

Кузьмин Павел Александрович

Излучение фононов вихревыми нитями и распад турбулентного состояния в  
бозе-конденсате

01.01.03 – математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на физическом факультете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

**Научный руководитель:**

д.ф.-м.н., доцент

Шугаев Федор Васильевич

**Официальные оппоненты:**

д.ф.-м.н., профессор

Боголюбов Николай Николаевич

д.ф.-м.н., профессор

Осипов Владимир Андреевич

**Ведущая организация:**

Вычислительный центр имени А. А. Дородницына Российской академии наук

Защита состоится «23» апреля 2009 года в \_\_:\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова Дом 1, строение 2, Физический факультет

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГУ им. М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан «\_\_» марта 2009 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Грац Ю.В.

# 1 Актуальность проблемы

Данная работа посвящена важной и быстро развивающейся области теории сверхтекучести – теории турбулентности в сверхтекучей жидкости. Теория турбулентности в сверхтекучей жидкости важна для многих прикладных проблем, связанных с гелием-II. Действительно, присутствие вихревого клубка оказывает значительное воздействие на поток тепла, который не может описываться простой двухжидкостной моделью Ландау. Использование гелия-II в таких проектах, как охлаждение сверхпроводящих магнитов или в космических приложениях, требует глубоких исследований. В последние годы, ввиду использования гелия в качестве жидкости для экспериментов при очень высоких числах Рейнольдса, возобновился интерес к проблеме соотношения классической и квантовой турбулентности.

В дополнение к важности квантовой турбулентности в перечисленных случаях, теория хаотического вихревого клубка в He II представляет большой интерес с точки зрения общей физики.

Как часть теории сверхтекучести, теория квантовой турбулентности тесно связана с другими областями теории сверхтекучести: теорией образования вихрей, теорией взаимодействия сближающихся вихревых нитей, с проблемой критических скоростей и вопросом о роли, которую играют квантовые вихри в фазовых переходах. Изучение квантовой турбулентности позволяет получать нестандартные решения, проливающие свет на обозначенные проблемы.

Важной задачей гидродинамики является выяснение механизма распада турбулентного состояния в сверхтекучей жидкости. При температурах  $T > 1K$  основными факторами диссипации оказываются вязкость нормальной компоненты и взаимное трение. В случае низких ( $T < 0.1K$ ) температур названные источники рассеяния энергии турбулентного состояния отсутствуют, так как плотность нормальной компоненты мала. Эксперимент, однако, обнаруживает не зависящую от температуры диссипацию квантовой турбулентности. Указана возможность распада турбулентности за счет излучения звуковых волн в акте перезамыкания вихрей (vortex reconnection) и при распространении азимутальных волн вдоль вихревых нитей. В численном эксперименте установлена средняя мощность излучения возмущенного вихревого кольца, показано образование волны разрежения при перезамыкании вихрей. До сих пор, однако, остаются неясными как механизмы возникновения звуковых волн, так и относительные вклады двух названных способов излучения в эффективную кинематическую вязкость. В связи с этим представляет интерес изучение спектральных характеристик акустических волн, излучаемых турбулентной сверхтекучей жидкостью, и динамики хаотического вихревого клубка.

## 2 Цель работы

Целью настоящей работы является изучение некоторых свойств решений уравнения Гросса-Питаевского, а также развитие предложенной Немировским модели вихревого

клубка в сверхтекучем гелии. В частности, перед автором стояли следующие задачи:

- Изучение влияния потери длины нити при перезакрытии вихревых петель на динамику вихревого клубка и распад турбулентного состояния;
- Установление границ применимости модели Немировского и связей с известными гидродинамическими моделями турбулентности;
- Изучение спектра звуковых волн, излучаемых вихревыми кольцами при их перезакрытии;
- Изучение существенно нестационарных режимов эволюции и распада вихревого клубка в сверхтекучей жидкости;
- Учет влияния нормальной компоненты на вихревой клубок, изучение различных режимов его эволюции;
- Выяснение применимости модели случайного блуждания вихревых петель к изучению релаксационных процессов в вихревом клубке;
- Рассмотрение других возможных моделей турбулентности в бозе-конденсате.

### **3 Методы исследования**

Результаты диссертации получены с использованием современных методов теоретической и математической физики и функционального анализа.

### **4 Научная новизна**

Все основные научные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, и состоят в следующем:

- Получен спектр звуковых волн, излучаемых вихревым кольцом при перезакрытии. Отмечено сходство с классическим случаем.
- Предложена модель вихревого клубка в сверхтекучей жидкости, учитывающая потери энергии при перезакрытии нитей. Установлены границы применимости модели и ее связи с гидродинамическими моделями турбулентности.
- В предложенной модели обнаружены точные решения. Таким образом, найдена еще одна нелинейная интегрируемая система, представляющая собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных.
- Впервые исследованы быстрые, существенно нестационарные режимы распада турбулентности в бозе-конденсате. Изучено поведение вихревого клубка при его нестационарной эволюции.

- Учтено влияние нормальной компоненты на эволюцию вихревого клубка, изучены различные режимы эволюции и их связь с описанными в литературе ранее.
- При помощи модели случайного блуждания замкнутых вихревых петель изучены процессы релаксации вихревого клубка к стационарному состоянию. Определены времена и законы релаксации.
- Дана полная классификация интегрируемых инвариантных соболевских метрик на некотором однородном пространстве полупрямого произведения групп Гейзенберга и Вирасоро. Тем самым, получен ряд интегрируемых обобщений уравнения Камассы-Холма, вероятно, описывающих турбулентное движение в капиллярах.

## 5 Практическая и теоретическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в гидродинамике, теории квантовой турбулентности, теории интегрируемых систем.

## 6 Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре кафедры квантовой статистики и теории поля МГУ им. М.В. Ломоносова;
- на семинаре кафедры низких температур Московского энергетического института, 2008 год;
- на семинаре по статистической механике ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ, Дубна, 2008 год;
- на семинаре отдела механики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2008 год;
- на конференции «Ломоносовские чтения» в МГУ, 2007 год;
- на конференции молодых ученых «Ломоносов» в МГУ, 2006 год;
- на международной конференции «Fluxes and Structures in Fluids», С.-Петербург, 2007 г.;
- на международной конференции WEHSFF-2007, Москва, 2007 год.

## 7 Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в девяти работах список которых приводится в конце автореферата. Пять работ [1, 2, 3, 4, 5] опубликованы в изданиях, входящих в утвержденный ВАК перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

## 8 Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, и списка литературы, содержащего 55 наименований. Общий объем работы – 85 страниц.

## 9 Содержание работы

Во **введении** кратко изложена история вопроса, показана актуальность темы, сформулированы основные задачи и результаты диссертации.

Во **второй главе** кратко описано современное состояние теории квантовой турбулентности, основные теоретические и вычислительные модели, экспериментальные техники.

В **третьей главе** проведено численное моделирование процесса столкновения и перезамыкания вихревых колец.

Простейшее описание динамики слабо взаимодействующего бозе-газа дает уравнение Гросса-Питаевского – уравнение Хартри для одночастичной волновой функции системы взаимодействующих бозонов:

$$2i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi - (1 - |\psi|^2)\psi.$$

Одним из основных факторов, возмущающих свободное движение вихревых колец, является перезамыкание вихрей. Солитонные решения уравнения Гросса-Питаевского определяются двумя условиями. Первое условие соответствует требованию убывания на бесконечности возмущения, вызванного солитоном:

$$|\psi(x)| \rightarrow 1, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Потребуем также сохранения формы солитона при распространении: для каждого значения  $U$  скорости движения солитона

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \psi(x_1, x_2, x_3 - Ut).$$

Тогда для любого фиксированного  $t$  уравнение Гросса-Питаевского примет вид:

$$2iU\frac{\partial\psi}{\partial x_3} = \Delta_{x'}\psi + (1 - |\psi|^2)\psi,$$

$$\lim_{|x'|\rightarrow\infty} |\psi| = 1.$$

Решения такой краевой задачи и определяют солитоны уравнения Гросса-Питаевского. Вихревые кольца построены методом Ньютона, основанным на методе взаимных градиентов.

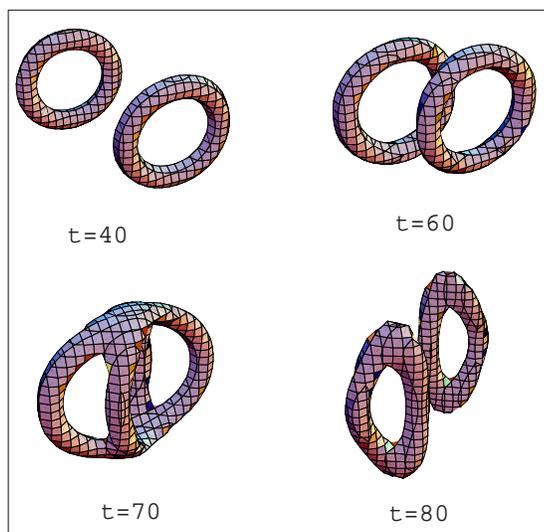


Рис. 1: Поверхности уровня плотности конденсата в различные моменты времени.

На рис. 1 представлена характерная картина перезамыкания вихревых колец. Перезамыкание колец приводит также к образованию двух волн разрежения, распространяющихся в направлении, перпендикулярном к плоскости, проведенной через оси вихревых колец. По мере распространения от места столкновения импульсы разрежения эволюционируют в звуковые волны.

Считается, что причиной возникновения таких волн являются возмущенные при столкновении колеблющиеся вихревые кольца. Спектр указанного участка обнаруживает ярко выраженный узкополосный характер (рис. 2), который, очевидно, объясняется описанным выше механизмом образования звуковых волн.

Полученные результаты для формы спектра согласуются с экспериментальными данными для классической жидкости. Сходство результатов, вероятно, связано с общим для классического и квантового случая механизмом образования волн.

Таким образом, один из механизмов распада турбулентного состояния при малых температурах обнаруживает сходство с классическим явлением излучения звука вихревым кольцом. Связанный со перезамыканием вихрей механизм рассеяния энергии турбулентности характерен для квантовой жидкости. Образующиеся в этом случае импульсы разрежения, распространяясь, эволюционируют в звуковые волны. Следует отметить, что, в отсутствие вязкости, столкновение вихрей является важным фактором, возмущающим движение вихревых колец; в связи с этим, явление перезамыкания вихрей приобретает первостепенное значение для обоих механизмов распада турбулентности.

В **четвертой главе** изучается закон эволюции предоставленного самому себе хаотического однородного и изотропного вихревого клубка в бесконечном пространстве. Кроме того, приведен вывод выражений для вероятностей слияния и распада вихревых петель.

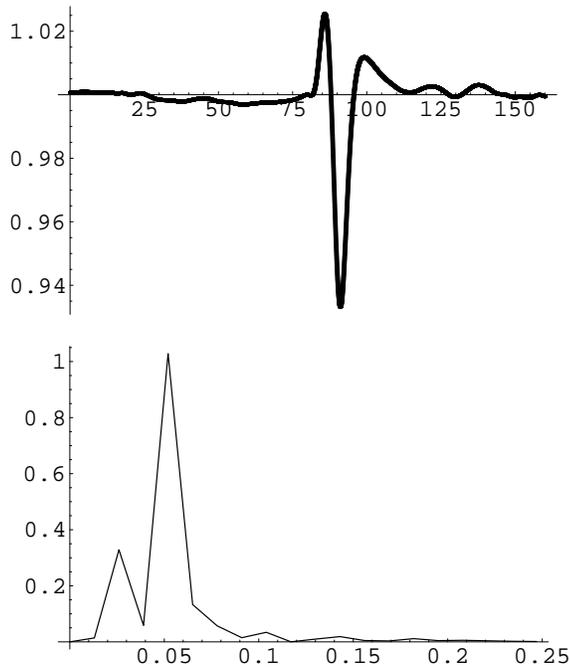


Рис. 2: Зависимость плотности конденсата от времени в точке  $(x_1, x_2, x_3) = (22.5, 0, 0)$  (верхний график); спектр участка  $110 < t < 180$  (нижний график).

Температура предполагается настолько малой, что плотностью нормальной компоненты и взаимным трением можно пренебречь. Основным результатом является закон (7) быстрого, существенно нестационарного распада плотного вихревого клубка.

Турбулентность в бозе-конденсате рассматривается как хаотический клубок вихревых нитей, взаимодействующих при их пересечении. В численных экспериментах, основанных на уравнении Гросса-Питаевского, установлено, что при сближении вихревых нитей с достоверностью происходит их перезамыкание, сопровождающееся излучением волн (импульсов разрежения) и возмущением самих нитей. В рассматриваемой в работе модели состояние в момент времени  $t$  задается функцией распределения  $n(l, t)$  вихревых петель по длинам. Перезамыкания нитей могут влиять на функцию распределения двояким образом: перезамыкание может приводить к слиянию двух петель длинами  $l_1$  и  $l_2$  в одну петлю длиной  $l \leq l_1 + l_2$  или к распаду одной петли длиной  $l$  на две длинами  $l_1$  и  $l_2$ ,  $l_1 + l_2 \leq l$ . Эти процессы могут сопровождаться излучением фононов.

Вероятности перезамыкания вычислены в предположении о броуновском случайном блуждании петель и выражаются формулами:

$$\begin{aligned} A(l_1, l_2, l) &= b_m V_l l_1 l_2, \\ B(l_1, l_2, l) &= b_s V_l l (\xi_0 l_1)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $b_m$ ,  $b_s$  – некоторые константы,  $V_l$  – характерная скорость вихревых нитей, связанная с радиусом кривизны нити  $\xi$  соотношением  $V_l = \frac{\kappa}{\xi}$ , где  $\kappa$  – квант циркуляции, в безразмерных единицах равный  $2\pi$ . Величина  $\xi_0$  обозначает средний радиус кривизны вихревых нитей и является основным параметром теории. Рассматриваемая модель применима только

на масштабах, превосходящих  $\xi_0$ . Исследовано стационарное решение кинетического уравнения для состояния  $n(l, t)$ :

$$\frac{\partial n(l, t)}{\partial t} = I_0 [n(l, t)], \quad (2)$$

где интеграл столкновений  $I_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} I_0 [n(l, t)] &= \\ &= \int A(l_1, l_2, l) n(l_1, t) n(l_2, t) \delta(l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 \\ &- \int A(l_1, l, l_2) n(l, t) n(l_1, t) \delta(l_2 - l_1 - l) dl_1 dl_2 \\ &- \int A(l_2, l, l_1) n(l, t) n(l_2, t) \delta(l_1 - l_2 - l) dl_1 dl_2 \\ &- \int B(l_1, l_2, l) n(l, t) \delta(l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 \\ &+ \int B(l, l_2, l_1) n(l_1, t) \delta(l_1 - l_2 - l) dl_1 dl_2 \\ &+ \int B(l, l_1, l_2) n(l_2, t) \delta(l_2 - l_1 - l) dl_1 dl_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Изучается поведение плотности (полной длины) вихревых нитей

$$\mathcal{L}(t) = \int ln(l, t) dl. \quad (4)$$

Установлено, что полная длина вихревых нитей в стационарном состоянии имеет вид

$$\mathcal{L} = \int_{\xi_0}^{\infty} ln(l) dl = 2 \frac{C_{\text{VLD}}}{\xi_0^2}, \quad (5)$$

где  $C_{\text{VLD}}$ —некоторая константа порядка единицы. Этим показано, что среднее расстояние между вихревыми нитями  $\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}$  в стационарном состоянии имеет порядок среднего радиуса кривизны  $\xi_0$  — факт, обнаруженный ранее в численных экспериментах.

Целью настоящей работы является выяснение закона убывания плотности вихревых нитей  $\mathcal{L}(t)$  в бозе-конденсате за счет потерь энергии на излучение в акте перезамыкания нитей. Величина потери длины вихревой нити вычислена на основе уравнения Гросса-Питаевского. Известно, что потеря длины при перезамыкании составляет несколько безразмерных единиц длины. В данной работе потеря длины при каждом перезамыкании предполагается постоянной и равной  $\Delta l$ .

Пусть при каждом слиянии петель теряется длина  $\Delta l$ , а при распаде вихревой петли обе новые петли теряют длину  $\frac{\Delta l}{2}$ . Исходя из этих предположений, можно записать новый

интеграл столкновений, учитывающий диссипацию энергии при перезамыкании:

$$\begin{aligned}
I[n(l, t)] &= \\
&= \int A(l_1, l_2, l)n(l_1, t)n(l_2, t)\delta(l + \Delta l - l_1 - l_2)dl_1dl_2 \\
&- \int A(l_1, l, l_2)n(l, t)n(l_1, t)\delta(l_2 + \Delta l - l_1 - l)dl_1dl_2 \\
&- \int A(l_2, l, l_1)n(l, t)n(l_2, t)\delta(l_1 + \Delta l - l_2 - l)dl_1dl_2 \\
&- \int B(l_1 + \frac{\Delta l}{2}, l_2 + \frac{\Delta l}{2}, l)n(l, t)\delta(l - \Delta l - l_1 - l_2)dl_1dl_2 \\
&+ \int B(l + \frac{\Delta l}{2}, l_2 + \frac{\Delta l}{2}, l_1)n(l_1, t)\delta(l_1 - \Delta l - l_2 - l)dl_1dl_2 \\
&+ \int B(l + \frac{\Delta l}{2}, l_1 + \frac{\Delta l}{2}, l_2)n(l_2, t)\delta(l_2 - \Delta l - l_1 - l)dl_1dl_2,
\end{aligned} \tag{6}$$

Умножая уравнение

$$\frac{\partial n(l, t)}{\partial t} = I[n(l, t)]$$

на  $l$  и интегрируя по  $l$ , получаем уравнение для  $\mathcal{L}(t)$  – основную теорему настоящей главы:

**Теорема 1** Пусть состояние вихревого клубка описывается плотностью распределения петель по длинам  $n(l, t)$ . Пусть эволюция состояния во времени определяется кинетическим уравнением с интегралом столкновений (6). Тогда изменение полной длины  $\mathcal{L}(t) = \int ln(l, t)dl$  описывается уравнением

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\Delta lb_m V_l \mathcal{L}^2(t) - 2b_s V_l \mathcal{L}(t) \frac{1}{\xi_0} \left[ 2 \frac{\varepsilon + 1}{\sqrt{1 + \varepsilon/2}} - 2 \right],$$

которое при  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{\xi_0} \lesssim 1$  можно, разложив выражение в квадратных скобках в ряд около  $\varepsilon = 0$ , записать в виде

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -b_m V_l \Delta l \mathcal{L}^2(t) - \frac{3b_s V_l \Delta l}{\xi_0^2} \mathcal{L}(t), \tag{7}$$

где для  $V_l$  имеет место оценка  $V_l \sim \frac{\kappa}{\xi_0}$ .

Полученное уравнение определяет закон убывания плотности вихревых нитей за счет излучения при перезамыкании. Отметим, что уравнение (7) для первого момента распределения  $n(l, t)$ , являясь точным для модели (6), не содержит высших моментов при любых значениях параметров  $\Delta l$ ,  $\xi_0$ , в частности, для высоких плотностей турбулентности. Таким образом, уравнение (7) может описывать быстрые, существенно нестационарные режимы эволюции вихревого клубка, когда распределение вихревых петель по длинам существенно отличается от стационарного и соотношение (5) не выполняется.

**Теорема 2** Решение задачи Коши для уравнения (7) имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \\
&\frac{\mathcal{L}(0)3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2}{3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2 e^{3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2 t} + \mathcal{L}(0)b_m V_l \Delta l (e^{3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2 t} - 1)}
\end{aligned} \tag{8}$$

При  $t \ll \frac{\xi_0^2}{3b_s V_l \Delta l}$  решение имеет характер  $\mathcal{L}(t) = \frac{\mathcal{L}(0)}{1+b_m V_l \Delta l \mathcal{L}(0)t}$ , а время убывания величины  $\mathcal{L}$  вдвое равно

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\xi_0}{\mathcal{L}(0)b_m \kappa \Delta l} = \\ &= \frac{3}{2b_m C_{\text{VLD}} \kappa \Delta l} \frac{\xi_0^3}{\kappa \Delta l} = \frac{\xi_0^3}{\kappa \Delta l} \frac{3}{0.86b_s} \sim \mathcal{L}(0)^{-3/2} \end{aligned} \quad (9)$$

в предположении, что для начального состояния выполнено (5). При больших  $t$  ( $t \geq \frac{\xi_0^2}{3b_s V_l \Delta l}$ ) величина  $\mathcal{L}$  убывает экспоненциально

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\mathcal{L}(0)3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2}{3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2 + b_m V_l \Delta l \mathcal{L}(0)} e^{-3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2 t}$$

с характерным временем

$$\tau_2 = \frac{\xi_0^3}{\kappa \Delta l} \frac{1}{3b_s} \sim \mathcal{L}(0)^{-3/2}, \quad (10)$$

таким, что  $\frac{\tau_1}{\tau_2} \sim 10$ .

При распаде согласно уравнению Вайнена, время, за которое величина  $\mathcal{L}$  уменьшается в два раза, равно

$$\tau = \frac{\xi_0^2}{\kappa} \frac{3}{2C_{\text{VLD}} C_{\text{Vinen}}} \sim \mathcal{L}(0)^{-1}$$

и, в отличие от (9),(10), зависит от начальной средней кривизны нитей не кубично, а квадратично. Таким образом, при достаточно больших плотностях вихревых нитей механизм распада, связанный с излучением фононов при перезамыкании, будет превалировать и обеспечивать убывание  $\mathcal{L}(t)$  согласно экспоненциальному закону, а не по закону  $\mathcal{L}(t) \sim \frac{1}{t+a}$ .

В **пятой главе** изучается влияние нормальной компоненты на эволюцию вихревого клубка.

В данной главе мы интересуемся поведением полного числа вихревых нитей

$$N(t) = \int n(l, t) dl. \quad (11)$$

Основной целью главы является получение выражения для частоты перезамыканий вихревых нитей в нестационарном состоянии.

Уравнение (2) с интегралом столкновений (3) учитывает влияние как процессов рождения, так и процессов уничтожения колец, причем каждый из этих процессов сопровождается перезамыканием. Поэтому для получения частоты перезамыканий необходимо все члены в (2) взять со знаком “+”. Проинтегрируем теперь уравнение (2) (с надлежащим образом расставленными знаками) по  $l$ , выбирая, где необходимо, величину  $\xi_0$  в качестве параметра обрезания снизу. В результате имеем

**Теорема 3** *Полное число перезамыканий в вихревом клубке, описываемом кинетическим уравнением (2) с интегралом столкновений (3), дается выражением*

$$\dot{N} = b_m V_l \mathcal{L}^2 + 2b_s V_l \xi_0^{-2} \mathcal{L}, \quad (12)$$

где  $\xi_0$  – средний радиус кривизны нитей, а  $V_l, b_s, b_m$  – константы.

Далее в данной главе проанализирована эволюция хаотического однородного и изотропного вихревого клубка в бесконечном пространстве. Мы не предполагаем, что температура низкая: учитывается и плотность нормальной компоненты, и взаимное трения. Основные результаты – уравнение (15) для частоты пере замыканий, и уравнения (18), (17) для полного числа вихревых нитей и частоты пере замыканий в существенно нестационарном вихревом клубке, состоящим из замкнутых вихревых петель. Анализ эволюции вихревого клубка основан на уравнении марковской эволюции для распределения вихревых петель по длинам.

Запишем кинетическое уравнение с учетом влияния взаимного трения на вихревой клубок:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(l, t)}{\partial t} + \frac{\partial n(l, t)}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t} = & \\
= \int A(l_1, l_2, l) n(l_1, t) n(l_2, t) \delta(l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 & \\
- \int A(l_1, l, l_2) n(l, t) n(l_1, t) \delta(l_2 - l_1 - l) dl_1 dl_2 & \\
- \int A(l_2, l, l_1) n(l, t) n(l_2, t) \delta(l_1 - l_2 - l) dl_1 dl_2 & \quad (13) \\
- \int B(l_1, l_2, l) n(l, t) \delta(l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 & \\
+ \int B(l, l_2, l_1) n(l_1, t) \delta(l_1 - l_2 - l) dl_1 dl_2 & \\
+ \int B(l, l_1, l_2) n(l_2, t) \delta(l_2 - l_1 - l) dl_1 dl_2. &
\end{aligned}$$

Вычислим скорость изменения длины петли за счет взаимодействия с нормальной компонентой, основываясь на уравнении движения петли в локальном приближении:

$$\mathbf{v}_1 = \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{V}_{\text{ns}} - \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}''),$$

где штрихи обозначают производные вдоль нитей  $\mathbf{s}(\xi)$  по натуральному параметру,  $\mathbf{v}_1$  – скорость элемента нити,  $\alpha, \beta$  – константы, зависящие от температуры.

Используя средние, вычисленные еще Немировским для гауссовской модели вихревого клубка:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \rangle &= \frac{I_1}{\sqrt{2} c_2 \xi_0} \frac{\mathbf{V}_{\text{ns}}}{|\mathbf{V}_{\text{ns}}|}, \\
\langle (\mathbf{s}' \times \mathbf{s}'')^2 \rangle &= \frac{1}{2 \xi_0^2},
\end{aligned}$$

где  $I_1$  и  $c_2$  – структурные константы вихревого клубка, введенные Шварцем, получаем выражение для полной частоты пере замыканий, связанной с взаимным трением:

**Теорема 4** *В модели вихревого клубка, описываемого кинетическим уравнением с интегралом столкновений (13), число петель, возникающих за счет взаимодействия с нормальной компонентой, равно*

$$\begin{aligned}
\dot{N} &= \int \frac{\partial n(l, t)}{\partial t} dl = - \int \frac{\partial n(l, t)}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t} dl = \\
&= - \left[ \frac{\alpha I_l V_{ns}}{\sqrt{2} c_2 \xi_0} - \frac{\alpha \beta}{2 \xi_0^2} \right] \int \frac{\partial n(l, t)}{\partial l} l dl = \\
&= \alpha \frac{I_l V_{ns}}{\sqrt{2} c_2 \xi_0} N(t) - \frac{\alpha \beta}{2 \xi_0^2} N(t),
\end{aligned} \tag{14}$$

где  $N(t) = \int n(l, t) dl$  – полное число вихревых петель,  $I_l$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_2$  – некоторые константы, зависящие от температуры.

Сформулируем также "стационарную" версию последней теоремы:

**Теорема 5** В модели вихревого клубка, описываемого кинетическим уравнением с интегралом столкновений (13), полное число перезамыканий в стационарном состоянии при наличии нормальной компоненты, равно

$$\dot{N}_{rec} = \frac{\sqrt{2} \alpha I_l V_{ns} c_2}{9} \mathcal{L}^2 + \frac{\sqrt{2} \alpha \beta c_2^3}{9} \mathcal{L}^{5/2} + \kappa (b_m + 2b_s) \mathcal{L}^{5/2}. \tag{15}$$

Если доминирует сила, связанная с влиянием на нити поля скоростей, создаваемого самими нитями, то первый член мал, и мы имеем

$$\dot{N}_{rec} \sim \mathcal{L}^{5/2}.$$

В противном случае, если превалирует сила, обусловленная потоком нормальной компоненты, мы получаем другой закон:

$$\dot{N}_{rec} \sim \mathcal{L}^2.$$

Оба результата были получены ранее из простых качественных соображений. Уравнение (15) описывает переходный режим между упомянутыми законами.

Далее в данном разделе мы снова предполагаем диссипацию малой.

Для изучения процесса релаксации вихревого клубка к стационарному состоянию необходимо использовать другую модель случайного блуждания нитей. Эта модель, в отличие от (1), учитывает замкнутость вихревых петель и кажется более релевантной. Выражения для  $\tilde{A}(l_1, l_2, l)$  и  $\tilde{B}(l_1, l_2, l)$  в этой модели имеют вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(l_1, l_2, l) &= b_m V_l l_1 l_2, \\
\tilde{B}(l_1, l_2, l) &= \tilde{b}_s V_l \frac{l^{5/2}}{\xi_0^{3/2} l_1^{3/2} l_2^{3/2}},
\end{aligned} \tag{16}$$

Итак, необходимо подставить в интеграл столкновений коэффициенты (16) вместо (1).

**Теорема 6** В модели вихревого клубка, описываемого кинетическим уравнением с интегралом столкновений (3) и коэффициентами (16), полное число вихревых петель равно:

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) &= -b_m V_l \mathcal{L}^2 + 4\tilde{b}_s V_l \xi_0^{-2} C_1 (\mathcal{L} - 2\xi_0 N(t)) \\ &= -b_m V_l \mathcal{L}^2 + 4\tilde{b}_s V_l \xi_0^{-2} C_1 (\langle l \rangle - 2\xi_0) N(t),\end{aligned}\tag{17}$$

где  $\langle l \rangle = \mathcal{L}/N(t)$  обозначает среднюю длину вихревой петли.

Первая строка формулы (17) представляет собой уравнение эволюции для  $N(t)$ , решения которого имеют вид

$$N(t) = (N(0) - N_{st}) e^{-\frac{t}{T}} + N_{st},\tag{18}$$

где

$$N_{st} = \frac{\mathcal{L}}{2\xi_0} - \frac{b_m}{8\tilde{b}_s C_1} \xi_0 \mathcal{L}^2\tag{19}$$

обозначает стационарное число вихревых петель и

$$T = \frac{\xi_0}{8C_1 \tilde{b}_s V_l} = \frac{\xi_0^2}{8C_1 \tilde{b}_s \kappa}\tag{20}$$

обозначает время релаксации для модели (16).

Соотношение (19) связывает полную плотность вихревых линий со средним радиусом кривизны вихревых нитей в (неизвестном) стационарном состоянии:

$$\mathcal{L} = \frac{8b_s C_1}{b_m} \frac{1}{\xi_0^2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\xi_0}{\langle l \rangle} \right].$$

Подведем итог пятой главы. Во-первых, мы получили уравнение для полной частоты перезамыканий в присутствии нормальной компоненты. Полученное уравнение описывает переходный режим между двумя режимами распада турбулентности, открытыми Баренги и Самуэльсом. Другими словами, их степенные решения – частные случаи нашего уравнения.

Во-вторых, достигнуто понимание того, что модель с открытыми вихревыми нитями не подходит для изучения таких тонких явлений, как процесс релаксации вихревого клубка к стационарному состоянию. Вместо нее мы использовали модель с замкнутыми нитями, что позволило дать оценки времени релаксации вихревого клубка и получить новое, более точное соотношение между средним радиусом кривизны вихревых петель и их полной длиной.

В **шестой главе** дана полная классификация интегрируемых инвариантных соболевских метрик на некотором однородном пространстве полупрямого произведения групп Гейзенберга и Вирасоро.

В последние годы в литературе широко обсуждается применение гидродинамических моделей типа Камассы-Холма в теории тубулентности. В связи с этим, представляется интересным расширение класса вполне интегрируемых систем типа Камассы-Холма с целью их применения в качестве моделей сверхтекучей турбулентности. Одно из таких обобщений предложено автором . Полученные системы, возможно, могут быть применены для описания сверхтекучей турбулентности в одномерных системах.

Известно, что уравнение Камассы-Холма может быть интерпретировано как бигамильтонова система на коприсоединенной орбите группы диффеоморфизмов окружности. В данной работе рассматривается класс гамильтоновых потоков на пространстве  $\mathfrak{g}_{reg}^*$ , где  $\mathfrak{g} = \text{Vect}(S^1) \ltimes C^\infty(S^1)$  с квадратичными функциями Гамильтона специального вида. Целью является описание всех бигамильтоновых потоков относительно модифицированной структуры Ли-Пуассона на  $\mathfrak{g}_{reg}^*$ . Получено семейство двухкомпонентных вполне интегрируемых систем, обобщающих уравнение Камассы-Холма.

Существует общий способ построения пары согласованных пуассоновых структур и получения интегрируемого потока. Пусть  $\mathfrak{g}$  – алгебра Ли,  $\mathfrak{g}^*$  – двойственное пространство к  $\mathfrak{g}$  (регулярная часть двойственного пространства к  $\mathfrak{g}$ ). Определяют каноническую структуру Ли-Пуассона на  $\mathfrak{g}^*$ : для любых гладких  $f, g : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$\{f, g\}(m) = m([df, dg]). \quad (21)$$

Каждый коцикл  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$  определяет другую пуассонову структуру на  $\mathfrak{g}^*$ , согласованную с канонической. Такая структура называется модифицированной структурой Ли-Пуассона.

Основной целью настоящей главы является описание некоторого класса аналогичных бигамильтоновых систем на пространстве  $\mathfrak{g}_{reg}^*$ , где  $\mathfrak{g} = \text{Vect}(S^1) \ltimes C^\infty(S^1)$ , а  $C^\infty(S^1)$  – пространство всех гладких тензорных плотностей на  $S^1$  степени 0, т.е. структура  $\text{Vect}(S^1)$ -модуля на  $C^\infty(S^1)$  определяется как

$$L_f : C^\infty(S^1) \rightarrow C^\infty(S^1), \quad a(x) \mapsto f(x)a'(x),$$

где  $f \in \text{Vect}(S^1)$ . Каноническая структура Ли-Пуассона на  $\mathfrak{g}_{reg}^*$  задается оператором

$$J_0 \left( \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} m_x + 2m\partial & p\partial \\ p_x + p\partial & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{reg}^*, \quad (22)$$

который определяет коприсоединенное действие полупрямого произведения  $\text{Vect}(S^1) \ltimes C^\infty(S^1)$ . Известно, что  $H^2(\text{Vect}(S^1) \ltimes C^\infty(S^1)) = \mathbb{R}^3$ , поэтому модифицированная структура Ли-Пуассона определяется постоянным (т.е. не зависящим от точки  $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{reg}^*$ ) оператором

$$J = \begin{pmatrix} (m_0)_x + 2m_0\partial - c_1\partial^3 & p_0\partial + c_2\partial^2 \\ (p_0)_x + p_0\partial - c_2\partial^2 & 2c_3\partial \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где  $\begin{pmatrix} m_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{reg}^*$  и  $c_1, c_2, c_3$  – некоторые константы. Заметим, что структуры (22), (21) на самом деле определены на коприсоединенной орбите  $(\text{Diff}_+(S^1) \ltimes C^\infty(S^1))/(S^1 \times S^1)$ , содержащей постоянный момент  $\begin{pmatrix} m_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{reg}^*$ ,  $m_0(x) = \text{const}$ ,  $p_0(x) = \text{const}$ .

Рассмотрим класс квадратичных функций Гамильтона на  $\mathfrak{g}_{reg}^*$

$$H_0 \left( \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}, M^{-1} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (24)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение в  $L^2$

$$\left\langle \begin{pmatrix} m_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{S^1} (m_1(x)m_2(x) + p_1(x)p_2(x)) dx,$$

а симметричный оператор  $M$  выбирается в форме

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon(1 - \partial^2) + \sum_{i=2}^{n_0} a_i \partial^{2i} & \sum_{i=0}^{n_1} (-1)^i b_i \partial^i \\ \sum_{i=0}^{n_1} b_i \partial^i & \gamma \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где  $a_i, b_i, \gamma, \varepsilon$  – такие константы, что  $M$  строго положителен и обратим. Такая функция Гамильтона может рассматриваться как естественное обобщение  $h_0(m)$ . Сформулируем основное предложение данной главы:

**Теорема 7** Пусть  $m_0, p_0$  (см. (23)) – постоянные функции. Единственными бигамильтоновыми относительно модифицированной структуры Ли-Пуассона векторными полями вида  $X = J_0 \delta H_0$  (где  $J_0, H_0$  даются формулами (22), (24)), являются гамильтоновы векторные поля, соответствующие следующему оператору "инерции":

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon(1 - \partial^2) & \alpha - \beta \partial \\ \alpha + \beta \partial & \gamma \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  – константы.

Таким образом, получаем втроую пуассонову структуру

$$J_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon(\partial - \partial^3) & \alpha \partial - \beta \partial^2 \\ \alpha \partial + \beta \partial^2 & \gamma \partial \end{pmatrix}, \quad (27)$$

и вторую функцию Гамильтона

$$H_1 \left( \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \int_{S^1} (2\alpha u^2 v + 2\beta u u_x v + \gamma u v^2 + \varepsilon u^3 + \varepsilon u u_x^2) dx,$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix},$$

такую что  $X = J_0 \delta H_0 = J_1 \delta H_1$ . Полученные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} m_t + m_x u + 2m u_x + p v_x = 0 \\ p_t + (p u)_x = 0, \end{cases}$$

где  $m = \varepsilon u - \varepsilon u_{xx} + \alpha v - \beta v_x$ ,  $p = \alpha u + \beta u_x + \gamma v$ .

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи построенной бигамильтоновой системы. Подставляя  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\varepsilon = -\gamma = 1$ , получаем систему, известную ранее:

$$\begin{cases} m_t + m_x u + 2m u_x - p p_x = 0 \\ p_t + (p u)_x = 0, \end{cases} \quad (28)$$

где  $m = u - u_{xx}$ . Если же мы положим  $\varepsilon = \gamma = 0$ ,  $\alpha = \beta = 1$ , то восстановим систему, описанную в литературе:

$$\begin{cases} (v - v_x)_t + (2uv - v_x u)_x = 0 \\ (u + u_x)_t + (u^2 + uu_x)_x = 0, \end{cases} \quad (29)$$

В **заключении** перечислены основные результаты диссертации.

## 10 Основные результаты и выводы

- Получен спектр звуковых волн, излучаемых вихревым кольцом при перезамыкании. Показано, что спектр имеет узкополосный характер, аналогичный классическому.
- Предложена модель вихревого клубка в сверхтекучей жидкости, учитывающая потери энергии при перезамыкании нитей. Получено новое уравнение распада вихревого клубка: Установлены границы применимости модели и ее связи с гидродинамическими моделями турбулентности. Таким образом, найдена еще одна нелинейная интегрируемая система, представляющая собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных. С его помощью впервые исследованы быстрые, существенно нестационарные режимы распада турбулентности в бозе-конденсате, изучено поведение вихревого клубка при его нестационарной эволюции.
- Учтено влияние нормальной компоненты на эволюцию вихревого клубка, изучены различные режимы эволюции и их связь с описанными в литературе ранее. Получено новое уравнение для числа перезамыканий в стационарном вихревом клубке под влиянием нормальной компоненты.
- При помощи модели случайного блуждания замкнутых вихревых петель изучены процессы релаксации вихревого клубка к стационарному состоянию. Впервые определены времена и законы релаксации.
- Дана полная классификация интегрируемых инвариантных соболевских метрик на некотором однородном пространстве полупрямого произведения групп Гейзенберга и Вирасоро.

Тем самым получен ряд интегрируемых обобщений уравнения Камассы-Холма, вероятно, описывающих турбулентное движение в капиллярах.

## Список литературы

- [1] Кузьмин П. А., Механизм распада турбулентного состояния в сверхтекучей жидкости и спектральные характеристики звуковых волн, излучаемых вихревыми кольцами // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 3, 2006, с. 11–13.

- [2] Кузьмин П. А., Излучение фононов вихревыми нитями и распад турбулентного состояния в бозе-конденсате // Письма в ЖЭТФ, том 84(4), 2007, стр. 238–242.
- [3] Кузьмин П. А., О двухкомпонентных обобщениях уравнения Камассы-Холма // Матем. заметки, т. 81, 2007, стр. 149–152.
- [4] P. Kuzmin, On the full rate of reconnection in the nonstationary vortex tangle: a master equation approach // Phys. Lett. A, vol. 362, 2007, pp. 84–85.
- [5] P. Kuzmin, Exactly solvable models of nonstationary turbulence in the Bose condensate // Phys. Lett. A, vol. 372, 2008, pp. 2123–2126.
- [6] П. А. Кузьмин, О спектральных характеристиках звуковых волн, излучаемых вихревыми кольцами, Сб. тезисов конф. «Ломносов–2006», секция «Физика», с. 169–170, Физический ф-т МГУ, 2006.
- [7] П. А. Кузьмин, Ф. В. Шугаев, Об одной точно решаемой модели квантовой турбулентности, Сб. тезисов конф. «Ломоносовские чтения», Физический ф-т МГУ, 2007.
- [8] F. Shugaev, P. Kuzmin, Nonstationary turbulence in Bose condensate, Fluxes and structures in fluids, St. Petersburg, Russia, 2007.
- [9] P. Kuzmin, Exactly solvable models of nonstationary quantum turbulence, WEHSFF-2007, Moscow, November 2007.