

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 537.611.43: 530.145

ДИСПЕРСИЯ ВОЛН В ПАРАМАГНИТНЫХ СИСТЕМАХ

Л. С. Кузьменков, С. Г. Максимов, В. В. Федосеев

(кафедра теоретической физики)

На основе полученных авторами уравнений квантовой гидродинамики для систем частиц со спином найдено дисперсионное уравнение для собственных мод в “паулиевских” парамагнитных системах. Показано, что показатель преломления поперечных волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля, явно зависит от магнитной восприимчивости вещества, что может быть использовано для ее измерения.

Равновесные свойства “паулиевских” парамагнитных систем достаточно полно исследованы, например в работах [1, 2]. Для анализа возмущений в подобных системах необходимо иметь квантовомеханические уравнения баланса магнитного момента, импульса, энергии, числа частиц, определяющие пространственно-временную эволюцию локальных значений этих величин в физическом пространстве (волновая функция определена в конфигурационном пространстве  $3N$  измерений). Уравнения квантовой гидродинамики для частиц без спина получены в работе [3]. В настоящей работе после модификации вывода этих уравнений для частиц с собственными механическими и магнитными моментами приведены уравнения баланса и получено дисперсионное уравнение для собственных мод в системах с электромагнитным и спин-спиновым взаимодействием во внешнем магнитном поле. Приведены также решения этого уравнения в виде кривых дисперсии для мод с волновыми векторами, параллельными магнитному полю.

Уравнения баланса имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla(n_a \mathbf{v}_a) &= 0 \quad (a = e, p), \\ m_a n_a \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_a \nabla) \right) \mathbf{v}_a + \nabla(p_{a+} + p_{a-}) &= \\ = e_a n_a \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_a \times \mathbf{B}] \right\} + \mu_a^\beta n_a \nabla B^\beta, & \quad (1) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_a \nabla) \right) \boldsymbol{\mu}_a &= \frac{e_a}{m_a c} [\boldsymbol{\mu}_a \times \mathbf{B}]. \end{aligned}$$

Здесь  $n_a$ ,  $\mathbf{v}_a$  — концентрация и гидродинамическая скорость частиц сорта  $a$ ,  $p_{a\nu}$  — парциальное давление частиц с проекцией спина на ось  $z$ , равной  $\nu\hbar/2$  ( $\nu = \pm$ ), включающее квантовый потенциал Бора [3],  $\boldsymbol{\mu}_a(\mathbf{r}, t)$  — удельная плотность магнитного момента частиц. В действительности это интегродифференциальные уравнения, в которых через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  обозначены самосогласованные поля, удовлетворяю-

щие уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \sum_a e_a n_a, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{B} - 4\pi \sum_a n_a \boldsymbol{\mu}_a) &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a n_a \mathbf{v}_a, \quad (2) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  не имеет места для стандартных потенциалов спин-спинового взаимодействия [4, 5]. Чтобы магнитное поле не имело собственных источников, необходимо уточнить вид этого потенциала.

В равновесном состоянии магнитное поле в такой среде равно  $(1 - 4\pi\chi)B_0 = H_0$ , где  $\chi$  — равновесная магнитная восприимчивость, приведенная, например, в работе [1].

Равновесное давление может быть вычислено на основании теории парамагнетизма Паули [1]. Не прибегая к разложению по степеням поля  $B_0$ , получаем

$$p_{a\nu} = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{15m_a} [2m_a(\varepsilon_{aF}' + g_a \eta_\nu \mu_a B_0)]^{5/2}.$$

Здесь  $\mu_a$  — магнетон Бора,  $g_a$  — фактор Ланде, а  $\varepsilon_{aF}'$  — энергия Ферми во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}_0$ , удовлетворяющая уравнению

$$(\varepsilon_{aF}' + g_a \mu_a B_0)^{3/2} + (\varepsilon_{aF}' - g_a \mu_a B_0)^{3/2} = 2\varepsilon_{aF}'^{3/2}.$$

В полях  $H_0 \leq 10^7$  Э

$$\varepsilon_{eF}' \simeq \varepsilon_{eF} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{g_e \mu_e B_0}{\varepsilon_{eF}} \right)^2 \right].$$

Равновесные концентрации имеют вид

$$N_{a\nu} = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{3} [2m_a(\varepsilon_{aF}' + g_a \eta_\nu \mu_a B_0)]^{3/2},$$

где  $\eta_\pm = \pm 1$ .

Для малых возмущений  $\boldsymbol{\mu}_a$ ,  $n_a$  и  $\mathbf{v}_a$ , а также при условии, что масса одной из компонент (электроны) много меньше масс остальных компонент

(ионы), можно ограничиться линеаризованной системой уравнений (1). Поскольку квантовые свойства проявляются в основном при низких температурах, будем считать температуру электронов много меньше  $\varepsilon_{eF}$ .

Зависимость давления от концентрации в системе с возмущениями ищем в виде  $p_{e\nu} = C n_{e\nu}^\gamma$ , где  $C, \gamma$  — неизвестные константы. Для малых возмущений  $p_{e\nu}$  и  $n_{e\nu}$  имеем:

$$\nabla \delta p_{e\nu} = m_e A_e \nabla \delta n_{e\nu}; \quad A_e = 2\gamma \varepsilon_{eF}' / 5m_e. \quad (3)$$

Тогда с учетом (3) линеаризованные уравнения (1) в фурье-представлении принимают вид

$$\begin{aligned} -i\omega \delta n_e + iN_e(\mathbf{k}\mathbf{v}_e) &= 0, \\ -i\omega v_{ex} + \frac{A_e}{N_e} ik_x \delta n_e &= -\frac{e}{m_e} \left\{ E_x + \frac{B_0}{c} v_{ey} - ik_x \frac{\chi B_0}{eN_e} \delta B_z \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i\omega v_{ey} + \frac{A_e}{N_e} ik_y \delta n_e &= -\frac{e}{m_e} \left\{ E_y - \frac{B_0}{c} v_{ex} - ik_y \frac{\chi B_0}{eN_e} \delta B_z \right\}, \\ -i\omega v_{ez} + \frac{A_e}{N_e} ik_z \delta n_e &= -\frac{e}{m_e} \left\{ E_z - ik_z \frac{\chi B_0}{eN_e} \delta B_z \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнений (4) и уравнений Максвелла (2) получаем систему алгебраических уравнений для поля  $\mathbf{E}$ :

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E^\beta(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (5)$$

где тензор второго ранга  $\Lambda^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  имеет следующую структуру:

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = k^2 \left( \delta^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \right) + 4\pi\omega_e \chi A^{\alpha\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} (\delta^{\alpha\beta} - S^{\alpha\beta}), \quad (6)$$

$$\|S^{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_e^2 + A_e k_x (k_x - i\frac{\omega_e}{\omega} k_y)}{\omega^2 - \omega_e^2} & \frac{-i\Omega_e^2 \frac{\omega_e}{\omega} + A_e k_y (k_x - i\frac{\omega_e}{\omega} k_y)}{\omega^2 - \omega_e^2} & \frac{A_e k_z (k_x - i\frac{\omega_e}{\omega} k_y)}{\omega^2 - \omega_e^2} \\ \frac{i\Omega_e^2 \frac{\omega_e}{\omega} + A_e k_x (k_y + i\frac{\omega_e}{\omega} k_x)}{\omega^2 - \omega_e^2} & \frac{\Omega_e^2 + A_e k_y (k_y + i\frac{\omega_e}{\omega} k_x)}{\omega^2 - \omega_e^2} & \frac{A_e k_z (k_y + i\frac{\omega_e}{\omega} k_x)}{\omega^2 - \omega_e^2} \\ \frac{A_e k_x k_z}{\omega^2} & \frac{A_e k_y k_z}{\omega^2} & \frac{\Omega_e^2 + A_e k_z^2}{\omega^2} \end{pmatrix},$$

$\Omega_e$  и  $\omega_e$  — плазменная и циклотронная частоты соответственно. Матрица  $A^{\alpha\beta}$  имеет вид

$$\|A^{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \frac{\frac{\omega_e}{\omega} (k_y^2 + k_z^2) + ik_x k_y}{\omega^2 - \omega_e^2} & \frac{-i(k_x^2 + k_z^2) - \frac{\omega_e}{\omega} k_x k_y}{\omega^2 - \omega_e^2} & \frac{ik_y - \frac{\omega_e}{\omega} k_x}{\omega^2 - \omega_e^2} k_z \\ \frac{i(k_y^2 + k_z^2) - \frac{\omega_e}{\omega} k_x k_y}{\omega^2 - \omega_e^2} & \frac{\frac{\omega_e}{\omega} (k_x^2 + k_z^2) - ik_x k_y}{\omega^2 - \omega_e^2} & \frac{-ik_x - \frac{\omega_e}{\omega} k_y}{\omega^2 - \omega_e^2} k_z \\ \frac{-\frac{\omega_e}{\omega} k_x + i\frac{\omega_e}{\omega} k_y}{\omega^2 - \omega_e^2} k_z & \frac{-\frac{\omega_e}{\omega} k_y - i\frac{\omega_e}{\omega} k_x}{\omega^2 - \omega_e^2} k_z & \frac{\frac{\omega_e}{\omega} k_x^2 + k_y^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \end{pmatrix}.$$

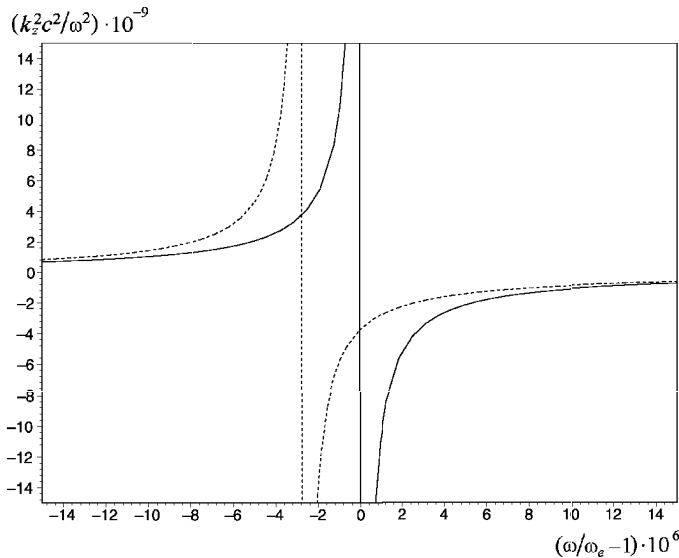
Сравнивая полученный тензор  $\Lambda^{\alpha\beta}$  с известными из кинетической теории результатами [6], легко установить значение неизвестной константы:  $\gamma = 3$ .

Собственные моды в парамагнитной системе определяются дисперсионным уравнением

$$\det \|\Lambda^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})\| = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим моды с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ , направленными вдоль внешнего магнитного поля. В этом случае тензор  $\Lambda^{\alpha\beta}$  принимает вид

$$\|\Lambda^{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \left[ k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{4\pi\chi\omega_e^2 k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \right] & -i\omega\omega_e \frac{4\pi\chi k_z^2 + \frac{\Omega_e^2}{c^2}}{\omega^2 - \omega_e^2} & 0 \\ i\omega\omega_e \frac{4\pi\chi k_z^2 + \frac{\Omega_e^2}{c^2}}{\omega^2 - \omega_e^2} & \left[ k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{4\pi\chi\omega_e^2 k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \right] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\Omega_e^2 + A_e k_z^2}{\omega^2} \right) \end{pmatrix}.$$



Сдвиг показателя преломления как функции частоты для магнитной восприимчивости  $\chi = 2,75 \cdot 10^{-6}$  на моль

Тогда дисперсионное уравнение (7) сводится к уравнению

$$\left(1 - \frac{\Omega_e^2 + A_e k_z^2}{\omega^2}\right) \left( \left[ k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{4\pi\chi\omega_e^2 k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \right]^2 - \omega^2\omega_e^2 \left[ \frac{4\pi\chi k_z^2 + \frac{\Omega_e^2}{c^2}}{\omega^2 - \omega_e^2} \right]^2 \right) = 0. \quad (8)$$

Корнями дисперсионного уравнения (8) являются три качественно различные моды:

$$\omega^2 = \Omega_e^2 + A_e k_z^2, \quad (9)$$

УДК 519.5

## ОБ ЭФФЕКТИВНОМ РАНГЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ

М. Л. Сердобольская

(кафедра компьютерных методов физики)

Рассмотрена проблема эффективного ранга (максимальной размерности оценки измеряемого сигнала как функции контролируемой среднеквадратичной погрешности оценивания) бесконечномерной линейной модели измерения. Найден эффективный ранг модели, в которой приборное воздействие на сигнал описывается произвольным линейным ограниченным оператором.

Линейное статистическое оценивание сигнала по результатам косвенных наблюдений широко применяется при анализе и интерпретации экспериментальных данных [1, 2]. К достоинствам этого подхода можно отнести относительную простоту вычислительных алгоритмов и применимость их к обширному классу моделей измерения. Однако во многих экспериментах оцениваемый сигнал и результат измерения являются функциями от непрерывно меняющегося параметра — времени или энергии и т. п. При интерпретации таких экспериментальных

$$\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = \frac{1 - \Omega_e^2 / [\omega(\omega \pm \omega_e)]}{1 \mp 4\pi\omega_e\chi / (\omega \pm \omega_e)}. \quad (10)$$

Формулой (9) представлен закон дисперсии продольной моды во внешнем магнитном поле. Пространственная дисперсия этой моды обусловлена наличием собственных магнитных моментов электронов. Формула (10) выражает зависимость показателя преломления  $k_z c / \omega$  поперечных волн от частоты. Показатель преломления явно зависит от равновесной магнитной восприимчивости  $\chi$ . Для нормальных парамагнитных веществ  $\chi \sim 10^{-4} \div 10^{-6}$  на моль. Поэтому зависимость показателя преломления от магнитной восприимчивости  $\chi$  является слабой. Тем не менее учет конечных значений  $\chi$  приводит, как это показано на рисунке, к заметному сдвигу частоты циклотронного резонанса. Это обстоятельство может быть использовано для измерения  $\chi$ .

### Литература

1. Зейтц Ф. Современная теория твердого тела. М.: ГИТТЛ, 1949. С. 605–657.
2. Галошина Э.В. // УФН. 1974. 113, № 1. С. 105.
3. Кузьменков Л.С., Максимов С.Г. // ТМФ. 1999. 118, № 2. С. 287.
4. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра. Т. 1. М.: Мир, 1971. С. 72.
5. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. С. 383–390.
6. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. школа, 1988.

Поступила в редакцию  
17.12.99

данных возникает необходимость решать уравнения в бесконечномерных векторных пространствах, и это настолько усложняет вычислительную процедуру, что большинство исследователей в этом случае заменяют функции их конечномерными проекциями, а интегралы — конечными суммами. Применение аппроксимации вместо исходной математической модели, во-первых, вносит дополнительную, вообще говоря, неконтролируемую погрешность в решение задачи интерпретации, во-вторых, ставит это решение в зависимость от абстрактного, не связанного