

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ  
РЕВОЛЮЦИИ, ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

---

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

КАЛАШНИК Максим Валентинович

**АДАПТАЦИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ, ФРОНТОГЕНЕЗ  
В ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ**

Специальность 25.00.29 – Физика атмосферы и гидросферы

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

---

Москва – 2008

Работа выполнена в Государственном учреждении "Научно-производственное объединение "Тайфун", г. Обнинск

**Официальные оппоненты:**

Доктор физико-математических наук, профессор  
Зырянов Валерий Николаевич, Институт водных проблем РАН

Доктор физико-математических наук, профессор  
Показеев Константин Васильевич, физический факультет МГУ  
им. М.В. Ломоносова

Доктор физико-математических наук  
Резник Григорий Михайлович, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН

**Ведущая организация:**

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН

Защита состоится \_\_\_\_\_ на заседании  
Диссертационного совета Д 501.001.63 при МГУ им. М.В. Ломоносова по  
адресу: **119992, Москва, Ленинские горы, физический факультет,  
аудитория**

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета  
МГУ

Автореферат разослан \_\_\_\_\_

Ученый секретарь  
Диссертационного совета Д 501.001.63  
кандидат физ.-мат. наук

В.Б. Смирнов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

В геофизической гидродинамике – гидродинамике природных сред – рассматриваются движения вращающейся жидкости, стратифицированной в поле силы тяжести. Уравнения гидродинамики для этих движений имеют класс точных стационарных решений, описывающих так называемые сбалансированные состояния – состояния геострофического, циклострофического, гидростатического балансов. Как показывают наблюдения, стационарные движения атмосферы и океана близки к сбалансированным. Так, геострофический баланс – баланс между градиентом давления и силой Кориолиса – характерен для крупномасштабных зональных атмосферных течений в средних широтах (на картах погоды ветер направлен по изобарам). Баланс между градиентом давления и центробежной силой – циклострофический баланс – наблюдается в интенсивных атмосферных вихрях (тропические циклоны, торнадо), а также в закрученных газовых потоках, создаваемых в разнообразных технических устройствах. Вертикальное распределение термодинамических параметров в атмосфере и океане с большой точностью описывается уравнением гидростатики (гидростатического баланса).

К числу актуальных и приоритетных задач геофизической гидродинамики относятся теоретические исследования:

- процессов установления сбалансированных состояний (процессов адаптации);
- гидродинамической устойчивости этих состояний;
- процессов формирования разрывов в сбалансированных состояниях (процессов фронтогенеза).

Исследования в этих направлениях представляют большую научную и практическую ценность. Они создают основу для прогнозирования и понимания природы формирования широкого круга явлений, таких как атмосферные и океанические фронты, циклоны, антициклоны, синоптические вихри в океане.

К настоящему времени уже разработаны некоторые основополагающие, базовые теории указанных процессов. Здесь нужно отметить классическую линейную теорию геострофической адаптации (Rossby (1937), Обухов (1949), Vannan (2001)), квазигеострофическую теорию гидродинамической неустойчивости крупномасштабных сдвиговых течений (Pedlosky (1970), Дикий (1976), Дымников, Филатов (1990)), теорию деформационного фронтогенеза (Hoskins, Bretherton (1972), Шакина (1985), Blumen (1995)).

Вместе с тем, многие теоретические вопросы еще далеки от окончательного решения. Сюда относится разработка нелинейной теории процессов приспособления в атмосфере

ре и океане, теории адаптации в стратифицированных двухкомпонентных средах (солёная морская вода, влажный воздух), теории гидродинамической устойчивости, основанной на анализе полных (нефильтрованных) уравнений, применение достаточно новых и нетрадиционных подходов в теории устойчивости (вариационный метод, немодальный подход). Крайне недостаточно изучены также физические механизмы формирования атмосферных и океанических фронтов, что в значительной степени связано со спецификой возникающих здесь математических задач. Движения вращающейся стратифицированной жидкости не описываются уравнениями гиперболического типа, для которых хорошо развита теория образования разрывов. Физика природных фронтов также принципиально отличается от физики образования ударных волн в газовой динамике.

Из вышеизложенного следует актуальность тематики диссертационной работы.

### **Цель и задачи исследования**

Основная цель диссертационной работы состоит в теоретическом исследовании процессов адаптации, гидродинамической неустойчивости, фронтогенеза в атмосфере и океане, а также моделировании этих процессов в лабораторных условиях.

Для достижения основной цели в диссертации решены задачи в следующих направлениях:

1. Теоретическое исследование процессов нелинейного геострофического (циклострофического, гидростатического) приспособления в стратифицированных вращающихся средах.
2. Теоретическое исследование новых и малоизученных типов гидродинамической неустойчивости вращающихся сдвиговых течений.
3. Развитие новых представлений о формировании фронтальных поверхностей (поверхностей разрыва) в стратифицированной вращающейся жидкости.
4. Теоретическое и экспериментальное исследование волновых и вихревых движений жидкости во вращающихся параболических сосудах.

### **Основные научные результаты и положения, выносимые на защиту:**

1. В рамках линейной теории геострофической адаптации исследован вопрос о перераспределении полной начальной энергии между энергиями геострофического и волнового компонентов. Показано, что в задаче с нулевым начальным полем скорости в кинетическую энергию геострофического компонента переходит менее половины реализованной потенциальной энергии, а остальная (бóльшая) часть идет на генерацию волновых движений. Аналогичная оценка, получена и в нелинейном случае.

2. Для осесимметричных и плоских движений несжимаемой вращающейся жидкости развита нелинейная теория геострофического (циклострофического) приспособления. С использованием лагранжевых законов сохранения массы и углового (геострофического) моментов, сформулированы замкнутые системы уравнений для определения финальных состояний баланса по начальным данным и построен ряд их точных решений.

3. Предложено рациональное объяснение вихревого эффекта Ранка – формирования аномально низких (отрицательных) температур на оси быстро вращающегося газового потока в вихревой трубе. Показано, что подобные температуры устанавливаются в процессе приспособления осесимметричных движений идеального газа к состояниям циклострофического баланса (баланса между градиентом давления и центробежной силой).

4. Разработана гидродинамическая теория несбалансированного фронтогенеза, связывающая образование атмосферных и океанических фронтов с процессом нелинейного геострофического приспособления в непрерывно стратифицированной среде. Показано, что из гладких начальных полей в процессе приспособления могут формироваться разрывные геострофические состояния. Установлены критерии образования фронтов, описаны характерные геометрические конфигурации поверхностей разрыва.

5. В рамках теории деформационного фронтогенеза построен класс точных аналитических решений, описывающих процесс формирования холодного фронта в деформационном поле типа седла.

6. Изучен новый механизм формирования температурных неоднородностей в стратифицированных двухкомпонентных средах, связанный с процессами гидростатического и геострофического и приспособления. Показано, что на финальной стадии процесса гидростатического приспособления в соленой морской воде формируется долгоживущий термохалинный "след" с вертикальными разрывными распределениями, характерными для тонкой структуры океана.

7. В рамках полной (нефильтрованной) системы уравнений гидродинамики исследована линейная устойчивость некоторых важных классов вращающихся сдвиговых течений (тангенциальные разрывы, свободные слои сдвига). Показано, что течения с циклоническим сдвигом всегда более устойчивы, чем с антициклоническим (эффект циклон-антициклонной асимметрии). С использованием квадратичных законов сохранения получены достаточные условия общей (несимметричной) устойчивости состояний циклострофического и геострофического балансов.

8. Исследована структура захваченных волн в сдвиговых течениях стратифицированной вращающейся жидкости. Задача о нахождении частот захваченных волн сведена к

решению уравнения Шредингера, однако, с более сложной зависимостью от спектрального параметра. Получен ряд точных аналитических решений задачи, показано, что расположение области захвата определяется стратификацией жидкости и ориентацией сдвига.

9. С использованием немодального подхода описана линейная динамика возмущений в спектрально устойчивых сдвиговых течениях. Проведено разделение возмущений на два класса (быстроосциллирующие волновые и медленные вихревые) по значению потенциальной завихренности. Показано, что неустойчивость сдвигового потока может быть связана с нарастанием быстрых волновых возмущений, которые традиционно фильтруют в квазигеострофических моделях. Изучены новые типы сдвиговой неустойчивости (алгебраический, экспоненциально-алгебраический), приводящие к генерации поверхностных и внутренних гравитационных волн.

10. Теоретически и экспериментально исследован класс задач, относящихся к гидродинамике во вращающемся параболоиде (геострофическое приспособление, свободные колебания, структура и устойчивость геострофических течений). Изучен процесс формирования геострофических течений системой источник-сток массы, механизм топографической неустойчивости этих течений. Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными.

### **Научная новизна**

Основные научные результаты диссертационной работы получены впервые. В частности:

- Впервые получены оценки эффективности преобразования полной начальной энергии в энергию сбалансированных состояний при геострофическом приспособлении.
- Впервые разработана теория несбалансированного фронтогенеза, описывающая процесс формирования фронтальных поверхностей (поверхностей разрыва) при адаптации из гладких начальных распределений.
- Впервые изучен механизм формирования термохалинных неоднородностей в океане, связанный с двухкомпонентным характером соленой морской воды.
- С использованием немодального подхода впервые исследованы новые механизмы генерации поверхностных и внутренних гравитационных волн в спектрально устойчивых сдвиговых течениях.
- Впервые предложено строгое объяснение вихревого эффекта Ранка.
- Впервые теоретически и экспериментально исследован процесс геострофического приспособления, механизм топографической неустойчивости геострофических течений во вращающемся параболоиде.

### **Научная и практическая значимость работы**

Диссертационная работа носит теоретический характер и относится к области фундаментальных исследований. Она выполнялась в рамках пяти проектов РФФИ: 97-05-65580, 98-05-64527, 02-05-64203, 04-05-64027, 07-08-96434 (в трех из этих проектов автор был официальным руководителем). Научная значимость связана с тем, что полученные результаты дают строгое научное объяснение ряду наблюдаемых закономерностей динамики атмосферы и океана. Они позволяют глубже понять фундаментальные физические механизмы, приводящие к формированию атмосферных и океанических фронтов и циклонов, формированию наблюдаемой пятнистой структуры термохалинных полей в океане, генерации поверхностных и внутренних гравитационных волн во вращающихся сдвиговых течениях.

Практическая значимость работы определяется тем, что результаты создают базу, необходимую для разработки более сложных, детальных численных гидродинамических моделей. Они, в частности, могут быть использованы для интерпретации результатов радиолокационного и спутникового зондирования атмосферы и океана, для повышения точности схем краткосрочного гидродинамического прогноза погоды и включения фронтов в прогностические схемы, для разработки методов лабораторного моделирования атмосферных и океанических течений.

Результаты работы использовались при выполнении ряда НИР Росгидромета в Институте экспериментальной метеорологии ГУ "НПО "Тайфун" (темы 1.5.4.8 и 1.5.3.1 Планов НИОКР Росгидромета).

### **Достоверность результатов и методы исследования**

Основные результаты работы получены аналитическими методами теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, функций комплексного переменного. Достоверность результатов определяется тем, что в теоретическом анализе использованы хорошо обоснованные уравнения гидродинамики, вытекающие из фундаментальных законов природы. Практически все результаты представлены в аналитической форме и допускают непосредственную проверку. В заключительной главе диссертации проведено непосредственное сравнение ряда теоретических результатов с результатами лабораторных экспериментов.

### **Личный вклад автора**

Основная часть результатов диссертационной работы получена автором лично.

В работах, выполненных в соавторстве с экспериментаторами (К.Н. Вишератин, С.Дж. Цакадзе, В.О. Кахиани, К.И. Патарашвили, Р.А. Жвания и др.), автору принадлежит

теоретическая часть и идея проведения ряда экспериментов. Теоретические исследования процессов приспособления в несжимаемой жидкости, проблемы симметричной устойчивости выполнены в соавторстве с П.Н. Свиркуновым. Линейная теория гидростатической и геострофической адаптации в стратифицированных двухкомпонентных средах разработана совместно с Л.Х. Ингелем. Исследования линейной динамики возмущений в сдвиговых течениях на основе немодального подхода, выполнены в соавторстве с Г.Д. Чагелишвили, Дж.Г. Ломинадзе, Г.Р. Мамацашвили.

Значительная часть основных публикаций по теме диссертации выполнена без соавторов. Во всех совместных исследованиях автор участвовал в формулировке основных задач, разрабатывал аналитические методы их решения, проводил анализ результатов.

### **Апробация работы**

По теме диссертации опубликованы 54 работы, из них более 30 в журналах, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК: "Доклады РАН", "Известия РАН. Физика атмосферы и океана", "Известия РАН. Механика жидкости и газа", "Журнал экспериментальной и теоретической физики", "Океанология", "Метеорология и гидрология" и др. Список основных публикаций приведен ниже.

Результаты работы докладывались на отечественных и международных конференциях, совещаниях и семинарах, в том числе: на IX Международной научно-технической конференции "Современные методы и средства океанологических исследований", Москва, 2005; Международной конференции МСС-04 "Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность", Москва, ноябрь 2004 г.; Perm Dynamo Days, International Workshop, Perm, 7-11 February 2005; International Conference "Fluxes and Structures in Fluids", St.-Petersburg, July 2007; Юбилейной Всероссийской научной конференции "Фундаментальные исследования взаимодействия суши, океана и атмосферы", Москва, МГУ, октябрь-ноябрь 2002 г.; Четвертой всероссийской научной конференции "Физические проблемы экологии (Экологическая физика)", Москва, МГУ, июнь 2004; Всероссийской научной конференции "С.П. Хромов и синоптическая метеорология" (Москва, МГУ, октябрь 2004 г.); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике, Н.Новгород, август 2006 г.; заседаниях Ученого совета и семинарах ГУ "НПО "Тайфун", семинарах ИФА РАН, ИВП РАН, ИПМ РАН, кафедры физики моря и вод суши физического факультета МГУ.

### **Структура и объем работы**

Диссертация состоит из Введения, шести глав и Заключения. Содержит 429 страниц, включая 89 рисунков, библиографию из 256 наименований.



## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обосновывается актуальность темы диссертации, излагаются основные цели и задачи работы, основные положения, выносимые на защиту. Представлен обзор работ по теме диссертации.

**Глава 1. Процессы приспособления во вращающейся жидкости.**

В первых двух параграфах главы исследованы процессы циклострофического (геострофического) приспособления в рамках двух базовых моделей геофизической гидродинамики. Движения вращающейся жидкости в модели мелкой воды описываются системой уравнений

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + f[\mathbf{k}, \mathbf{u}] + g\nabla h = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{u}$  - двумерный вектор скорости,  $h$  - высота уровня жидкости,  $f$  - параметр Кориолиса,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\mathbf{k}$  - вертикальный орт,  $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}, \nabla)$ .

Движения вращающейся несжимаемой стратифицированной жидкости в поле силы тяжести описывается системой

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + f[\mathbf{k}, \mathbf{u}] = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{k}, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

где  $p$  - давление,  $\rho$  - плотность.

В **параграфе 1.1** исследована энергетика процесса линейного геострофического приспособления. Как известно, решение линеаризованной системы уравнений динамики мелкой воды (1.1) представляется суммой стационарного (геострофического) и нестационарного (волнового) компонентов (Обухов, 1949). Соответствующая система при этом сохраняет возмущение потенциальной завихренности и полную энергию (кинетическую плюс потенциальную)  $E = K + \Pi = 0.5 \int [H|\mathbf{u}|^2 + g\eta^2] d\mathbf{x}$ , где  $\eta$  - отклонение полной глубины от средней  $H$ . Для приращения полной энергии в работе получено выражение

$$\Delta E = E_0 - E_s = \frac{1}{2} \int [H|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_s|^2 + g(\eta_0 - \eta_s)^2] d\mathbf{x}, \quad (1.3)$$

показывающее, что энергия устанавливающегося в процессе приспособления геострофического состояния  $E_s$  всегда меньше полной начальной энергии  $E_0$  (часть начальной энергии расходуется на излучение волн). На основе (1.3) получены оценки эффективности преобразования начальной энергии в энергию геострофического состояния для различных типов начальных условий. В частности, показано, что в задаче с нулевым начальным полем

скорости в кинетическую энергию геострофического состояния  $K_s$  переходит менее половины реализованной потенциальной энергии  $\Delta\Pi = \Pi_0 - \Pi_s$ , а остальная (бóльшая) часть идет на генерацию волн:  $K_s / \Delta\Pi < 1/2$ . Эта оценка, справедливая и в модели непрерывно стратифицированной жидкости, показывает, что процесс геострофического приспособления есть эффективный механизм генерации волновых движений в атмосфере и океане.

В параграфе 1.2 рассмотрен вопрос об определении стационарных состояний циклострофического (геострофического) балансов по начальным данным для нелинейных движений, обладающих осевой или трансляционной симметрией. Основная проблема, которая здесь возникает, состоит в том, что сбалансированные состояния нельзя определить из стационарных уравнений движения, поскольку неизвестных оказывается больше, чем уравнений. Как показано в работе, недостающие уравнения можно получить в форме сохраняющихся в процессе эволюции функциональных зависимостей между лагранжевыми инвариантами задачи. Существование этих связей вытекает из следующего простого математического предложения: произвольное векторное поле в  $n$ -мерном пространстве имеет ровно  $n$  функционально независимых (базисных) лагранжевых инвариантов, через которые выражается произвольный инвариант. Принципиальную роль при этом играет также тот факт, что для рассматриваемых движений имеются дополнительные лагранжевы инварианты – угловой момент в осесимметричном и геострофический момент в случае трансляционной симметрии.

В качестве примера рассмотрим осесимметричные движения жидкости в модели мелкой воды в отсутствие фонового вращения:

$$\frac{du}{dt} - \frac{M^2}{r^3} = -g \frac{\partial h}{\partial r}, \quad \frac{dM}{dt} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ruh) = 0, \quad (1.4)$$

где  $M = rV$  – угловой момент,  $u, V$  – радиальная и азимутальная компоненты скорости,  $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial r$ . Стационарный вариант системы (1.4) дает  $u = 0$  и уравнение циклострофического баланса  $M^2/r^3 = g\partial h/\partial r$ , которое связывает две неизвестные функции  $M, h$ . Для получения недостающего соотношения, уравнение баланса массы записывается в форме лагранжева закона сохранения:  $dI/dt = 0$ ,  $I = g \int_0^r hrdr$ . Из уравнений  $dI/dt = 0$ ,  $dM/dt = 0$  следует, что в процессе эволюции сохраняется функциональная связь  $M = F(I)$ , конкретный вид которой получается исключением координат

наты  $r$  из начальных условий для  $M, I$ . С учетом данной связи и соотношения  $gh = r^{-1} \partial I / \partial r$ , стационарное состояние определяется однозначно из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r} = \frac{F^2(I)}{r^3}$$

в соответствии с заданными начальными условиями (зависимость  $F(I)$ ).

В случае осесимметричных движений стратифицированной жидкости ( $f = 0$ ) стационарный вариант системы (1.2) дает два уравнения

$$\rho \frac{M^2}{r^3} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \rho g = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1.5)$$

которые связывают три неизвестных функции -  $\rho, M, p$ . Для однозначного определения стационарного состояния используются законы сохранения трех лагранжевых инвариантов: углового момента  $M$ , плотности  $\rho$ , потенциальной завихренности  $q = r^{-1} \partial(M, \rho) / \partial(r, z)$ . В процессе эволюции сохраняется функциональная связь  $q = F(M, \rho)$ , конкретный вид которой получается исключением координат  $r, z$  из начальных условий для  $M, \rho, q$ . С учетом этой связи, имеем замкнутую систему уравнений для определения стационарного состояния:

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial z} (\rho M^2) + g \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(M, \rho)}{\partial(r, z)} = F(M, \rho). \quad (1.6)$$

Первое уравнение в системе (1.6) получено исключением давления из (1.5).

Приведенное рассмотрение распространяется на случай плоских (не зависящих от горизонтальной координаты  $y$ ) движений вращающейся ( $f \neq 0$ ) стратифицированной жидкости. В этом случае, формирующееся в процессе приспособления стационарное геострофическое состояние находится с использованием лагранжевых законов сохранения геострофического момента  $m = v + fx$ , плотности  $\rho$ , потенциальной завихренности  $q = \partial(m, \rho) / \partial(x, z)$  и функциональной связи  $q = F(m, \rho)$ .

В работе приведены примеры точных решений сформулированных нелинейных уравнений для стационарных состояний. В рамках модели мелкой воды построено точное решение, описывающее геострофическую струю, сформировавшуюся на месте первоначального разрыва уровня. Показано, что в кинетическую энергию струи переходит ровно

одна треть реализованной потенциальной энергии, а остальные две трети идут на генерацию волн.

В **параграфе 1.3** для горизонтально-однородных движений сжимаемой полубесконечной атмосферы развита линейная и нелинейная теория гидростатического приспособления. Система уравнений динамики имеет вид

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \theta = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad (1.7)$$

где  $w$  - вертикальная скорость,  $\gamma = c_p/c_v$  - отношение теплоемкостей (для воздуха  $\gamma = 7/5$ ),  $d/dt = \partial/\partial t + w\partial/\partial z$ . Стационарный вариант системы (1.7) дает  $w = 0$  и уравнение гидростатики  $\partial p/\partial z = -g\rho$ , связывающее две неизвестные функции  $\rho, p$ . С использованием лагранжевых законов сохранения энтропии  $\theta$  и интегральной массы  $I = \int_0^z \rho dz$  в работе сформулировано замкнутое нелинейное уравнение для однозначного определения стационарных состояний по начальным данным. Показано, что установление этих состояний происходит за счет излучения акустико-гравитационных волн. Сформулирован вариационный принцип, утверждающий, что стационарным состояниям отвечает абсолютный минимум функционала полной энергии. Этот принцип позволяет дать физическую интерпретацию процессу гидростатического приспособления как процессу достижения системой состояния с минимумом полной энергии.

В заключительном **параграфе 1.4** главы решена задача о приспособлении вихревых движений идеального газа к состояниям циклострофического баланса. Показано, что процесс приспособления носит нестационарный волновой характер и при начальных скоростях вращения, близких к скорости звука, сопровождается значительным падением температуры газа в приосевой зоне (до  $-50 \div -100$  °C). Этот результат приложен к объяснению вихревого эффекта Ранка – интенсивного охлаждения приосевой области закрученного газового потока в вихревой трубе.

Теоретическое исследование процесса приспособления выполнено в рамках системы уравнений газовой динамики, описывающей осесимметричные движения идеального политропного газа. Для этой системы рассмотрена задача с начальными данными, отвечающими ситуации, когда в газе, находящемся при постоянных температуре  $T_0$ , давлении  $p_0$ , плотности  $\rho_0$ , мгновенно создан вихрь с тангенциальной скоростью  $Vv_0(r/L)$ , где  $V, L$  – заданные амплитуда и масштаб начального вихря. Как и в теории геострофической адап-

тации, решение задачи представлено суммой стационарного (сбалансированного) и нестационарного (волнового) компонентов, где волновой компонент описывает акустические колебания, возбуждаемые в процессе приспособления. Сформулирована нелинейная краевая задача для определения стационарного компонента по начальным данным, изучена структура сбалансированных состояний для различных типов начальных распределений тангенциальной скорости и различных значений квадрата числа Маха  $\varepsilon = (V/c)^2$ .

В качестве примера на рис. 1 представлены радиальные распределения тангенциальной скорости  $v/V$  (а) и температуры  $T/T_0$  (б) в сбалансированном состоянии, формирующемся при  $\varepsilon = 1$  в случае начального неограниченного вихря, спадающего по алгебраическому закону:  $v_0(r) \sim 1/r^{1-\lambda}$ . Кривым 1 – 3 отвечают значения  $\lambda = 0.3, 0.5, 0.7$ , пример начального распределения скорости показан пунктиром. При  $\lambda = 0.5$  и начальной комнатной температуре  $T_0 = 300^\circ \text{K}$  ( $\sim 27^\circ \text{C}$ ) температура на оси вихря падает на  $72^\circ \text{K}$  и достигает  $-45^\circ \text{C}$ . Для достижения такого падения температуры нужна начальная скорость немного превышающая половину скорости звука. В случае начального ограниченного вихря (задача в трубе радиуса  $L$ ) температура на оси вихря падает, в то время как на периферии у стенки происходит нагрев. Нагревание периферийных слоев связано исключительно с условием сохранения полной массы, а не с эффектом трения о стенки, как это обычно предполагается.

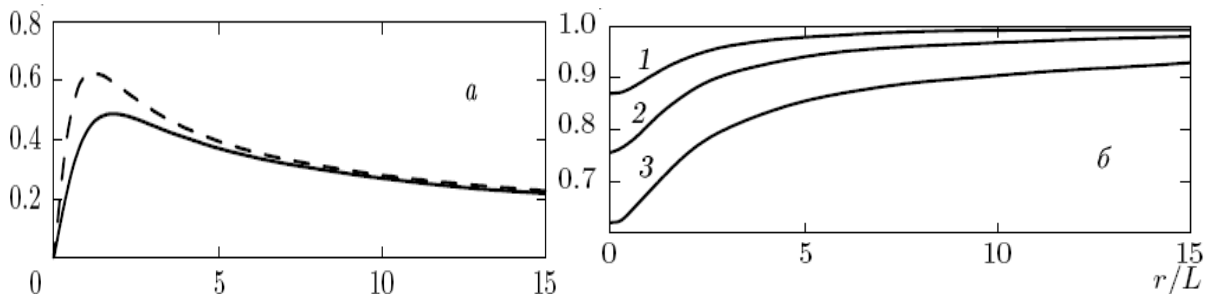


Рис. 1.

Теоретический анализ дополнен результатами специальных экспериментов с трубкой Ранка, выполненных К.Н. Вишератиным. В этих экспериментах показано, что максимальное падение температуры наблюдается непосредственно вблизи выхода закрученного потока из завихрителя, где и происходит процесс циклострофического приспособления.

## Глава 2. Фронтотенез в непрерывно стратифицированной жидкости.

В главе рассмотрены гидродинамические модели формирования атмосферных и океанических фронтов. В параграфе 2.1 развита теория несбалансированного фронтотенеза, связывающая образование фронтов с процессом нелинейного геострофического приспособления.

собления в непрерывно стратифицированной вращающейся жидкости. Основной физической результат состоит в том, что даже в случае гладких начальных несбалансированных распределений формирующиеся финальные геострофические состояния могут содержать поверхности разрыва типа фронтальных. Поскольку несбалансированные распределения в атмосфере и океане возникают достаточно часто (например, при внезапных охлаждениях или нагревах), этот результат показывает, что процесс геострофического приспособления есть один из важнейших механизмов природного фронтогенеза.

В теоретическом исследовании рассматриваются плоские (не зависящие от координаты  $y$ ) движения вращающейся стратифицированной жидкости, с компонентами скорости  $u, v, w$  вдоль горизонтальных осей  $x, y$  и вертикальной оси  $z$  соответственно, в бесконечном горизонтальном слое  $0 < z < H$ . Описание движений проводится в рамках системы уравнений (1.2), записанной в приближении Буссинеска. Для этой системы рассматривается задача с начальными условиями  $t = 0$ :  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,  $\rho = \Delta\rho[-z/H + ah(x/L)]$ , отвечающими ситуации, когда в покоящуюся линейно стратифицированную жидкость внесено возмущение плотности вида с амплитудой  $a$  и горизонтальным масштабом  $L$  ( $\rho$  - отклонение плотности от фонового значения  $\rho_*$ ). Поскольку начальное состояние несбалансировано, в системе возникают волновые движения, и по истечении переходного периода адаптации устанавливается стационарное состояние геострофического равновесия. В этом состоянии  $u = w = 0$ , а переменные  $\rho, v$  удовлетворяют уравнению термического ветра  $f\partial m / \partial z + (g / \rho_*)\partial\rho / \partial x = 0$ , где  $m = v + fx$ .

Для приведенных начальных условий потенциальная завихренность  $q = \partial(m, \rho) / \partial(x, z) = -f\Delta\rho / H = \text{const}$ . С учетом этого факта, в безразмерных переменных для определения стационарного состояния имеем систему

$$\frac{\partial m}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(m, \rho)}{\partial(x, z)} = -1 \quad (2.1)$$

в полосе  $0 < z < 1$ , с краевыми условиями  $\rho|_{z=0} = ah(\lambda m)$ ,  $\rho|_{z=1} = -1 + ah(\lambda m)$ .

Здесь  $\lambda = L_R / L$ ,  $L_R = \sqrt{g\Delta\rho H / \rho_*} / f$  - радиус деформации Россби. В качестве масштабов  $z, x, \rho, v$  приняты соответственно  $H, L_R, \Delta\rho, fL_R$ . Краевые условия отража-

ют сохранение функциональной связи между инвариантами  $\rho, m$  на горизонтальных границах.

Преобразование зависимых и независимых переменных – переход в системе (2.1) от независимых переменных  $X, Z$  к переменным  $m, z$  – сводит ее к линейной системе Коши-Римана:  $\partial\rho/\partial m = \partial x/\partial z$ ,  $\partial\rho/\partial z = -\partial x/\partial m$ . Этот факт позволяет использовать в анализе методы теории функций комплексного переменного. С использованием этих методов в работе построены точные решения краевой задачи для различных типов начальных распределений  $h(m)$ . Основная особенность связана с существованием критической амплитуды  $a = a_{cr}$ , при превышении которой решения становятся многозначными (разрывными). Критическая амплитуда пропорциональна квадрату масштаба начального возмущения. С ростом  $a$  разрывы впервые возникают на горизонтальных границах.

На рис. 2 (верх) в вертикальной плоскости изображены изолинии поля плотности (а) и касательной к фронту компоненты скорости  $V$  (б) в финальном геострофическом состо-

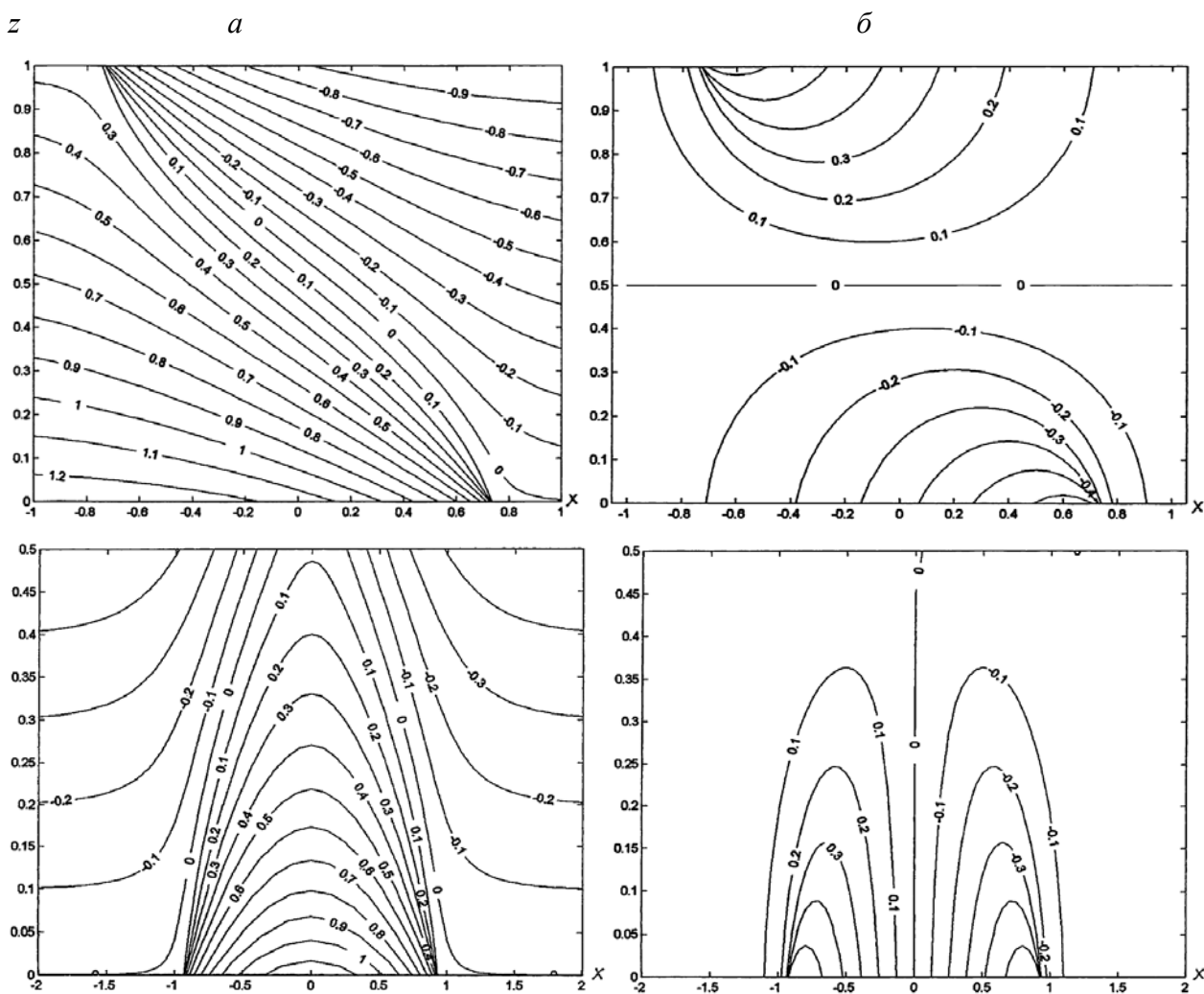


Рис. 2.

тоянии, формирующемся при  $a = a_{cr}$  из гладкой начальной плотностной ступеньки ( $h(m) = \text{th}(\lambda m)$ ). Соответствующие картины изолиний в случае начального локализованного возмущения плотности ( $h(m) = 1/\text{ch}^2(\lambda m)$ ) для нижней половины слоя представлены на рис. 2 (низ). Точки сгущения изолиний отмечают положения формирующихся фронтов. С каждым фронтом связано интенсивное струйное течение.

При  $a > a_{cr}$  многозначные решения для финальных состояний преобразуются в однозначные разрывные путем проведения поверхностей разрыва  $x_b = x_b(z)$ . Как и в задачах газовой динамики, это осуществляется с использованием непрерывной части решения и соответствующего физического условия на разрыве. В качестве последнего принимается условие непрерывности давления при переходе через разрыв, которое выражается известной формулой Маргулеса (безразмерная форма):  $dx_b/dz = (\rho_2 - \rho_1)/(m_2 - m_1)$ , где  $\rho_2, \rho_1 \dots$  - значения величин соответственно справа и слева от разрыва. С использованием этой формулы в работе сформулирована нелинейная система уравнений для определения поверхностей разрыва и показано, что ее можно точно проинтегрировать, благодаря наличию первого интеграла, аналогичного интегралу площадей в газовой динамике. Важный результат состоит в том, что при достаточно больших амплитудах геометрические конфигурации поверхностей разрыва носят универсальный характер, т.е. не зависят от деталей начальных распределений. В случае начальной сглаженной ступеньки в верхней и нижней половинах слоя формируются два наклонных фронта, имеющие параболический профиль. В случае локализованного возмущения, наряду с наклонными фронтами, в верхней половине слоя формируется вертикальный фронт, на котором плотность непрерывна, а компонента скорости терпит скачок [20, 29].

Для описания нестационарных волновых процессов приспособления в работе разработаны численная гидростатическая модель и упрощенная аналитическая модель, основанная на уравнениях динамики в лагранжевых переменных. Показано, что процесс установления разрывных геострофических состояний носит ярко выраженный волновой характер с чередованием фаз гладкости и многозначности. На небольших временах эти фазы повторяются с инерционным периодом, т.е. формируется нестационарный пульсирующий фронт.

В **параграфе 2.2** рассмотрена исторически более ранняя теория деформационного фронтогенеза, связывающая образование атмосферных и океанических фронтов с наличием специального класса фоновых деформационных полей скорости, обостряющих начальные градиенты. Деформационный фронтогенез, как правило, исследуется в рамках достаточно



сложных численных моделей (Williams (1974), Ostdiek, Blumen (1995)). В работе впервые построен класс точных аналитических решений, описывающий процесс формирования холодного фронта в слое атмосферы конечной высоты  $H$ .

В деформационной модели (Hoskins, Bretherton (1972)) исследуется эволюция двумерных (не зависящих от координаты  $y$ ) возмущений, помещенных в гиперболическое поле типа седла:  $u = -\alpha_* x$ ,  $v = \alpha_* y$ . Описание эволюции проводится в рамках системы уравнений динамики (1.2), в которой используется приближение геострофического баланса в направлении вдоль фронта. Использование закона сохранения потенциальной завихренности и переход к полугеострофическим координатам  $m, z$  позволяют свести эту систему к системе линейных диагностических уравнений, не содержащих временных производных. В ситуации с однородно распределенной потенциальной завихренностью эволюция поля безразмерной плотности (потенциальной температуры) описывается решением уравнения Лапласа  $\Delta \rho = 0$  с краевыми условиями, зависящими от времени:  $\rho|_{z=0} = ah(\tau m)$ ,  $\rho|_{z=1} = -1 + ah(\tau m)$ . Здесь  $\tau = L^{-1}e^{\alpha t}$ ,  $h(m)$  - граничная функция, задающая структуру начального распределения  $\rho$  с безразмерными амплитудой  $a$  и масштабом  $L$ . Функция тока  $\psi$ , описывающая циркуляцию в вертикальной плоскости, находится из уравнения  $\Delta \psi = -2\alpha \partial \rho / \partial m$ . В качестве горизонтального и вертикального масштабов приняты соответственно  $H$  и  $L_R$ .

Аналитические решения задачи построены для граничной функции  $h(m) = 0.5(1 - \text{th} m)$ , описывающей плавный переход от более плотной (слева) к более легкой жидкости в начальный момент времени. Процедура построения решений включает конформное отображение полосы  $0 < z < 1$  на полуплоскость с последующим применением формулы Шварца. Распределение плотности в дискретные моменты времени  $\tau = L^{-1}e^{\alpha t} = \pi n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , описывается параметрическими ( $m$  - параметр) выражениями

$$\rho = -z + \frac{a}{2n} \sum_{k=1}^n \left[ 1 - \frac{sh \pi m}{ch \pi m + \cos(\pi z - \gamma_k)} \right], \quad x = m - \frac{a}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(\pi z - \gamma_k)}{ch \pi m + \cos(\pi z - \gamma_k)},$$

где  $\gamma_k = (2k - 1) / 2n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Переход к физическим переменным осуществляется обращением зависимости  $x = x(m, z, \tau) \rightarrow m = m(x, z, \tau)$ .

На рис. 3 представлены изолинии поля плотности для двух моментов времени:  $n = 1$  (а) и  $n = 2$  (б). В момент времени  $t = t_{cr}$ , зависящий от амплитуды  $a$  и размерной ширины переходной зоны  $L_*$ , на горизонтальных границах возникает разрыв (фронт). При  $a = 1$ ,  $\alpha_* = 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ ,  $L_* = 500 \text{ км}$ , разрыв формируется в момент  $t_{cr} \approx 12.5$  часа, на расстоянии 730 км от начала координат.

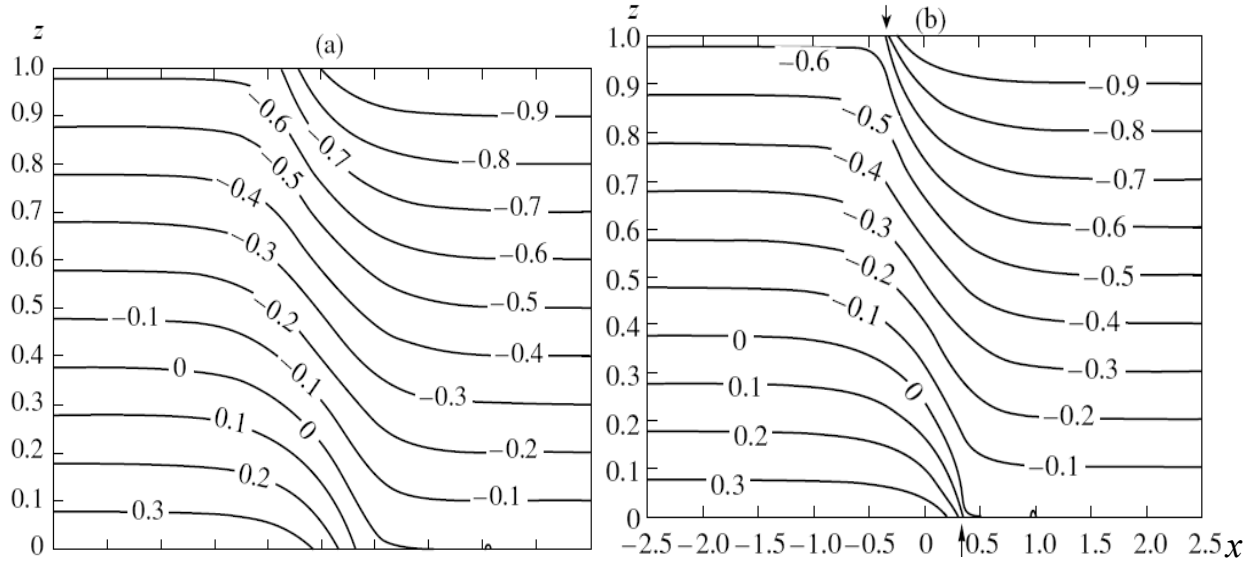


Рис. 3.

С использованием аналитического решения для функции тока  $\psi$  в работе показано, что впереди перемещающегося фронта имеют место восходящие движения теплого (легкого) воздуха, позади – нисходящие движения холодного. Именно такая структура вертикальной циркуляции характерна для холодных атмосферных фронтов.

Заключительный **параграф 2.3** главы посвящен сопоставлению теоретических результатов с наблюдениями. Вытекающий из теории несбалансированного фронтогенеза важный практический вывод состоит в том, что появление в атмосфере и океане областей с достаточно интенсивными горизонтальными градиентами плотности (температуры) неизбежно должно сопровождаться формированием фронтов и сопутствующих им струйных течений. Такого рода фронты действительно повсеместно наблюдаются. В качестве примеров можно привести шельфовые фронты в океане, бризовые фронты, крупномасштабные атмосферные фронты, разделяющие воздушные массы с различными термическими характеристиками. Развитая теория описывает следующие особенности структуры крупномасштабных фронтов: а) максимальные градиенты в области фронтальной зоны наблюдаются вблизи подстилающей поверхности и тропопаузы, а в основной толще тропосферы они выражены слабо, б) фронтальная зона образована единой системой, состоящей из приземного

и верхнетропосферного фронтов, в) с каждым из фронтов связано интенсивное струйное течение, причем его ось смещена относительно фронта.

В данном параграфе представлено также прямое количественное сравнение с результатами лабораторных экспериментов (Stegner et al (2004)), в которых моделировался плотностной фронт в двухслойной системе. Полученное в работе аналитическое решение хорошо описывает структуру фронта.

### Глава 3. Адаптация в стратифицированных двухкомпонентных средах.

Многочисленными измерениями распределений температуры и солёности в океане обнаружено существование ярко выраженных горизонтальных и вертикальных неоднородностей (Федоров (1976), Монин (1988)). Распространены, в частности, ситуации с многочисленными скачками (ступеньками) на вертикальных профилях этих переменных (тонкая структура океана). Основными механизмами формирования неоднородностей считаются процесс обрушения внутренних гравитационных волн, а также конвекция, обусловленная двойной диффузией. В данной главе изучены новые механизмы, связанные с процессами гидростатического и геострофического приспособления в стратифицированных двухкомпонентных средах, т. е. средах, плотность которых зависит как от температуры, так и от концентрации некоторой примеси.

Примерами двухкомпонентных сред являются соленая морская вода и влажный воздух. Уравнение состояния для соленой морской воды с большой точностью записывается в виде  $\rho = \rho_*(1 - \alpha T + \beta s)$ , где  $\rho_*$  - значение  $\rho$  при постоянных средних значениях температуры  $T_*$  и солёности  $s_*$ ;  $T, s$  - соответствующие отклонения от средних,  $\alpha$  - коэффициент термического расширения,  $\beta$  - коэффициент солёностного сжатия. Адиабатические движения среды описываются системой уравнений

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{k}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \frac{dT}{dt} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 0. \quad (3.1)$$

В параграфе 3.1 исследовано поведение возмущений, внесенных в устойчиво стратифицированную двухкомпонентную среду (процесс гидростатического приспособления). Соответствующие начальные условия для системы (3.1) записываются в виде  $t = 0: \mathbf{u} = \mathbf{0}, T = \gamma_T z + T_i(\mathbf{x}), s = \gamma_s z + s_i(\mathbf{x})$ , где  $T_i, s_i$  - заданные начальные возмущения,  $\gamma_T, \gamma_s$  - постоянные фоновые значения вертикальных градиентов каждой из субстанций. Фоновое состояние считается конвективно устойчивым, чему отвечает убывание фоновой плотности с высотой:  $\bar{\rho}(z) = \rho_*(1 - \gamma z), \gamma = \alpha\gamma_T - \beta\gamma_s > 0$ . Отно-

сительный вклад температуры и концентрации примеси в фоновую стратификацию плотности характеризуется безразмерным параметром  $\eta = \beta\gamma_s / \alpha\gamma_T$ .

В безграничной устойчиво стратифицированной среде начальные горизонтальные неоднородности поля плотности  $\rho_i = -\rho_*(\alpha T_i - \beta s_i)$  приводят к возникновению волновых движений, которые сглаживают плотностные неоднородности и на больших временах затухают. В однокомпонентной среде (плотность зависит только от  $T$ ) вместе с возмущением плотности затухает также возмущение температуры. Как показано в работе, совершенно иначе ведут себя возмущения в двухкомпонентной среде. Обозначим финальные (при  $t \rightarrow \infty$ ) распределения возмущений температуры и концентрации примеси через  $T'_f, s'_f$ . В рамках линейного приближения для этих распределений получены выражения

$$T'_f = \frac{\alpha\eta T_i - \beta s_i}{\alpha(\eta - 1)}, \quad s'_f = \frac{\alpha\eta T_i - \beta s_i}{\beta(\eta - 1)}, \quad (3.2)$$

которые показывают, что в двухкомпонентной среде возмущения  $T', s'$  не исчезают и на финальной стадии процесса гидростатического приспособления. Эти возмущения компенсируют друг друга в поле плотности ( $\alpha T'_f - \beta s'_f = 0$ ), формируя стационарный термохалинный "след".

Согласно (3.2), амплитуда финальных возмущений определяется значением параметра  $\eta$ . Так, при  $s_i = 0$  (начальное возмущение солености отсутствует) и  $0 < \eta < 1$  (стратификация соли неустойчива, но систему стабилизирует устойчивая стратификация температуры:  $\alpha\gamma_T > \beta\gamma_s > 0$ ) финальное и начальное возмущения  $T'$  имеют противоположные знаки; т. е., например, в ответ на первоначальный нагрев в среде формируется холодный след. При  $\eta > 1$  (температурная стратификация неустойчива, но систему стабилизирует устойчивая стратификация примеси) амплитуда возмущения в финальном состоянии оказывается всегда больше начальной амплитуды. В работе представлен детальный анализ этих и ряда других нетривиальных особенностей, не имеющих аналогов в однокомпонентных средах.

Наряду с линейной теорией, в диссертации также развита нелинейная теория приспособления, основанная на решении системы уравнений динамики (3.1) в лагранжевых переменных. Универсальная особенность структуры следа в этой теории состоит в формировании вертикальных разрывных распределений из гладких начальных возмущений. При  $s_i = 0$  и начальном температурном возмущении вида  $T_i = \Delta T h(x/L) \tau(z/H)$ , фи-

нальное распределение  $T_f(z)$  на оси симметрии возмущения описывается параметрическими ( $z_0$  - безразмерный параметр) выражениями

$$z = z_0 + a \cdot \tau(z_0), \quad T_f = \gamma_T H [z_0 + a(1 - \eta)\tau(z_0)], \quad (3.3)$$

где  $a = \alpha \Delta T / \gamma H$ . На рис. 4а представлена зависимость (3.3) в случае гладкого локализованного распределения  $\tau(z_0) > 0$  и  $\eta < 0$  (рассматривается неограниченная по вертикали среда). Этот рисунок иллюстрирует как с ростом параметра  $a$  (начальной амплитуды  $\Delta T$ ) на вертикальном профиле  $T_f$  формируется разрыв. Аналогичный разрыв формируется и на вертикальном профиле солености. Эти разрывы компенсируют друг друга так, что вертикальное распределение плотности остается гладким (линейным). При характерных для океана значениях  $H = 10$  м,  $\alpha = 2 \times 10^{-4}$  К<sup>-1</sup>,  $\gamma = 9 \times 10^{-7}$  м<sup>-1</sup> начальное возмущение с амплитудой  $\Delta T = 7 \times 10^{-2}$  К уже приводит к формированию разрыва.

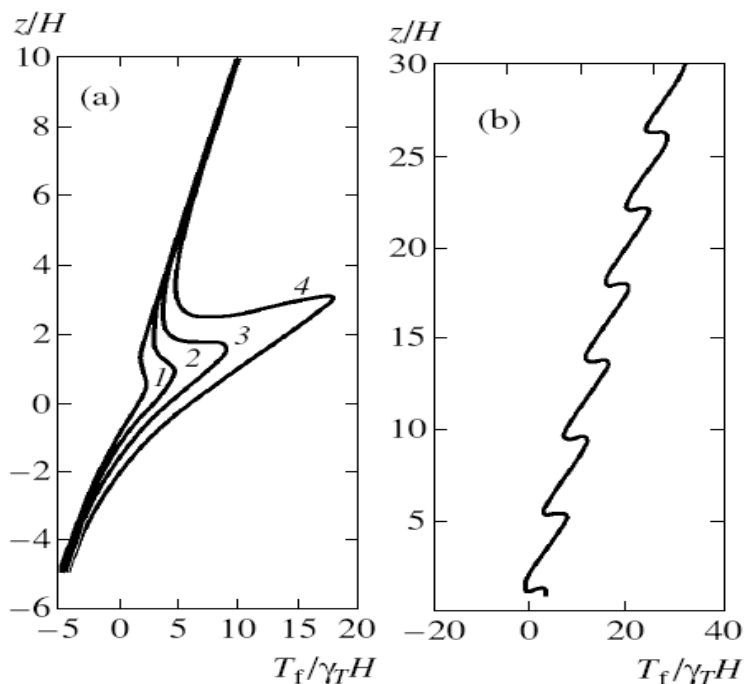


Рис. 4.

В случае периодического по вертикали начального возмущения  $\tau(z_0) = \cos(\lambda z_0)$  (рис. 4б), вызванного, например, внутренней волной, формируется стационарный “пилообразный” профиль температуры, в котором слои с постоянными градиентами разделены резкими скачками (инверсиями). Если начальное распределение аperiodично (имеет положительные и отрицательные фазы), формируется профиль с нерегулярным распределением скачков. Подобные профили характерны для тонкой структуры океана, которая, согласно

определению К.Н. Федорова (1978), “представляет собой неупорядоченное или систематическое чередование по глубине участков с низкими и высокими вертикальными градиентами того или иного свойства”.

С гидродинамической точки зрения, формирование следа в двухкомпонентных средах связано с тем, что для адиабатических движений температура и концентрация примеси являются лагранжевыми инвариантами. Векторное поле  $\mathbf{R} = \nabla T \times \nabla S$ , касательное к линиям пересечения поверхностей равных значений этих инвариантов, при этом удовлетворяет уравнению вмороженности  $d\mathbf{R}/dt = (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ . В случае возмущений малой амплитуды из этого уравнения следует простой локальный закон сохранения  $\partial r / \partial t = 0$ ,  $r = \gamma_S T' - \gamma_T S'$ , ответственный за формирование следа в линейной теории. Из уравнения вмороженности вытекают два специфических для двухкомпонентных сред интегральных закона сохранения:  $dI_k / dt = 0$ ,  $I_1 = \int [\nabla \rho \times \nabla q] \mathbf{u} dx$ ,  $I_2 = \int [\nabla T \times \nabla S] \mathbf{u} dx$ , где  $q = \text{rot } \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ . Эти законы аналогичны законам сохранения Моффата и Вольтерра в обычной и магнитной гидродинамике и независимы от закона сохранения полной энергии.

**В параграфе 3.2** в рамках системы (3.1), дополненной учетом фонового вращения, изучены особенности процесса геострофического приспособления в двухкомпонентных средах. Показано, что если первоначальная агеострофичность связана с возмущениями температуры и (или) концентрации примеси, то структура финальных распределений этих субстанций может качественно отличаться от классических решений задач адаптации. Например, первоначальный тепловой импульс может в процессе адаптации приводить к формированию стационарного температурного возмущения большей амплитуды и (или) противоположного знака. При эволюции сглаженной температурной “ступеньки” возможно возникновение немонотонных температурных распределений, с амплитудами, много большими начальной амплитуды.

В случае достаточно больших амплитуд гладких начальных возмущений в процессе приспособления могут возникать поверхности разрыва. Учет двухкомпонентного характера среды делает качественные свойства таких поверхностей особенно разнообразными. Например, фронтальная поверхность может быть ярко выражена в поле одной из термодинамических компонент (температуры) и слабо в другой (солености). Подобные особенности проявляются в распределениях термогидродинамических полей в океане.

**В параграфе 3.3** теоретические результаты сопоставлены с некоторыми данными океанологических наблюдений. Подробно рассмотрена работа Rudnick, Ferrari (“Science”, 1999, v. 283, p. 526-529), в которой, на основании данных океанологических разрезов, вы-

полненных в верхнем квазиоднородном слое в северной части Тихого океана, сделан вывод о практически полной скомпенсированности горизонтальных распределений температуры и солености в поле плотности. Подобная скомпенсированность на масштабах, меньших радиуса деформации Россби, объясняется развитой в диссертации теорией гидростатического приспособления. Приведены и проанализированы также данные К.Н. Федорова, свидетельствующие о наличии практически полной скомпенсированности и для вертикальных разрывных распределений (температурные интрузии, ступеньки).

#### **Глава 4. Вопросы теории гидродинамической устойчивости вращающихся сдвиговых течений.**

Теория гидродинамической устойчивости вращающихся сдвиговых течений развита гораздо менее полно, чем классическая теория сдвиговой неустойчивости. При исследовании устойчивости вращающихся течений нельзя ограничиться рассмотрением только двумерных возмущений, поскольку нет аналога теоремы Сквайра. Устойчивость вращающихся течений существенно зависит от взаимной ориентации сдвига и направления вращения. Кроме того, во вращающейся жидкости в поле силы тяжести существуют собственные волновые движения – инерционно-гравитационные волны, которые при наличии сдвиговых течений могут быть захвачены (локализованы) внутри слоя сдвига.

подавляющее большинство исследований устойчивости вращающихся сдвиговых течений выполнено в рамках упрощенных моделей, использующих квазигеострофическое приближение. В данной главе исследование устойчивости выполнено в рамках полной линейаризованной системы уравнений динамики.

В параграфе 4.1 исследована устойчивость течений вращающейся жидкости постоянной плотности с горизонтальными сдвигами:

$$\mathbf{u} = (U(y), 0, 0), \quad p = P(y), \quad fU = -\partial P / \partial y \quad (4.1)$$

( $p$  - редуцированное давление). Линеаризованная система уравнений динамики для возмущений сведена к одному уравнению для поперечной к потоку компоненты скорости:

$$\frac{D}{Dt} \left[ \frac{D}{Dt} \Delta v - U''(y) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + f^2 [1 - R(y)] \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad (4.2)$$

где  $D/Dt = \partial/\partial t + U\partial/\partial x$ ,  $R(y) = U'(y)/f$  - безразмерный параметр, характеризующий взаимную ориентацию сдвига и направления вращения. Если  $R(y) < 0$  (циклонический сдвиг), фоновая и сдвиговая завихренности параллельны, если  $R(y) > 0$  (антициклонический сдвиг) – антипараллельны.

По геометрическим характеристикам возмущения в сдвиговом потоке разделяются на три класса – двумерные (не зависящие от координаты  $Z$  вдоль оси вращения), симметричные (не зависящие от координаты  $X$  вдоль потока), пространственные (ориентированные под углом к потоку). С использованием вытекающих из (4.2) квадратичных законов сохранения в работе сформулированы достаточные условия устойчивости относительно возмущений из каждого класса. В частности, показано, что относительно симметричных возмущений сдвиговой поток устойчив, если  $R(y) < 1$ . Согласно этому критерию, течения с циклоническим сдвигом всегда симметрично устойчивы.

С использованием метода нормальных мод исследована устойчивость: 1) вращающихся тангенциальных разрывов; 2) свободных слоев сдвига; 3) струйных течений. Основным результатом связан с описанием эффекта циклон-антициклонной асимметрии, который состоит в том, что течения с циклоническим сдвигом всегда более устойчивы, чем с антициклоническим. Наиболее ярко этот эффект выражен в устойчивости вращающихся тангенциальных разрывов:  $U(y) = U_0$ ,  $y > 0$ ;  $U(y) = -U_0$ ,  $y < 0$ . Как показано в работе, циклонический скачок скорости ( $U_0 < 0$ ) всегда симметрично устойчив, антициклонический ( $U_0 > 0$ ) - неустойчив. Эта асимметрия проявляется и в устойчивости относительно пространственных возмущений, где при циклоническом скачке всегда существует кривая нейтральной устойчивости. Для инкрементов нарастания  $K_s$  симметричных и  $K$  пространственных возмущений получены выражения

$$K_s = \frac{f}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{2mU_0}{f}\right)^2} - 1}, \quad K = \sqrt{\frac{fm^2}{\sqrt{m^2 + k^2}} U_0 + U_0^2 k^2}, \quad k \rightarrow \infty,$$

где  $k$ ,  $m$  - соответственно горизонтальное и вертикальное волновые числа. Из второго выражения следует, что для коротких волн учет вращения приводит к увеличению инкремента неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в случае  $U_0 > 0$  и к уменьшению в случае  $U_0 < 0$ . В рамках лабораторного моделирования эффект циклон-антициклонной асимметрии исследовался Незлиным, Снежкиным (1990).

В связи с геофизическими приложениями особый интерес представляют струйные течения, где одновременно существуют области с циклоническим и антициклоническим сдвигами. В работе подробно исследована задача о неустойчивости вращающейся "треугольной" струи (с кусочно-постоянными сдвигами). Показано, что в этом течении неустойчивые симметричные возмущения локализованы в области антициклонического сдвига.



Подобная "односторонняя" неустойчивость наблюдалась в известных экспериментах Хайда по моделированию общей циркуляции атмосферы.

В параграфе 4.2 исследована структура захваченных симметричных возмущений в спектрально-устойчивых сдвиговых течениях. Рассмотрено баротропное сдвиговое течение (4.1) в слое  $0 < z < H$  несжимаемой стратифицированной жидкости с постоянной частотой Брента  $N$ . Для функции тока  $\psi(y, z)$  симметричных возмущений из линеаризованной системы уравнений динамики (1.2) следует уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] + f^2 [1 - R(y)] \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (4.3)$$

которое рассматривается в устойчивом случае  $R(y) < 1$ . Отыскиваются решения (4.3) вида  $\psi = \varphi(y) \exp(i\omega t) \sin(\pi k z / H)$ , где  $\omega > 0$  - частота колебаний,  $k = 1, 2, \dots$  - номер вертикальной моды колебаний. Подстановка последнего выражения в (4.3) приводит к уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{m^2}{N^2 - \omega^2} \left[ f^2 (R(y) - 1) + \omega^2 \right] \varphi = 0, \quad m = \frac{\pi k}{H}, \quad (4.4)$$

которое, вместе с краевыми условиями ограниченности  $\varphi$  при  $|y| \rightarrow \infty$ , определяет спектральную задачу для нахождения частот колебаний  $\omega$ .

При качественном анализе спектральной задачи, уравнение (4.4) записывается в форме уравнения Шредингера, однако, с более сложной зависимостью от спектрального параметра. При такой записи захваченные волны аналогичны связанным состояниям в квантовой механике; им отвечает дискретный спектр уравнения Шредингера. Из проведенного анализа следует, что расположение области захвата возмущений определяется ориентацией сдвига и стратификацией. Так, если частота Брента больше инерционной частоты  $f$ , захват происходит в области антициклонического сдвига, если меньше – в области циклонического сдвига. Соответственно, в первом случае частоты захваченных волн меньше инерционной частоты, во втором – больше.

В работе получены точные аналитические решения спектральной задачи для треугольной струи и гиперболического слоя сдвига  $U(y) = U_0 \text{th}(y/L)$ . Представлены численные оценки, иллюстрирующие сильную зависимость числа захваченных волн от частоты Брента  $N$ . Так при  $L = 500$  км,  $H = 10$  км,  $U_0 = 10$  м/с,  $f = 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,

$k = 1$ ,  $N = 10^{-2} \text{ c}^{-1}$  (атмосфера) существует ровно одна захваченная волна с периодом колебаний около 18 часов. При том же наборе параметров и нейтральной стратификации  $N = 0$  существует уже ровно 70 захваченных волн. Результаты сопоставлены с наблюдениями волновой деятельности в районах атмосферных струйных течений (Plougonven et al. (2003)).

В параграфе 4.3 установлены достаточные условия симметричной устойчивости состояний циклострофического (геострофического) баланса в стратифицированной жидкости, т. е. устойчивости относительно осесимметричных (плоских) возмущений. В исследовании устойчивости использован вариационный или энергетический метод (Арнольд (1965), Владимиров (1989)), основанный на построении сохраняющегося на решениях системы функционала Ляпунова (как правило, это энергия плюс дополнительный интеграл движения).

В случае состояния циклострофического баланса (1.5) для построения функционала Ляпунова используется полная энергия  $E = \iint (\rho u^2 / 2 + \rho g z) r dr dz$  и семейство сохраняющихся (в силу того, что  $M, \rho$  - лагранжевы инварианты) функционалов  $I_\Phi = \iint \Phi(M, \rho) r dr dz$ , зависящих от произвольной функции  $\Phi(M, \rho)$ . Следуя общей процедуре (связка интегралов), в рассмотрение вводится функционал  $L = E + I_\Phi$ , и функция  $\Phi(M, \rho)$  подбирается так, чтобы на стационарном решении первая вариация  $\delta L$  обратилась в ноль. В соответствии с общей теорией, если при этом вторая вариация  $\delta^2 L$  строго положительна, стационарное решение устойчиво по Ляпунову в норме, эквивалентной  $\delta^2 L$ . Из условий положительности второй вариации вытекают достаточные условия нелинейной симметричной устойчивости

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} < 0, \quad \frac{\partial (M^2, \rho)}{\partial (r, z)} < 0,$$

обобщающие известный критерий устойчивости Рэля для осесимметричных течений однородной жидкости.

Аналогичным образом, исследуется устойчивость состояния геострофического баланса, описывающего зональное (вдоль оси  $x$ ) геострофическое течение стратифицированной жидкости. Достаточные условия симметричной устойчивости записываются в виде:

$\partial\rho/\partial z < 0$ ,  $\partial(m, \rho)/\partial(y, z) < 0$ , где  $m = f(fy - u)$ . Если используется приближение Буссинеска, последние условия сводятся к условиям положительной определенности матрицы Якоби  $\Pi_*$  для переменных  $m, \sigma$ , где  $\sigma = -g\rho/\rho_*$  - размерная плавучесть. Из этих условий следует, что в устойчивом случае угол наклона поверхностей  $m = \text{const}$  должен превышать угол наклона поверхностей  $\sigma = \text{const}$ .

В заключительном **параграфе 4.4** главы в рамках линейного приближения исследована проблема общей (несимметричной) устойчивости зональных геострофических течений со скоростью  $\bar{u}(y, z)$ . Анализ проблемы ограничен рассмотрением низкочастотных и длинноволновых (медленно меняющихся по координате  $x$ ) возмущений. Для описания динамики таких возмущений в работе сформулировано уравнение относительно возмущения давления  $P$ :

$$\frac{D}{Dt} \left[ \frac{N^2}{f\bar{q}} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \text{div}_2(\Pi \nabla_2 P) \right] + R(y, z) \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (4.5)$$

где  $\bar{q}$  - потенциальная завихренность течения,  $R(y, z) = \bar{q}^{-2} \partial(\bar{q}, \bar{\sigma})/\partial(y, z)$ ,  $\Pi = \Pi_*^{-1}$ ,  $\nabla_2$  - оператор градиента по переменным  $y, z$ . При асимптотическом выводе (4.5) накладывались лишь ограничения на характерную частоту  $\omega$  и волновое число  $k_x$  возмущений:  $\omega \ll f$ ,  $k_x \ll f/U_0$ . В этом состоит основное отличие (4.5) от уравнения переноса потенциальной завихренности в квазигеострофическом приближении, справедливом лишь для течений с малыми числами Россби.

Из уравнения (4.5) следует семейство квадратичных законов сохранения, отражающих законы сохранения полной энергии и потенциальной завихренности. С использованием этих законов в работе сформулирована и доказана Теорема: *Относительно низкочастотных длинноволновых возмущений течение устойчиво, если: а) всюду в области  $Q$ , занимаемой течением, выполнены условия симметричной устойчивости ( $\Pi_* > 0$ ); б) существует такая константа  $K$ , что*

$$(\bar{u} - K) \frac{\partial(\bar{q}, \bar{\sigma})}{\partial(y, z)} < 0, \quad \bar{q}(\bar{u} - K) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial s} \Big|_{\partial Q} < 0. \quad (4.6)$$

Если использовать  $\bar{\sigma}$  в качестве вертикальной координаты и рассматривать течение между двумя горизонтальными плоскостями  $z = 0, H$ , условия (4.6) сводятся к следующим:

$$(\bar{u} - K) \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \Big|_{\bar{\sigma}} < 0, \quad (\bar{u} - K) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y} \Big|_{z=H} > 0, \quad -(\bar{u} - K) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y} \Big|_{z=0} > 0.$$

В такой форме они совпадают с условиями устойчивости в квазигеострофической теории (теорема Чарни-Стерна) с той разницей, что вместо квазигеострофического выражения для потенциального вихря  $\bar{q}$  стоит его точное значение, и горизонтальный градиент рассматривается на поверхностях  $\bar{\sigma} = \text{const}$  (изэнтропических поверхностях).

В условиях земной атмосферы приведенные условия, как правило, нарушаются. Возникающая при этом неустойчивость исследована на примере геострофического течения с постоянным вертикальным сдвигом (обобщенная задача Иди). В рамках (4.6) определены параметры наиболее опасного возмущения (время удвоения амплитуды порядка двух суток, горизонтальный масштаб – порядка радиуса деформации Россби). Показано, что на плоскости волновых чисел область неустойчивости есть эллипс с полуосями, зависящими от числа Ричардсона. Аналогичные результаты получены в исследовании устойчивости осесимметричных градиентных течений (состояний циклострофического баланса при наличии фонового вращения).

### **Глава 5. Немодальный подход к описанию линейной динамики возмущений в сдвиговых течениях.**

Основной недостаток традиционного метода нормальных мод в теории гидродинамической устойчивости состоит в том, что для широкого класса сдвиговых течений (без точек перегиба) соответствующая спектральная задача устойчивости не имеет решений в виде нормальных мод дискретного спектра. Информацию о поведении возмущений в этом случае дает непрерывный спектр, т.е. фактически полное решение задачи с начальными данными. Для неограниченных течений с постоянными (или почти постоянными) сдвигами решение начальной задачи легко построить, переходя в динамических уравнениях из лабораторной в движущуюся с потоком систему координат, и рассматривая поведение отдельной пространственной фурье-гармоники возмущения. Подобный подход, восходящий к Кельвину, в последние годы получил широкое распространение в задачах гидродинамики, физики плазмы, астрофизики и приобрел специальное название – немодальный подход (Farrel (1993), Chagelishvili et al. (1997), Schmid, Henningson (2001)). В данной главе этот подход применяется к исследованию устойчивости некоторых важных классов сдвиговых течений.

В параграфе 5.1 с использованием немодального подхода исследована устойчивость течений мелкой воды и несжимаемой стратифицированной жидкости с постоянным горизонтальным сдвигом в отсутствие фонового вращения. Остановимся подробнее на те-

чении мелкой воды:  $\mathbf{u} = (Ay, 0)$ ,  $h = H = \text{const}$ . Соответствующая линеаризованная система уравнений (1.1) записывается в виде

$$\frac{Du}{Dt} + Av + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{Dv}{Dt} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad \frac{D\eta}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.1)$$

где  $c = \sqrt{gH}$  - скорость длинных волн,  $D/Dt = \partial/\partial t + Ay\partial/\partial x$ . Из (5.1) вытекает лагранжев закон сохранения:  $Dq/Dt = 0$ ,  $q = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y + A\eta$ .

Следуя общей схеме немодального подхода, отыскиваются решения системы (5.1) вида

$$(u, v) = (u(t), v(t)) \cos \Theta, \quad \eta = \eta(t) \sin \Theta, \quad \Theta = kx + (l - Akt)y, \quad (5.2)$$

описывающие гармонические возмущения с переменными амплитудами  $u(t), v(t), \eta(t)$  и волновым числом  $l(t) = l - Akt$ . Подстановка (5.2) в (5.1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд:

$$\frac{du}{dt} = -v - R\eta, \quad \frac{dv}{dt} = -Rp(t)\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = R(u + p(t)v), \quad (5.3)$$

где  $R = ck/A$  - безразмерный параметр, характеризующий влияние сдвига,  $p(t) = t_* - t$ ,  $t_* = l/k$ . В качестве масштабов  $t, u, v$  приняты соответственно  $A^{-1}, c, c$ .

Важная особенность состоит в том, что система (5.3) имеет первый интеграл  $v - p(t)u - R^{-1}\eta = q = \text{const}$ , отражающий закон сохранения потенциальной завихренности. С использованием этого интеграла, система сводится к одному уравнению второго порядка, описывающему колебания математического маятника с переменной частотой  $\omega(t) = \sqrt{1 + (t - t_*)^2}$ . По значению потенциальной завихренности возмущения в сдвиговом потоке разделяются на два класса - быстроосциллирующие волновые возмущения с нулевой потенциальной завихренностью ( $q = 0$ ) и медленные вихревые возмущения с потенциальной завихренностью отличной от нуля.

В случае  $R \gg 1$  (слабые сдвиги) асимптотические решения для амплитуд волновых и вихревых возмущений находятся методом ВКБ (рис. 5). На больших временах энергия вихревых возмущений затухает, а волновых изменяется пропорционально частоте, т. е. нарастает по линейному закону. Неограниченный рост энергии свидетельствует об алгебраической неустойчивости сдвигового потока относительно быстрых волновых возмущений (модифицированных сдвигом гравитационных волн).

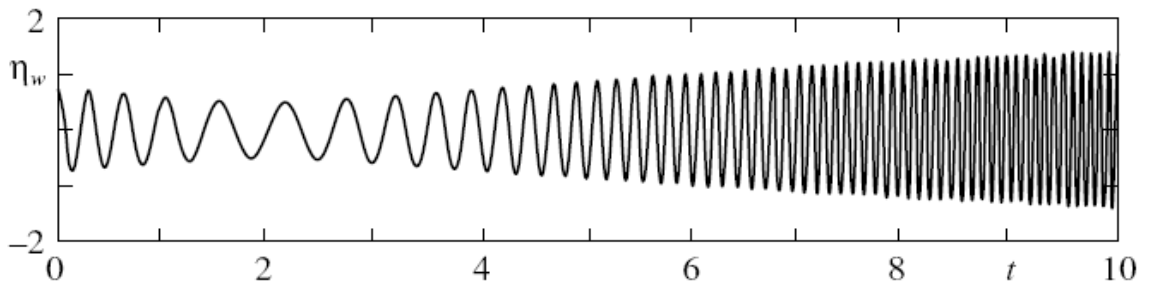


Рис. 5. Зависимость от времени амплитуды волнового компонента для отклонения уровня.

В случае  $R \ll 1$  в динамике возмущений появляется ряд новых особенностей, одна из которых связана с эффектом внезапного (скачкообразного) излучения волн вихревыми возмущениями. Для акустических возмущений аналогичный эффект впервые обнаружен Чагелишвили и др. (1997).

Представленный анализ распространяется на случай сдвигового течения стратифицированной жидкости. Решение соответствующей линеаризованной системы уравнений динамики представляется рядом по вертикальным модам. Динамика каждой моды при этом описывается системой уравнений мелкой воды (5.1), где вместо  $c$  теперь стоит фазовая скорость  $c_n$  соответствующей моды внутренних волн. В рамках этой модели легко учитываются эффекты вязкости. Вязкость приводит к затуханию энергии волновых возмущений на больших временах, однако при малой вязкости участок алгебраического роста достаточно велик.

В параграфе 5.2 исследована устойчивость потока стратифицированной жидкости с постоянным горизонтальным сдвигом в присутствии фонового вращения (геострофический поток). По отношению к симметричным возмущениям с волновым числом  $l$  в направлении перпендикулярном потоку, такой поток неустойчив, если аналог числа Россби  $Ro = A/f > 1$  и  $l^2 < (Ro - 1)f^2 / c_n^2$ . С привлечением немодального подхода, исследована динамика пространственных возмущений, ориентированных под углом к потоку. Сформулирована система уравнений для амплитуд фурье-гармоник возмущений, проведено разделение возмущений на два класса (волновые, вихревые) по значению потенциальной завихренности. Установлено, что неустойчивость имеет место и при  $Ro < 1$ , причем она связана с алгебраическим нарастанием волновых возмущений, которые обычно фильтруются в традиционных квазигеострофических моделях. Этот результат иллюстрирует ограниченность возможностей квазигеострофических моделей в задачах теории гидродинамической устойчивости.

Принципиально новое поведение обнаружено в случае  $Ro > 1$ . В этом случае участки линейного роста энергии волновых возмущений перемежаются участками экспоненциального (взрывного) роста конечной продолжительности. Подобное поведение представляет собой новый, экспоненциально-алгебраический тип гидродинамической неустойчивости, ранее не изученный в геофизической гидродинамике. В математическом плане данный тип описывается дифференциальным уравнением второго порядка для амплитуды компоненты скорости в направлении вдоль потока:

$$FRo^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2(t)u = -p(t)q, \quad \omega^2(t) = 1 + F(1 - Ro) + p^2(t),$$

где  $F = f^2 / c_n^2 k^2$ . При  $Ro > 1$  это уравнение содержит точки поворота или возврата, т. е. точки, в которых  $\omega^2(t) = 0$ . При переходе через эти точки меняется тип решения (осциллирующее, экспоненциальное). Причина появления точек поворота в данной задаче связана с зависимостью от времени волнового числа  $l(t)$  и попаданием его в интервал симметричной неустойчивости. В случае достаточно длинных волн в зональном направлении ( $F \gg 1$ ) в работе построены асимптотические решения в терминах функций Эйри.

В **параграфе 5.3** обнаружен и исследован эффект временного экспоненциального роста пространственных возмущений в геострофическом течении с постоянным вертикальным сдвигом. Как известно (Bennets, Hoskins (1979)), по отношению к симметричным возмущениям такое течение неустойчиво, если число Ричардсона  $Ri < 1$ . На плоскости волновых чисел волновой вектор двумерных неустойчивых возмущений при этом лежит внутри сектора (угла), с границами, зависящими от  $Ri$ . В сдвиговом течении вертикальное волновое число пространственного возмущения зависит от времени. Эта зависимость приводит к вращению волнового вектора в вертикальной плоскости и прохождению его через сектор симметричной неустойчивости. Находясь внутри этого сектора, возмущение экспоненциально растет, вне его – осциллирует. Как и ранее, подобное поведение описывается уравнением, содержащим точки поворота (в данной задаче – для амплитуды тороидального потенциала скорости). Поскольку значения точек поворота определяются значениями волновых чисел, при суперпозиции возмущений с различными волновыми числами происходит чередование экспоненциальных стадий (вспышек) со стадиями гладкого осциллирующего поведения. Эта динамика может иметь прямое отношение к наблюдаемым внезапным вспышкам турбулентности в стратифицированных сдвиговых течениях.

В параграфе 5.4 изучен новый линейный механизм генерации поверхностных гравитационных волн. В отличие от традиционных ветровых механизмов, он не требует энергообмена между ветром и волнами и связан с наличием в слое жидкости со свободной поверхностью течения с постоянным горизонтальным сдвигом скорости. Показано, что в присутствии свободной поверхности такое течение гидродинамически неустойчиво, причем неустойчивость носит алгебраический характер. Развитие неустойчивости приводит к образованию на поверхности жидкости гравитационных волн, амплитуда которых нарастает по степенному закону.

Теоретическое исследование неустойчивости выполнено в рамках линеаризованной системы уравнений гидродинамики для однородной жидкости с соответствующими кинематическим и динамическим граничными условиями на свободной поверхности  $z = 0$  и условием непротекания на дне  $z = -H$ . С использованием немодального подхода описана динамика волновых и вихревых возмущений. Установлено, что на глубокой воде ( $H = \infty$ ) энергия волновых возмущений нарастает по корневому закону, а энергия вихревых возмущений с течением времени затухает. Показано, что неограниченный рост энергии волновых возмущений следует также из основных уравнений лучевой теории волн (геометрической оптики) – уравнения сохранения волнового действия и уравнения, описывающего эволюцию волнового числа. Наряду с волнами на глубокой воде исследованы также волны в слое жидкости конечной глубины. Показано, что в присутствии горизонтального сдвига волновые возмущения с течением времени концентрируются у свободной поверхности и практически не испытывают влияния дна. Таким образом, на больших временах динамика возмущений удовлетворительно описывается моделью бесконечно глубокой воды.

#### **Глава 6. Моделирование волновых и вихревых движений жидкости в параболоиде вращения.**

При вращении параболоида с жидкостью вокруг вертикальной оси, жидкость распределяется по его поверхности слоем мелкой воды практически постоянной толщины. Движения в этом тонком слое имеют важные общие черты с атмосферными и океаническими течениями. Сосуды с параболическим дном использовались в лабораторном моделировании вихревых солитонов Россби и спиральных галактик, сдвиговой неустойчивости вихревых течений (Незлин, Снежкин (1990), Stegner, Zeitlin (1998)). В наших экспериментах основное внимание уделено моделированию процесса геострофического приспособления, свободных (сейшевых) колебаний жидкости, изучению структуры и устойчивости создаваемых в параболоиде геострофических течений.



Представленные в главе экспериментальные результаты получены при участии автора на специальной установке Абастуманской астрофизической обсерватории – параболоиде вращения с максимальным диаметром  $d = 120$  см и профилем дна  $z = \kappa r^2 / 2$ , где радиус кривизны параболоида в полюсе  $R = 1/\kappa = 0.698$  м.

**Параграф 6.1** посвящен экспериментальному изучению свободных (сейшевых) колебаний жидкости в невращающемся параболоиде. Линейная теория этих колебаний дана Ламбом (1947); нелинейные колебания теоретически изучались в ряде работ (Miles, Vall (1963), Свиркунов (1996) и др.). В упомянутых работах построены примеры точных осесимметричных решений уравнений мелкой воды, описывающих нелинейный аналог первой низкочастотной моды колебаний. Вытекающая из этих решений замечательная особенность состоит в том, что период  $T$  колебаний не зависит от амплитуды и определяется только кривизной параболоида:  $T = \pi / \sqrt{g\kappa}$ . Нелинейные осесимметричные колебания мелкой воды в параболоиде вращения, таким образом, обладают свойством изохронности и являются простейшей моделью точных водяных часов, подобных изохронным часам Гюйгенса.

Для проверки этого факта была проведена серия экспериментов. В этих экспериментах свободные колебания возбуждались импульсным (кратковременным) погружением в жидкость в центральной части параболоида осесимметричных тел вращения. Колебания регистрировались специальными датчиками, измеряющими уровень жидкости и расположенными по радиусу сосуда. Анализ частотных спектров, полученных при различных полных глубинах жидкости, различных способах возбуждения колебаний подтвердил независимость периода колебаний от амплитуды.

Наряду с колебаниями в параболоиде, теоретически исследованы нелинейные колебания жидкости в неограниченном параболическом канале. Показано, что для этих колебаний свойство изохронности отсутствует, найдены амплитудные поправки к периоду в приближении слабой нелинейности.

В **параграфе 6.2** теоретически и экспериментально изучены свободные колебания и процесс геострофического приспособления во вращающемся параболоиде. Теоретическое исследование выполнено в рамках системы уравнений мелкой воды (1.1) с учетом центробежной силы, играющей важную роль в лабораторных условиях. Эта сила не учитывалась в предшествующих работах, в частности, в основополагающем исследовании Пуанкаре (1910).

Для частот  $\omega$  линейных осесимметричных мод свободных колебаний в работе получено выражение

$$\omega_n^2 = 2n(n+1)\Omega_*^2 - (2n(n+1) - 4)\Omega^2, \quad (6.1)$$

где  $\Omega$  - угловая скорость вращения параболоида,  $\Omega_* = \sqrt{g\kappa}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Согласно (6.1), частота основной первой моды ( $n = 1$ ) не зависит от  $\Omega$  и определяется только параметрами параболоида:  $\omega_1 = 2\Omega_* = 2\sqrt{g\kappa}$ . Из (6.1) также следует, что при  $\Omega \rightarrow \Omega_*$  частоты высших мод ( $n \geq 2$ ) приближаются к частоте основной моды, т.е. исчезает эффект "расщепления" частот. Эти особенности были подтверждены проведенными экспериментами.

Наряду с генерацией волновых мод, во вращающемся параболоиде возбуждается также вихревая геострофическая мода, т. е. происходит процесс геострофического приспособления. В рамках линейного приближения в работе детально изучена структура стационарной вихревой моды для различных начальных распределений глубины жидкости. Построено точное решение нелинейных уравнений мелкой воды, описывающее сформировавшийся в процессе приспособления твердотельно вращающийся вихрь, осциллирующий с частотой первой линейной моды колебаний. Показано, что в этом решении можно выделить стационарный геострофический компонент путем осреднения по периоду колебаний.

В выполненных экспериментах волновая и вихревая моды возбуждались путем извлечения из центральной части параболоида предварительно погруженной полусферы. При таком способе возбуждения регистрировались несколько первых мод колебаний и наблюдался ярко выраженный циклонический вихрь с характерным временем жизни порядка нескольких десятков оборотов системы (время затухания за счет придонного трения). Для визуализации вихря на поверхность жидкости наносились мелкие частицы (трассеры), и производилась видео- и цифровая фотосъемка поверхности вращающейся камерой. По длинам характерных треков частиц в экспериментах рассчитывались радиальные профили тангенциальной скорости жидкости в вихре. Одна из типичных фотографий, полученная в эксперименте представлена на рис. 6 (слева). На правом рисунке представлено прямое сравнение экспериментальных профилей скорости для двух глубин погружения полусферы (штриховые линии) с теоретическими (сплошные), рассчитанными в рамках линейной теории адаптации.

Выполненные эксперименты подтверждают классический сценарий теории геострофического приспособления (возбуждение волновой и вихревой мод). Вопрос об адекватности этого сценария условиям экспериментов до настоящего времени обсуждается в литературе.

В параграфе 6.3 теоретически и экспериментально исследован процесс формирования азимутальных геострофических течений, создаваемых во вращающемся параболоиде системой источник-сток массы. Эта система состоит из двух concentрических кольцевых пазов на дне параболоида, через которые с заданным расходом и в заданном направлении прокачивается жидкость. Возникающий между concentрическими источником и стоком массы радиальный поток, в поле силы Кориолиса трансформируется в азимутальное (зональное) течение.

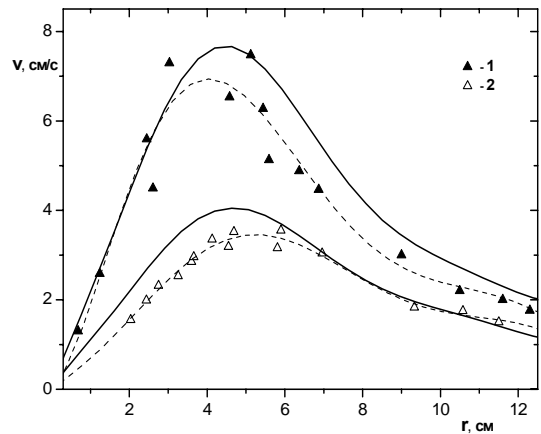
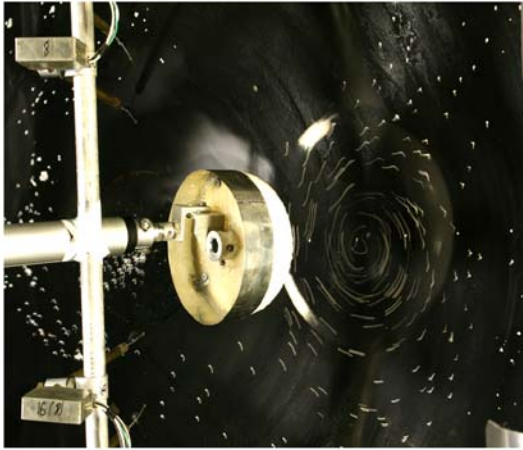


Рис. 6.

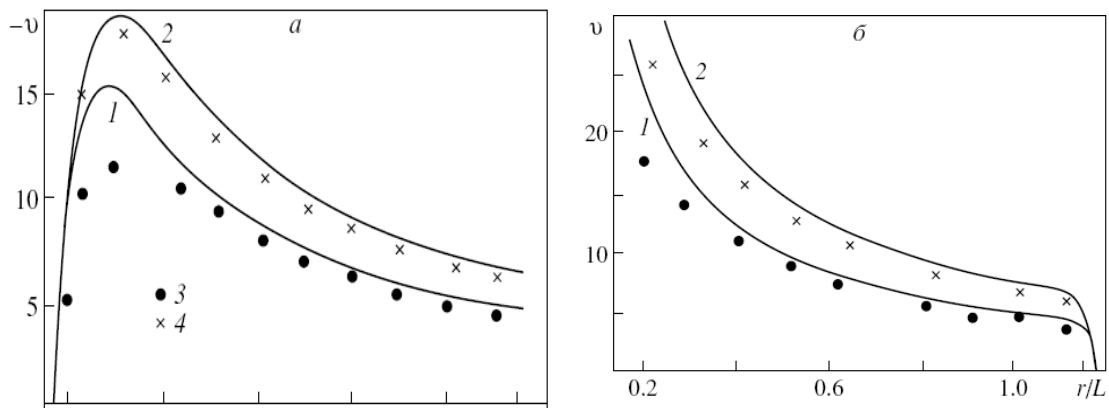


Рис. 7.

В рамках модели мелкой воды с учетом придонного экмановского трения, структура стационарных азимутальных течений исследована Даниловым, Сазоновым (1999). В работе построены аналитические решения, описывающие процесс установления этих течений. Исследована зависимость времени установления от безразмерных параметров задачи – чисел Россби и Фруда. Показано, что при малых значениях числа Фруда, когда можно пренебречь деформацией свободной поверхности, течения устанавливаются на характерном экмановском временном масштабе. Если число Фруда не мало, время установления превышает экмановский масштаб и при малых числах Россби практически линейно зависит от глуби-

ны жидкости. В выполненных экспериментах обнаружено хорошее согласие с теоретическими результатами. В качестве примера на рис. 7 представлено сравнение теоретических профилей скорости стационарных течений (сплошные линии) с экспериментальными данными, полученными при различных расходах и различной полярности системы источник-сток ( $a$  – источник в центре,  $b$  – на периферии).

В заключительном **параграфе 6.4** главы теоретически и экспериментально изучен механизм топографической неустойчивости вращающихся течений, связанный с неоднородностью распределения глубины жидкости. Топографическая неустойчивость обнаружена в экспериментах по изучению структуры течений, создаваемых системой источник-сток массы. В этих экспериментах устойчивые при постоянной средней глубине жидкости течения теряют устойчивость при наличии градиента средней глубины (градиент глубины создавался изменением угловой скорости вращения параболоида). Возникновение неустойчивости приводит к потере осевой симметрии течения и появлению автоколебаний с периодом на порядок превышающим период вращения системы. При заданной угловой скорости вращения неустойчивость наблюдается лишь в определенном диапазоне интенсивности системы источник-сток.

В работе получено строгое доказательство существования топографической неустойчивости на основе решений спектральных задач теории устойчивости для некоторых модельных течений жидкости во вращающихся каналах. В частности, показано, что устойчивые в каналах с постоянной глубиной течения с линейным и квадратичным профилями скорости теряют устойчивость в каналах переменной глубины.

В **Заключении** перечисляются основные научные результаты и защищаемые положения работы. Последние соответствуют одной из формулировок, принятых в Положении о порядке присуждения ученых степеней: "автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное научное достижение".

#### **Список основных публикаций по теме диссертации**

1. Калашник М.В., Шмерлин Б.Я. Спонтанный рост возмущений типа урагана в модели влажной конвекции // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. - 1990. - Т. 26, № 8. - С. 787-793.
2. Калашник М.В., Шмерлин Б.Я. О конвективной неустойчивости влажного насыщенного слоя // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. - 1990. - Т. 26, № 10. – С. 1034-1044.

3. Калашник М.В. О поле скорости конвективной ячейки // Докл. РАН. - 1993. - Т. 330, № 4. - С. 448-452.
4. Калашник М.В. О максимальной скорости ветра в тропическом циклоне // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. - 1994. - Т. 30, № 1. - С. 26-30.
5. Калашник М.В., Свиркунов П.Н. О перераспределении энергии при геострофической адаптации и экстремальности энергии геострофических состояний // Метеорология и гидрология. - 1995. - № 9. - С. 62-67.
6. Калашник М.В., Свиркунов П.Н. О состояниях циклострофического и геострофического баланса // Докл. РАН. - 1995. - Т. 344, № 2. - С. 233-236.
7. Свиркунов П.Н., Калашник М.В. Эволюция вихря, вызванная стоком массы в теории мелкой воды // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. - 1995. - Т. 31, № 5. - С. 725-730.
8. Калашник М.В., Свиркунов П.Н. О симметричной устойчивости состояний циклострофического и геострофического баланса в стратифицированной среде // Докл. РАН. - 1996. - Т. 348, № 6. - С. 811-813.
9. Калашник М.В., Свиркунов П.Н. О состояниях циклострофического и геострофического баланса в модели мелкой воды // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. - 1996. - Т. 32, № 3. - С. 402-409.
10. Калашник М.В. Формирование фронтов и струйных течений при геострофическом приспособлении в стратифицированной вращающейся жидкости // Докл. РАН. 1997. - Т.357, №2. - С. 247-251.
11. Калашник М.В. Замечание о законах сохранения и распространении волн // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. - 1998. - Т.34, №3. - С. 441-444.
12. Калашник М.В. Образование фронтальных зон при геострофическом приспособлении в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. - 1998.- Т.34, №6. - С. 785-792.
13. Калашник М.В., Свиркунов П.Н. Об определении состояний циклострофического (геострофического) баланса и их устойчивости // Метеорология и гидрология .- 1998.- №4.- С.58-72.
14. Ингель Л.Х., Калашник М.В., Перестенко О.В., Свиркунов П.Н. Шмерлин Б.Я. О некоторых малоизученных механизмах гидродинамической неустойчивости в атмосфере Вопросы физики атмосферы: Сборник статей. С.-Пб. Гидрометеиздат, 1998. - С.247-272.

15. Калашник М.В. Геострофическое приспособление и фронтогенез в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. - 2000. - Т.36, №3. – С. 386-395.
16. Калашник М.В. К теории гидростатической адаптации // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. - 2000. - Т. 36, № 2. - С.521-527.
17. Калашник М.В. Критерии симметричной и несимметричной устойчивости геострофических и градиентных течений в стратифицированной вращающейся жидкости // Докл. РАН. - 2000. - Т. 371, № 3. - С. 383-386.
18. Калашник М.В. К теории симметричной и несимметричной устойчивости зональных геострофических течений // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. - 2001. - Т. 37, № 3. – С. 418-421.
19. Калашник М.В. Гидродинамические модели формирования атмосферных и океанических фронтов // "Фундаментальные исследования взаимодействия суши, океана и атмосферы". Материалы Юбилейной Всероссийской научн. конф. Москва, МГУ, октябрь-ноябрь 2002 г. М.: МАКС Пресс, 2002. - С. 75-76.
20. Калашник М.В. Поверхности разрыва в теории несбалансированного фронтогенеза // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. - 2002. - Т.38, №1. - С. 154-157.
21. Калашник М.В, Мамацашвили Г.Р., Чагелишвили Г.Д., Ломинадзе Д.Г. Динамика несимметричных возмущений в геострофическом потоке с постоянным горизонтальным сдвигом // Докл. РАН. - 2004. - Т.399, №5. - С. 687-692.
22. Калашник М.В. Аналитические решения в теории деформационного фронтогенеза // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. - 2004. - Т. 40, № 2. - С. 179-189.
23. Калашник М.В. Теория несбалансированного фронтогенеза. Сборник тезисов Всероссийской научной конференции "С.П.Хромов и синоптическая метеорология". Москва, МГУ, октябрь 2004 г. М.: МАКС Пресс, 2004. - С.40.
24. Калашник М.В. Формирование вихревой воронки стоком массы в модели мелкой воды // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. - 2004. - №2. - С.120-132.
25. Калашник М.В. Энергетика линейного и нелинейного геострофического приспособления // Океанология. - 2004. - Т. 44, № 1.- С. 11-19.
26. Калашник М.В., Кахиани В.О., Ломинадзе Дж.Г., Патарашвили К.И., Свиркунов П.Н., Цакадзе С.Д. Нелинейные изохронные колебания жидкости в параболоиде. Теория и эксперимент // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2004. - №5. - С. 131-142.
27. Калашник М.В., Кахиани В.О., Ломинадзе Дж.Г., Патарашвили К.И., Свиркунов П.Н., Цакадзе С.Д. Теоретическое и экспериментальное исследование свободных колеба-

- ний жидкости в параболических сосудах. Четвертая всероссийская научная конференция "Физические проблемы экологии (Экологическая физика)". Москва, МГУ, июнь 2004. М.: МГУ, 2004. - С.55-56.
28. Калашник М.В., Шмерлин Б.Я. Конвективная неустойчивость влажного насыщенного слоя атмосферы // Международная конференция МСС-04 "Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность". Москва 23-25 ноября 2004 г. Сборник трудов. – М.: РОХОС, 2004. - С. 273-278.
  29. Kalashnik M.V. Geostrophic adjustment and frontogenesis in the continuously stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. - 2004. - Vol. 38, N 1. - P. 1-37.
  30. Калашник М.В., Ломинадзе Д.Г., Чагелишвили Г.Д. Линейная динамика возмущений в течениях с постоянным горизонтальным сдвигом // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. - 2005. - №6. - С. 25-37.
  31. Калашник М.В. Условия симметричной и несимметричной устойчивости геострофических течений в сжимаемой атмосфере // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. - 2005. - Т. 41, № 2. - С. 29-34.
  32. Калашник М.В., Ингель Л.Х. Геострофическое приспособление и фронтогенез в стратифицированных двухкомпонентных средах // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. - 2006. - Т. 42, № 4. - С. 554-565.
  33. Калашник М.В., Ингель Л.Х. Гидродинамическая "память" бинарных смесей // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. - 2006. - Т. 130, № 1. - С. 161-170.
  34. Калашник М.В., Ингель Л.Х. Механизм формирования температурных неоднородностей в стратифицированном по температуре и солёности океане // *Докл. РАН*. - 2006. - Т. 407, № 5. - С. 673-678.
  35. Жвания М.А., Калашник М.В., Кахиани В.О., Нанобашвили Дж.И., Патарашвили К.И., Цакадзе С.Дж. Формирование азимутальных течений, создаваемых системой источник-сток массы во вращающемся параболоиде // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. - 2006. - № 2. - С. 60-74.
  36. Kalashnik M.V., Mamatsashvili G. R., Chagelishvili G. D., Lominadze J. G. Linear dynamics of non-symmetric perturbations in geostrophic flows with a constant horizontal shear // *Quart. Journ. Roy. Met. Soc.* - 2006. - Vol. 132, N 615. - P. 505-518.
  37. Patarashvili K.I., Tsakadze Z.J., Kalashnik M.V., Kakhiani V.O., Chanishvili R.J., Nanobashvili J.I., Zhvania R.A. Topographic instability of flow in a rotating fluid // *Nonlinear Proc. Geophys.* - 2006. - Vol. 13. - P. 231-235.

38. Калашник М.В. К теории устойчивости вращающихся сдвиговых течений // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. - 2007. - № 3. - С. 47 – 60.
39. Калашник М.В., Ломинадзе Д.Г., Чагелишвили Г.Д., Чанишвили Р.Г. Гидродинамическая неустойчивость вращающихся сдвиговых течений. Потoki и структуры в жидкостях: Международная конференция. Санкт-Петербург, 2-5 июля 2007. Тезисы докладов. М.: ИПМ РАН, 2007. - С. 238 – 239.
40. Ингель Л.Х., Калашник М.В. Геострофическая адаптация линейных возмущений в двухкомпонентных средах // Океанология. - 2007. - Т. 47, № 5. – С. 657 – 665.
41. Калашник М.В. Линейный механизм генерации поверхностных гравитационных волн в течении с горизонтальным сдвигом // Журнал экспериментальной и теоретической физики. - 2008. - Т. 133, № 1. С. 171-182.
42. Калашник М.В., Вишератин К.Н. Циклострофическое приспособление в закрученных газовых потоках и вихревой эффект Ранка // Журнал экспериментальной и теоретической физики. - 2008. - Т. 133, № 4. С. 935-947.