Литература

1. *Самолюбов Б.И., Силаева Л.В* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. № 5. С. 63 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 5. P. 58).
2. *Самолюбов Б.И.* Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1996.
3. *Баренблатт Г.И., Голицын Г.С.* Локальная структура развитых пыльных бурь. М., 1973. С. 11–18
4. *Поборчая Л.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1972. № 4. С. 25 (Moscow University Phys. Bull. 1972. No. 4).
5. *Chikita K.A.* // Japan. J. Limnol. 1991. **52**, No. 1. P. 27.
6. *Chikita K.A.* // Intern. Hydrology and Water Resources Symposium. Perth, 1991. P. 268.
7. *Chikita K.A.* // Geoph. Bull. Hokkaido Univ. 1987. No. 49. P. 291.
8. *Chikita K.A.* // J. Faculty of Sci. Hokkaido Univ. 1980. **6**, No. 2, P. 255.
9. *Монин А.С.* Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л., 1988.
10. *Trowbridge J.H., Kineke G.C.* // J. Geophys. Res. 1994. **99**, No. C1. P. 865.

Поступила в редакцию
09.06.97

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.9

ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СЛУЧАЯХ ЗАДАЧИ ЛИУВИЛЛЯ

Ю. В. Баркин

(ГАИШ)

Изучаются интегрируемые случаи задачи Лиувилля, для которых решение сведено к квадратурам. Используются классические уравнения Лиувилля и сравнительно новая форма уравнений вращательного движения изменяемого тела в переменных Андуайе.

1. Задача Лиувилля

Этой задачей назовем классическую задачу о вращательном движении изолированного деформируемого тела в предположении, что изменение его динамического строения задано во времени. В частности, оно может представлять собой твердое тело с изменяемой во времени внешней оболочкой.

Пусть $Cxyz$ и $C\xi\eta\zeta$ — две декартовы системы координат с началом в центре масс тела. Оси координат системы $Cxyz$ сохраняют фиксированные направления в пространстве. Оси $C\xi$, $C\eta$ и $C\zeta$ направлены по главным центральным осям инерции тела. Главные центральные моменты инерции тела, соответствующие этим осям, обозначим A, B и C. Вектор кинетического момента относительного движения частиц тела в системе координат $C\xi\eta\zeta$ обозначим $G^r = (P, Q, R)$, где P, Q и R — проекции этого вектора на подвижные оси $C\xi$, $C\eta$ и $C\zeta$ соответственно.

Введем вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения осей тела в системе $C\xi\eta\zeta$ по отношению к системе координат $Cxyz$, а его проекции на оси координат $C\xi$, $C\eta$ и $C\zeta$ обозначим p, q и r. Аналогично введем вектор кинетического момента вращательного движения тела $\mathbf{G}$ и его проекции на подвижные оси λ, μ и ν.

Дифференциальные уравнения задачи получаются из общих уравнений Лиувилля [1, 2] в предположении, что момент сил, действующих на тело, равен нулю:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(Ap+P)+qR-rQ-(B-C)qr=0,\\
&\frac{d}{dt}(Bq+Q)+rP-pR-(C-A)pr=0,\\
&\frac{d}{dt}(Cr+R)+pQ-qP-(A-B)pq=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Задача заключается в интегрировании этих уравнений при произвольных начальных условиях: $t=t_0$, $p=p_0$, $q=q_0$, $r=r_0$ в предположении, что все характеристики A, B, C и P, Q, R являются известными функциями времени. Через A_0, B_0, C_0 и P_0, Q_0, R_0 обозначим начальные значения указанных функций.

Известен один первый интеграл уравнений (1):

$$(Ap+P)^2+(Bq+Q)^2+(Cr+R)^2=G^2=\mathrm{const},\tag{2}$$

выражающий условие постоянства модуля вектора $\mathbf{G}$.

Если в качестве новых переменных принять составляющие вектора $\mathbf{G}$ в системе координат $C\xi\eta\zeta$:

$$\lambda=Ap+P,\quad \mu=Bq+Q,\quad \nu=Cr+R,\tag{3}$$

то уравнения вращательного движения (1) и интеграл (2) примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\lambda}{dt}+\frac{R}{C}\mu-\frac{Q}{B}\nu+\frac{(C-B)}{BC}\mu\nu=0,\\
&\frac{d\mu}{dt}+\frac{P}{A}\nu-\frac{R}{C}\lambda+\frac{(A-C)}{AC}\nu\lambda=0,\\
&\frac{d\nu}{dt}+\frac{Q}{B}\lambda-\frac{P}{A}\mu+\frac{(B-A)}{BA}\lambda\mu=0,\\
&\lambda^2+\mu^2+\nu^2=G^2.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Для анализа задачи Лиувилля также привлечем уравнения вращательного движения деформируемого тела в переменных Андуайе. Эти уравнения были получены автором в 1979 г. и получили ряд приложений в задаче о движении системы гравитирующих деформируемых тел [3], в задаче о вращении Земли [4] и др.

Пусть

$$G,\ \theta,\ \rho,\ l,\ g,\ h \tag{5}$$

— переменные Андуайе, где G — величина вектора кинетического момента $\mathbf{G}$, ρ и h — наклонность и долгота восходящего узла промежуточной плоскости P_G, ортогональной вектору $\mathbf{G}$ и проходящей через центр масс тела; g, θ и l — углы Эйлера (прецессии, нутации и собственного вращения), определяющие ориентацию осей координат тела в промежуточной системе координат $CG_1G_2G_3$, связанной с вектором $\mathbf{G}$ и плоскостью P_G (ось CG_1 направлена вдоль линии пересечения плоскости P_G с основной координатной плоскостью Cxy в сторону восходящего узла этой плоскости; ось CG_3 направлена вдоль вектора $\mathbf{G}$, а ось CG_2 дополняет систему до правой).

Уравнения задачи Лиувилля в переменных Андуайе (5) принимают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dG}{dt}=0,\qquad \frac{d\rho}{dt}=0,\qquad \frac{dh}{dt}=0,\\
&\frac{d\theta}{dt}=G\sin\theta\sin l\cos l\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)+\frac{Q}{B}\sin l-\frac{P}{A}\cos l,\\
&\frac{dl}{dt}=G\cos\theta\left(\frac{1}{C}-\frac{\sin^2 l}{A}-\frac{\cos^2 l}{B}\right)+\\
&\qquad\qquad +\operatorname{ctg}\theta\left(\frac{Q}{B}\cos l+\frac{P}{A}\sin l\right)-\frac{R}{C},\\
&\frac{dg}{dt}=G\left(\frac{\sin^2 l}{A}+\frac{\cos^2 l}{B}\right)-\frac{Q}{B}\cos l-\frac{P}{A}\sin l.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Из первых уравнений системы (6) следуют три первых интеграла:

$$G=G_0,\quad \rho=\rho_0,\quad h=h_0, \tag{7}$$

где G_0, ρ_0, h_0 — начальные значения соответствующих переменных Андуайе. Интегралы (7) выражают факт постоянства вектора углового момента тела $\mathbf{G}$.

2. Интегрируемые случаи

1°. Наиболее просто задача Лиувилля решается для осесимметричного тела, когда вектор его кинетического момента относительного движения частиц тела $\mathbf{G}^r$ направлен вдоль оси симметрии $C\zeta$. Это решение хорошо известно и обсуждается, например, в работах [5–7].

Действительно, задача легко интегрируется в следующих трех случаях:

$$
\begin{aligned}
&\text{1а)}\ \ P=Q=0,\ R=R(t);\quad A(t)=B(t)\neq C(t),\\
&\text{1б)}\ \ Q=R=0,\ P=P(t);\quad B(t)=C(t)\neq A(t),\\
&\text{1в)}\ \ R=P=0,\ Q=Q(t);\quad C(t)=A(t)\neq B(t).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Условия (1б), (1в), очевидно, получаются из (1а) в результате циклического переобозначения соответствующих характеристик задачи.

В случае (1а) уравнения вращения тела (1) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(Ap)+qR+(C-A)qr=0,\\
&\frac{d}{dt}(Aq)-pR-(C-A)pr=0,\\
&\frac{d}{dt}(Cr+R)=0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Уравнения (9) имеют дополнительный интеграл

$$Cr+R=\nu_0=\mathrm{const}$$

и легко интегрируются:

$$
\begin{aligned}
&p=\frac{A}{A_0(t)}\sqrt{p_0^2+q_0^2}\sin(\tau-\tau_0),\\
&q=\frac{A}{A_0(t)}\sqrt{p_0^2+q_0^2}\cos(\tau-\tau_0),\\
&r=\frac{C_0r_0+R_0-R(t)}{C(t)},\\
&\tau-\tau_0=\int\limits_0^t\frac{(C(t)-A(t))(C_0r_0+R_0-R(t))}{A(t)C(t)}dt.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь p_0, q_0, r_0 и A_0, B_0, C_0 — начальные значения (при $t=t_0$) переменных и динамических характеристик тела; τ играет роль новой независимой переменной.

Решение задачи (1а) легко получить на основе уравнений движения в переменных Андуайе (6), которые здесь принимают тривиальный вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{dt}=0,\quad \frac{dl}{dt}=G\cos\theta\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)-\frac{R}{C},\\
&\frac{dg}{dt}=\frac{G}{A}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Решение уравнений (11) задается формулами

$$\theta = \theta_0,$$

$$l = G_0 \cos\theta_0 \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{C(t)} - \frac{1}{A(t)}\right) dt - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{R(t)}{C(t)} dt + l_0,$$

$$g = G_0 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{A(t)} + g_0, \tag{12}$$

где l_0, g_0 и θ_0 — начальные значения угловых переменных Андуайе.

В решении (10), (12) ось тела $C\zeta$ описывает круговой конус вокруг вектора $\mathbf{G}$ кинетического момента, фиксированного в пространстве. Однако в отличие от движения твердого тела это движение по коническской поверхности неравномерно, так же как и собственное вращение тела вокруг оси $C\zeta$.

2°. Задача Лиувилля также сводится к квадратурам в следующих трех случаях:

2а) $Q = 0$, $A = Bf_a(P)$, $B = B(t)$, $C = Bg_a(P)$, $R = h_a(P)$, $P = P(t)$,

$$f_a(P) = \frac{C_0 P(A_0 - B_0) + B_0 P_0}{B_0 P(A_0 - C_0) + C_0 P_0},$$

$$g_a(P) = \frac{B_0 P_0 + P(A_0 - B_0)}{B_0 P_0},$$

$$h_a(P) = \frac{P R_0 A_0}{P(A_0 - C_0) + P_0 C_0};$$

2б) $R = 0$, $B = Cf_b(Q)$, $C = C(t)$, $A = Cg_b(Q)$, $P = h_b(Q)$, $Q = Q(t)$,

$$f_b(Q) = \frac{A_0 Q(B_0 - C_0) + C_0 Q_0}{C_0 Q(B_0 - A_0) + A_0 Q_0},$$

$$g_b(Q) = \frac{C_0 Q_0 + Q(B_0 - C_0)}{C_0 Q_0},$$

$$h_b(Q) = \frac{Q C_0 B_0}{Q(B_0 - A_0) + Q_0 A_0};$$

2в) $P = 0$, $C = Af_c(R)$, $A = A(t)$, $B = Ag_c(R)$, $Q = h_c(R)$, $R = R(t)$,

$$f_c(R) = \frac{B_0 R(C_0 - A_0) + A_0 R_0}{A_0 R(C_0 - B_0) + B_0 R_0},$$

$$g_c(R) = \frac{A_0 R_0 + R(C_0 - A_0)}{A_0 R_0},$$

$$h_c(R) = \frac{R A_0 C_0}{R(C_0 - B_0) + R_0 B_0}.$$

Условия (2а)–(2в) получаются одно из другого в результате циклической перестановки соответствующих параметров.

Интегрирование задачи (2а) осуществим на основе уравнений (4). При $Q = 0$ из первого и третьего уравнений этой системы следует дифференциальное соотношение

$$\varkappa^2 \frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{\nu^* + \nu}{\lambda^* + \lambda},$$

где

$$\varkappa^2 = \frac{C(B - A)}{A(C - B)}, \quad \nu^* = \frac{BR}{C - B}, \quad \lambda^* = \frac{PB}{A - B}. \tag{13}$$

Предположим теперь, что величины (13) сохраняют постоянные значения, т.е.

$$\begin{gathered} \varkappa^2 = \frac{C_0(B_0 - A_0)}{A_0(C_0 - B_0)}, \\ \nu^* = \frac{B_0 R_0}{C_0 - B_0}, \quad \lambda^* = \frac{P_0 B_0}{A_0 - B_0}, \end{gathered} \tag{14}$$

тогда задача имеет первый интеграл

$$\varkappa^2(\lambda^* + \lambda)^2 = (\nu^* + \nu)^2 + L^2, \tag{15}$$

где постоянная интегрирования

$$L^2 = \varkappa^2(\lambda^* + \lambda_0)^2 - (\nu^* + \nu_0)^2. \tag{16}$$

Интеграл (15) позволяет завершить интегрирование и представить общее решение задачи в следующей форме:

$$\lambda(\nu) = \varkappa^{-1}\left\{-\lambda^* \pm \sqrt{L^2 - (\nu^* + \nu)^2}\right\},$$

$$\mu(\nu) = \pm\sqrt{G^2 - \nu^2 - \frac{1}{\varkappa^2}\left(-\lambda^* \pm \sqrt{L^2 - (\nu^* + \nu)^2}\right)^2},$$

$$\int\limits_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{(\lambda^* + \lambda(\nu))\mu(\nu)} = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{B(t) - A(t)}{A(t)B(t)} dt. \tag{17}$$

В решении (17) произвольными функциями времени являются один из осевых моментов инерции ($B(t)$) и одна из компонент вектора кинетического момента относительного движения частиц тела $\mathbf{G}^{(r)}$ ($P(t)$). В случаях (2а)–(2в) тело не является осесимметричным, а его вектор $\mathbf{G}^r$ не совпадает с осью $C\zeta$ тела.

3°. Решение задачи Лиувилля легко сводится к решению задачи Эйлера–Пуансо в следующих трех случаях, когда при $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$:

$$\begin{aligned} &\text{3а)} \quad \frac{C - B}{B - A} \cdot \frac{A}{C} = \frac{C_0 - B_0}{B_0 - A_0} \cdot \frac{A_0}{C_0}, \\ &\text{3б)} \quad \frac{A - C}{C - B} \cdot \frac{B}{A} = \frac{A_0 - C_0}{C_0 - B_0} \cdot \frac{B_0}{A_0}, \\ &\text{3в)} \quad \frac{B - A}{A - C} \cdot \frac{C}{B} = \frac{B_0 - A_0}{A_0 - C_0} \cdot \frac{C_0}{B_0}. \end{aligned} \tag{18}$$

Эти условия следуют из более общих условий (2а)–(2в), если кинетический момент $\mathbf{G}^r = 0$.

Например, в случае (3а) первые интегралы задачи принимают вид

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = G^2, \quad \varkappa^2\lambda^2 - \nu^2 = L^2, \tag{19}$$

и решение задачи сводится к обращению квадратуры

$$\int\limits_{\nu_0}^{\nu} \frac{\varkappa^2 d\nu}{\sqrt{(L^2+\nu^2)[\varkappa^2 G^2 - L^2 - (1+\varkappa^2)\nu^2]}} = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{A(t)-C(t)}{A(t)C(t)} dt. \tag{20}$$

В решениях (18)–(20) накладывается лишь одно ограничение на осевые моменты инерции, т.е. два из трех осевых моментов инерции тела являются произвольными функциями времени.

Аналогичные результаты получаются на основе уравнений движения (6). В случае (3а) они принимают вид уравнений задачи Эйлера–Пуансо, однако здесь A, B, C являются функциями времени:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= G\sin\theta\sin l\cos l\left(\frac{1}{A(t)} - \frac{1}{B(t)}\right), \\ \frac{dl}{dt} &= G\cos\theta\left(\frac{1}{C(t)} - \frac{\cos^2 l}{B(t)} - \frac{\sin^2 l}{A(t)}\right), \\ \frac{dg}{dt} &= G\left(\frac{\sin^2 l}{A(t)} + \frac{\cos^2 l}{B(t)}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $G = G_0 = \mathrm{const}$ и решение уравнений (21) представляется формулами

$$\begin{aligned} &\sin^2\theta(1+\varkappa^2\sin^2 l) = C_1 = \mathrm{const}, \\ &\tau - \tau_0 = \int\limits_{l_0}^{l} \frac{dl}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varkappa^2} - C_1 + \sin^2 l\right)\left(\frac{1}{\varkappa^2} + \sin^2 l\right)}}, \\ &g - g_0 = G\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{B(t)}{A(t)-B(t)} d\tau + G\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \cos^2 l\, d\tau, \end{aligned} \tag{22}$$

где новая независимая переменная

$$\tau = \int \left(\frac{1}{B(t)} - \frac{1}{A(t)}\right) dt. \tag{23}$$

Вместо постоянной интегрирования целесообразно ввести в рассмотрение величину

$$\lambda^2 = \frac{C_1\varkappa^2}{1+\varkappa^2 - C_1},$$

т.е. положить $C_1 = \dfrac{\lambda^2(1+\varkappa^2)}{\varkappa^2+\lambda^2}$.

В работе [8] решение задачи Эйлера–Пуансо было представлено рядами Фурье в канонических переменных Андуайе. Если воспользоваться этими результатами, то решение рассматриваемой задачи можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &L = G\cos\theta = G\frac{\pi\varkappa}{K\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m\varphi)}{\mathrm{ch}(2md)}(1+\delta_{m_0})^{-1}, \\ &\delta_{m_0} = \begin{cases} 1 \text{ при } m = 0, \\ 0 \text{ при } m \neq 0, \end{cases} \\ &l = \varphi + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}(m\sigma)}{m\,\mathrm{ch}(2md)}\sin(2m\varphi), \\ &g = \psi + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}(m\sigma)}{m\,\mathrm{sh}(2md)}\sin(2m\varphi), \end{aligned} \tag{24}$$

где φ, ψ — два новых аргумента, являющихся известными функциями времени:

$$\begin{aligned} &\varphi = \frac{G}{2}\frac{\pi}{\varkappa}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa^2+\lambda^2}}\frac{1}{K(\lambda)}\tau, \\ &\psi = G\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{B(t)}{A(t)-B(t)}d\tau - \frac{G\pi}{\varkappa}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa^2+\lambda^2}}\frac{\Pi(\varkappa^2,\lambda)}{K(\lambda)}\tau. \end{aligned} \tag{25}$$

В формулах (24), (25) K и Π — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода; $\mathrm{ch}\,u$, $\mathrm{sh}\,u$ — гиперболические функции, аргументы которых определяются с помощью формул

$$d = \frac{\pi K'}{2K}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2K}F\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\varkappa}{\lambda}, \sqrt{1-\lambda^2}\right),$$

где $K' = K\left(\sqrt{1-\lambda^2}\right)$, F — неполный эллиптический интеграл первого рода.

4°. О других интегрируемых случаях. Некоторые случаи интегрируемости задачи Лиувилля удобно проиллюстрировать на основе канонических уравнений в переменных Андуайе. Гамильтониан этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2}\Bigg[L^2\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right) &+ \\ +G^2\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)\Bigg] &- \\ -\frac{P}{A}\sqrt{G^2-L^2}\sin l - \frac{Q}{B}\sqrt{G^2-L^2}\cos l - \frac{R}{C}L. \end{aligned}$$

Легко видеть, что задача сводится к одностепенной автономной гамильтоновой в случае

$$\begin{aligned} A = A_0 f(t), \quad B = B_0 f(t), \quad C = C_0 f(t), \\ P = P_0, \quad Q = Q_0, \quad R = R_0, \end{aligned}$$

где индекс обозначает постоянные, например начальные значения соответствующих величин, $f(t)$ — некоторая произвольная функция. Если ввести новую независимую переменную соотношением $d\tau = dt/f(t)$, то уравнения в переменных Андуайе запишутся в каноническом виде с гамильтонианом $F' = Ff(t)$. Для $f(t) = 1$ решение этих уравнений соответствует известному случаю интегрируемости Вольтерра, который при $P_0 = Q_0 = R_0 = 0$ отмечался Лиувиллем, Тиссераном [1, 2] и др.

На основе данной работы более детальное исследование интегрируемости задачи Лиувилля выполнил А. В. Борисов [9].

Литература

1. *Liouville J.* // J. Math. Pures et Appliquées. 1858. Ser. 2, V. III. P. 1.
2. *Tisserand F.* Traité de Mécanique Céleste. Paris: Gauthier–Villars, 1891. V. II, ch. XXX.
3. *Баркин Ю.В., Демин В.Г.* // Тез. докл. 8-й Республ. межвуз. науч. конф. по математике и механике (Алма-Ата, 4–6 сентября 1984). Ч. III: Теоретическая и прикладная механика. Алма-Ата (КазГУ), 1984. С. 10.
4. *Barkin Yu.V.* // Proc. Intern. Conf. «Earth Rotation Reference Systems in Geodynamics and Solar System» (Warsaw, Poland, September 18-20, 1995). Journees 1995. SRC, PAS, Warsaw, Poland, 1996. P. 159.
5. *Bursa M., Sidlichovsky M.* // Bull. Astron. Inst. Czechosl. 1985. **36**. P. 24.
6. *Bainum P.M., Sellappan R.* // Acta Astronautica. 1976. **3**. P. 953.
7. *Johnson D.A.* // Int. J. Systems Sci. 1976. **7**, No. 12. P. 1377.
8. *Barkin Yu.V.* // Proc. Intern. Conf. «Earth Rotation Reference Systems in Geodynamics and Solar System» (Warsaw, Poland, September 18-20, 1995). Journees 1995. SRC, PAS, Warsaw, Poland, 1996. P. 83.
9. *Борисов А.В.* //Численное моделирование в задачах механики. М. (МГУ), 1991. С. 110.

Поступила в редакцию
23.05.97