плотностью. Поглощение в данном случае является причиной относительного выравнивания амплитуды поля в области неоднородности.

На рис. 2 показана картина распределения поля в волноводе в случае расположения неоднородности по середине волновода, $\varepsilon = 2 + i$. Четко видно, что при прохождении волны по волноводу поле концентрируется в центральной области.

На рис. 3 поле распределяется по волноводу, в котором две вставки: $\varepsilon_1 = 2 + i$ и $\varepsilon_2 = 4 + i$. Интенсивность поля тем больше, чем больше значение действительной части ε.

Проведенные расчеты позволяют сделать следующие выводы. Метод конечных элементов с использованием разностных аналогов парциальных условий излучения позволяет строить экономичные алгоритмы для математического моделирования волноводов с локальной неоднородностью. Повышение степени аппроксимирующих решение базисных функций значительно повышает точность вычисления распространяющегося в волноводе поля даже при использовании достаточно грубой сетки.

Литература

1. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.
2. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Могилевский И.Е.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. №5. С. 14.
3. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Красильникова А.В.* и др. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. №5. С. 39.
4. *Боголюбов А.Н., Красильникова А.В., Минаев Д.В., Свешников А.Г.* // Матем. моделирование. 2000. **12**, №1. С. 13.
5. *Свешников А.Г.* // ДАН СССР. 1950. **3**, №5. С. 517.
6. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н.* // ЖВМ и МФ. 1974. **14**, №4. С. 947.

Поступила в редакцию
03.07.03