Литература

1. *Riess A.G.* et al. // Astron. J. 1998. **116**. P. 1009.
2. *Perlmutter S.* et al. // Astrophys. J. 1999. **517**. P. 565.
3. *Чернин А.Д.* // УФН. 2001. **171**, № 11. С. 1153.
4. *Глинер Э.Б.* // ДАН СССР. 1970. **192**, № 4. С. 771.
5. *Caldwell R.R., Steinhardt P.J.* // Phys. Rev. 1998. **D57**. P. 6057.
6. *Лоскутов Ю.М.* // Вестн. Моск. ун–та. Физ. Астрон. 1991. № 4. С. 49 (Moscow University Phys. Bull. 1991. No. 4. P. 46).
7. *Фок В.А.* // ЖЭТФ. 1939. **9**. С. 375.
8. *Fronsdal C.* // Suppl. Nuovo Cim. 1958. **9**. P. 16.
9. *Barnes K.J.*, // J. Math. Phys. 1965. **6**. P. 788.
10. *Van Dam H., Veltman M.* // Nucl. Phys. 1970. **B22**. P. 397.
11. *Лоскутов Ю.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 4. С. 29 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 4. P. 33).
12. *Лоскутов Ю.М.* // ЖЭТФ. 1995. **107**. С. 283; ТМФ. 1995. **105**. С. 324.
13. *Лоскутов Ю.М.* // ЖЭТФ. 1998. **113**. С. 1921.
14. *Alven H., Herlofson K.* // Phys. Rev. 1950. **78**. P. 616.
15. *Gardner F.F., Whiteoak J.B.* // Nature. 1963. **197**, P. 1162; Ann. Rev. Astr. Astrophys. 1966. **4**. P. 245.
16. *Burbidge G., Growne A.H.* // Astrophys. J. Suppl. 1979. **40**. P. 583.
17. *Clarke J.N., Kronberg P.P., Simard-Normandin M.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1980. **190**. P. 205.
18. *Spinrad H.* et al. // Pub. Astron. Soc. Pacific. 1985. **97**. P. 932.
19. *Nodland B., Ralston J.P.* // Phys. Rev. Lett. 1997. **78**. P. 3043.
20. *Carrol S.M., Field J.B.* // Phys. Rev. Lett. 1997. **79**. P. 2394.
21. *Логунов А.А.* Теория гравитационного поля. М., 2000.
22. *Лоскутов Ю.М.* // ТМФ. 1993. **94**. P. 515.

Поступила в редакцию
21.05.03

УДК 530.145; 530.12:531.51

ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ КВАНТОВАННОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

О. Д. Тимофеевская, О. А. Хрусталев, М. В. Чичикина

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

E-mail: chich@goa.bog.msu.ru

Построено пространство состояний системы и получен явный вид оператора поля.

1. Построение пространства состояний системы

Данная работа является продолжением статей [1–2], в которых рассматривалось квантование гравитационного поля с помощью преобразования Боголюбова в окрестности нетривиальной классической компоненты. Были получены уравнения Эйнштейна как необходимое условие применимости теории возмущений.

Найдем выражение для действия во втором порядке по теории возмущений по обратным степеням константы связи. Для этого нужно построить пространство состояний системы, в котором можно сделать редукцию числа состояний и получить выражение для гамильтониана как производной по генераторам группы симметрий.

Используя полученные в статье [2] уравнения (4) для классической компоненты поля, получим выражение для гамильтониана:

$$H_2 = -in^l A_l^p(a)\frac{\partial}{\partial a^p} + \int\limits_{\Sigma} aH_2(\hat{P},\hat{Q}) +$$

$$+ i\int\limits_{\Sigma} u_{stn}\frac{\delta}{\delta u_{st}} + u^{st}_{nn}\frac{\delta}{\delta u^{st}_n} + r_k\int\limits_{\Sigma} N^{stk}_{nn}u_{st} - N^k_{stn}u^{st}_n.$$

Поскольку функции $f_{st}(x)$ и $f^{st}_n(x)$ рассматривались как независимые, число возможных состояний поля оказалось удвоенным [2]. Из-за введения в работе [1] дополнительного условия (3), связывающего $u_{st}(x^{'})$ и $u^{st}_n(x^{'})$, число независимых переменных (минус групповые переменные) стало $(2\times\infty - r)$. Для того чтобы получить $(\infty - r)$, нужно еще r условий. Напомним, что r — число параметров группы.

Для этого представим $u_{st}(x^{'})$ в виде:

$$\begin{aligned} u_{st}(x') &= w_{st}(x') + N^a_{st}(x')r_a, \\ u^{st}_n(x') &= w^{st}_n(x') + N^{st^a}_n(x')r_a. \end{aligned} \qquad (1)$$

Выражения представляют функции $u_{st}(x^{'})$, $u^{st}_n(x^{'})$ в терминах независимых переменных r_a и новых функций $w_{st}(x^{'})$, $w^{st}_n(x^{'})$. Это возможно, когда $(w_{st}(x^{'}), w^{st}_n(x^{'}))$ связаны r линейными уравнениями. Если $N^a(x^{'})$ будут выбраны так, чтобы выполнялись равенства

$$\omega(N^{sta}, N^{stb}) = 0,$$

тогда уравнения (1) могут быть сформулированы в виде уравнений для $w_{st}(x')$, $w_{st}(x')$:

$$\omega(N^{sta}, w_{st}) = 0, \quad \omega(M_{sta}, w_{st}) = 0.$$

В терминах новых переменных операторы $\hat{Q}$, $\hat{P}$ имеют вид:

$$\hat{Q}_{st}(x') = \bar{Q}_{st}(x') + q_{st}(x'), \quad \hat{P}^{st}(x') = \bar{P}^{st}(x') + p^{st}(x'),$$

где

$$\bar{Q}_{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(w_{st}(x') + i\frac{\delta}{\delta w_n^{st}(x')}\right),$$

$$\bar{P}^{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(w_n^{st}(x') - i\frac{\delta}{\delta w_{st}(x')}\right),$$

и

$$q_{st}(x') = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\delta r_a}{\delta u_n^{st}(x')}\frac{\partial}{\partial r_a}, \quad p^{st}(x') = \frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{\delta r_a}{\delta u_{st}(x')}\frac{\partial}{\partial r_a}.$$

Необходимая редукция числа состояний может быть проведена следующим образом: предположим, что состояние поля определяется функционалами $w_{st}(x')$ и $w_n(x')$, на которых $\bar{Q}(x')$ и $\bar{P}(x')$ сводятся к выражениям:

$$\bar{Q}(x') \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}w_{st}(x'), \quad \bar{P}(x') \longrightarrow i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\delta}{\delta w_{st}(x')}.$$

(Голоморфное представление в изоморфном пространстве, натянутом на z и z^*; см. [2].)

Переменные r_a физического смысла не имеют. Они появились как остаток редукции числа состояний в терминах переменных Боголюбова. В дальнейшем мы покажем, что выделение этих переменных связано со структурой действия во втором порядке, т. е. является динамическим.

Для наглядности ниже приводится пример редукции переменных поля для случая группы трансляций, что, однако, не ограничивает общности метода.

2. Группа трансляций

Пусть группой симметрии является группа пространственно-временных трансляций

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} - \tau^{\alpha}, \quad (\delta x')^{\alpha} = \delta\tau^{\alpha}.$$

Как и в общем случае, уравнения Эйнштейна являются необходимым условием применимости теории возмущений. Гамильтониан во втором порядке теории возмущений имеет вид:

$$H_2 = -in^p\frac{\partial}{\partial\tau^p} + \int\limits_{\Sigma} aH_2(\hat{P}, \hat{Q}) + $$
$$+ \int\limits_{\Sigma} u_{stn}\frac{\delta}{\delta u_{st}} + u_{nn}^{st}\frac{\delta}{\delta u_n^{st}} + r_k\int\limits_{\Sigma} N_{nn}^{stk}u_{st} - N_{stn}^{k}u_n^{st},$$

где

$$H_2(\hat{P}, \hat{Q}) = \frac{1}{\sqrt{F}}\left(\left(2F_n^{st}F_{st} + \frac{1}{2}F_n\right)\hat{P}^{st}\hat{Q}_{st} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}F_nF^{st}F_n^{st}\hat{Q}_{st}\hat{Q}_{st}\right) + \frac{1}{\sqrt{F}}\left(\hat{P}^{st}\hat{P}_{st} - \frac{1}{2}\hat{P}^2\right) -$$
$$-\sqrt{F}\left(\left(R^{st}\hat{Q}^{st}\hat{Q}_{st} - \frac{1}{2}R^{st}F^{st}\hat{Q}_{st}\hat{Q}_{st}\right) - \right.$$
$$\left. - \hat{Q}^{st}R_{st}(\hat{Q}) - \frac{1}{2}R(\hat{Q})F^{st}\hat{Q}_{st}\right).$$

Гиперповерхность Σ предполагается плоской и задается тремя ортогональными направляющими векторами $\mathbf{e}_a$ и нормалью $\mathbf{n}$:

$$e_a^{\alpha}e_{b\alpha} = -\delta_{ab}, \quad e_{\beta}^{a}e_{a\alpha} = g_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{e}_a n = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

Для простоты мы выбираем поверхность $t = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial n} = n^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Координаты x'^{α} на ней задаются параметрами λ^a:

$$x'^{\alpha} = e_a^{\alpha}\lambda^a, \quad a = 1,2,3, \quad \alpha = 0,1,2,3.$$

Рассмотрим случай, когда $F_{st}(x')$ на Σ удовлетворяет граничному условию

$$F_n^{st}(x') = 0.$$

Тогда

$$M_{\alpha st}(x') = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_a^{\alpha}F_{st\lambda_a}(x'),$$

$$M_{n\alpha}^{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}n_{\alpha}F_{nn}^{st}(x').$$

Условия

$$\omega\left(N_{st}^{a}, M_b^{st}\right) = \delta_b^a, \quad \omega\left(N^{ast}, N_{st}^{b}\right) = 0,$$

выполняются, если $N^{\alpha}(x')$ определены формулами:

$$N_{st}^{\alpha}(x') = An^{\alpha}F_{stnn}(x'), \quad N_n^{\alpha st}(x') = B^{ab}e_a^{\alpha}F_{\lambda_b}^{st}(x'),$$

где

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{\int\limits_{\Sigma} F_{stnn}^2(x')}, \quad B^{ab} = \frac{\sqrt{2}}{\int\limits_{\Sigma} F_{\lambda_a}^{st}(x')F_{st\lambda_b}(x')}.$$

Условия, которым должны удовлетворять функции $w_{st}(x')$, $w_n^{st}(x')$, показывают, что $w_{st}(x')$ и $w_n^{st}(x')$ могут быть получены из независимых функций $f_{st}(x)$ и $f_n^{st}(x)$ одним и тем же самосопряженным проектированием. Это позволяет перейти, например, к переменным $z_{st}(x')$ и $z^{st*}(x')$ [2] и связанным с ними голоморфным представлением.

3. Операторы рождения-уничтожения

После представления квантовой добавки в форме (1) гамильтониан во втором порядке по $1/g$ имеет вид

$$H_2 = in^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} + H_{21} + H_{22},$$

где

$$H_{21} = \int\limits_\Sigma \left(-\frac{1}{2\sqrt{F}} \left(\frac{\delta}{\delta w_{st}} \frac{\delta}{\delta w^{st}} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta w^2} \right) - \right.$$
$$\left. - \sqrt{F} \left(R w^{st} - R^{st}(w) \right) w_{st} \right) +$$
$$+ i \int\limits_\Sigma w_{stn} \frac{\delta}{\delta w_{st}} + w^{st}_{nn} \frac{\delta}{\delta w^{st}_n},$$

$$H_{22} = \int\limits_\Sigma \left(-\frac{1}{2\sqrt{F}} \left(\frac{\delta r_a}{\delta u_{st}} \frac{\delta r_b}{\delta u^{st}} - \frac{1}{2} F^{st} \delta_{ab} \frac{\delta r_a}{\delta u} \frac{\delta r_b}{\delta u_{st}} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{F}}{4} \left(R \frac{\delta r_a}{\delta u^{st}_n} - R^{st} \left(\frac{\delta r_a}{\delta u^{st}_n} \right) \right) \frac{\delta r_a}{\delta u_{nst}} \right) \frac{\partial^2}{\partial r_a \partial r_b} +$$
$$+ r_a \frac{\partial}{\partial r_b} \left(i \int\limits_\Sigma N^{st^a}_{nn} \frac{\delta r_b}{\delta u_{st}} - N^a_{stn} \frac{\delta r_b}{\delta u^{st}_n} \right) -$$
$$- r_a r_b \left(\int\limits_\Sigma N^{st^a}_{nn} N^b_{st} - N^b_{stn} N^{st^a}_n \right),$$

$$A = \frac{\delta u^{st}_n}{\delta r_a} R_{st} \left(\frac{\delta r_a}{\delta u_n} \right).$$

Оператор H_2 действует в пространстве вида $F[w, w_n]F[r]$, при этом H_{21} действует в пространстве $F[w, w_n]$, а оператор H_{22} — в пространстве $F[r]$. Эти пространства ортогональны. Можно представить $w_{st}(x)$ в виде ряда (по крайней мере в порядке $O(t^2)$):

$$w_{st}(x) = \sum_m \phi_{stm}(\mathbf{x}) c_m(t),$$

$$\frac{\delta}{\delta w_{st}}(x) = \sum_m \phi_{stm}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta c_m(t)},$$

где $\phi_{st_m}(x)$ — ортонормированные функции

$$\int\limits_\Sigma \phi_{stm}(\mathbf{x}) \phi^{st}_n(\mathbf{x}) = \delta_{mn}.$$

Они являются решением уравнений

$$\phi_{stm}(\mathbf{x}) = \frac{2a}{\sqrt{F}} \left(\phi_{stm}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} F_{st} \phi_m(\mathbf{x}) \right),$$

$$\omega^2_m \phi^{st}_m(\mathbf{x}) = a\sqrt{F} \left(R \phi^{st}_m(\mathbf{x}) - R^{st}(\phi_m(\mathbf{x})) \right).$$

Операторы рождения-уничтожения могут быть представлены как функции:

$$a_s = \sqrt{\Omega_s} c_s + \frac{1}{2\sqrt{\Omega_s}} \frac{\partial}{\partial c_s}, \quad a^\dagger_s = \sqrt{\Omega_s} c_s - \frac{1}{2\sqrt{\Omega_s}} \frac{\partial}{\partial c_s}.$$

Функции $w_{st}(x')$, будучи заданы в виде ряда по $\phi_{st_m}(x)$, удовлетворяют волновым уравнениям (как минимум при малых t), если зависимость a и $a^\dagger$ от времени определяется уравнением Гейзенберга:

$$a_s(t) = e^{-i\Omega_s t} a_s, \quad a^\dagger_s(t) = e^{i\Omega_s t} a^\dagger_s.$$

Зависимость w_{st} от t имеет вид:

$$w_{st}(t) = \sum_m \frac{1}{2\sqrt{\Omega_m}} \phi_{stm}(\mathbf{x}) \left(a_m \,\mathrm{e}^{-i\Omega_m t} + a^\dagger_m \,\mathrm{e}^{i\Omega_m t} \right),$$

$$w_{tst}(t) = -i \sum_m \frac{\sqrt{\Omega_m}}{2} \phi_{stm}(\mathbf{x}) \left(a_m \,\mathrm{e}^{-i\Omega_m t} - a^\dagger_m \,\mathrm{e}^{i\Omega_m t} \right).$$

Поэтому

$$H_{21} = -\frac{1}{4} \sum_m \left(\frac{\delta}{\delta c_m} \right)^2 + \omega^2_m c^2_m,$$

и теперь H_2 выражается следующим образом:

$$H_2 = in^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} + H_{22}.$$

Операторы H_{22} содержат только избыточные переменные r_a, $\frac{\partial}{\partial r_a}$. Введем переменные

$$r_{a_\|} = e^\alpha_a r_\alpha, \quad r_- = n^\alpha r_\alpha,$$

$$\frac{\partial}{\partial r_{a_\|}} = e^\alpha_a \frac{\partial}{\partial r_\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial r_-} = n^\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha},$$

и напомним, что

$$\frac{\delta r_a}{\delta u_{st}(x')} = -\frac{1}{\sqrt{2}} n_\alpha F^{st}_n(x'), \quad \frac{\delta r_a}{\delta u^{st}_{nn}(x')} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^a_\alpha F^{st}_{\lambda_a}(x').$$

Если использовать обозначения

$$a^{ab} = \frac{2}{\int\limits_\Sigma F^{st}_{\lambda_a}(x') F_{st\lambda_a}(x')}, \quad b = \frac{2}{\int\limits_\Sigma F^{st}_{nn}(x') F_{st}(x')},$$

$$c^{ab} = \frac{1}{2} \int\limits_\Sigma \frac{\sqrt{F(x')}}{4} \left(R F^{st}_{\lambda_a}(x') - R^{st}(F_{\lambda_a}) \right) F_{st\lambda_b}(x'),$$

$$d = -\frac{1}{2} \int\limits_\Sigma \frac{F_{st_{nn}}(x')}{2\sqrt{F}} \left(F^{st}_{nn}(x') - \frac{1}{2} F^{st}(x') F_{nn}(x') \right),$$

то

$$H_{22} = a^{ab} r_{a_\|} r_{b_\|} + b r^2_- + c^{ab} \frac{\partial^2}{\partial r_a \partial r_b} + d \frac{\partial^2}{\partial r^2_-}.$$

Тогда H_{22} равен нулю на следующем векторе состояния:

$$\Psi = \psi e^{\alpha r^2_{a_\|} + \beta r^2_{b_\|} + \gamma r^2_\perp},$$

где параметры удовлетворяют соотношениям:

$$a^{ab} + 4\alpha\beta c^{ab} = 0, \quad b + 4\gamma^2 d = 0.$$

Заключение

После удаления избыточных переменных гамильтониан во втором порядке имеет вид:

$$H = -i\frac{\partial}{\partial t}.$$

Аналогичный оператор для произвольной группы

$$H = -iA_0^p(a)\frac{\partial}{\partial a^p}.$$

Для поля $\psi(x)$ уравнение Гейзенберга

$$\frac{\partial Z}{\partial x^0} = i[HZ]$$

теперь выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial Z}{\partial x^0} = -A_0^p\frac{\partial Z}{\partial a^p}, \qquad (2)$$

с граничными условиями

$$\psi(x)|_\Sigma = \hat{q}(x), \quad \psi_n(x)|_\Sigma = \hat{p}(x).$$

Решением уравнения (2) является функция вида

$$Z = Z(x^0 - A_0^p a^p).$$

Оператор поля $\psi(x)$ равен:

$$\psi_{st}(x) = gF_{st}(x') + \hat{\Phi}_{st}(x') + \hat{\phi}_{st_a}\frac{\partial}{\partial r_a} + \frac{1}{g}A_{st}(x', \tau),$$

где $\hat{\Phi}_{st}(x')$ — решение уравнений эволюции:

$$\hat{\Phi}_{st_n} = \frac{2a}{\sqrt{\hat{\Phi}}}\left(\hat{\Phi}_{nst} - \frac{1}{2}\hat{\Phi}_n\hat{\Phi}_{st}\right),$$

$$\hat{\Phi}^{st}_{nn} = \frac{a}{2\sqrt{\hat{\Phi}}}\left(\hat{\Phi}_{nkl}\hat{\Phi}^{kl}_n - \frac{1}{2}\hat{\Phi}^2_n\right)\hat{\Phi}^{st} - $$
$$- \frac{2a}{\sqrt{\hat{\Phi}}}\left(\hat{\Phi}^{st}_n\hat{\Phi}^{kl}_n\hat{\Phi}_{nkl} - \frac{1}{2}\hat{\Phi}_n\hat{\Phi}^{st}_n\right) - $$
$$- a\sqrt{\hat{\Phi}}\left(R^{st} - \frac{1}{2}\hat{\Phi}^{st}R\right) - \sqrt{\hat{\Phi}}\left(\hat{\Phi}^{sl}c^t_{;l} - \hat{\Phi}^{st}c^l_{;l}\right),$$

с граничными условиями на Σ:

$$\hat{\Phi}_{st} = \hat{Q}_{st}(x'), \quad \hat{\Phi}^{st}_t = \hat{P}^{st}(x').$$

Мы применили метод преобразований Боголюбова для квантования гравитационного поля в окрестности нетривиальной классической компоненты. Использование переменных Боголюбова позволило избежать проблемы нулевых мод.

Получено необходимое условие применимости теории возмущений, которым оказалось выполнение классических уравнений Эйнштейна.

Получено явное выражение для квантовой добавки оператора поля и вектора состояния.

Эти результаты могут быть применены для физически интересных классических решений, таких как метрика Керра, Шварцшильда и других точных решений уравнений Эйнштейна. Они требуют лишь большой вычислительной работы, оставаясь теми же по существу.

Литература

1. *Тимофеевская О.Д., Хрусталев О.А., Чичикина М.В.* // Вестн. Моск. ун-та. 2003. №4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 2003. No. 4. P. 1).
2. *Тимофеевская О.Д., Хрусталев О.А., Чичикина М.В.* // Вестн. Моск. ун-та. 2003. №5. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 2003. No. 5. P. 1).

Поступила в редакцию
23.10.02

УДК 530.12.01; 530.145

МОДЕЛЬ НАРУШЕНИЯ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ С ГАЗОМ ФЕРМИВОДОВ

В. Ч. Жуковский, О. В. Тарасов

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: th180@phys.msu.su

Предложен механизм нарушения киральной симметрии (НКС) на основе калибровочных конфигураций (фермиводов), обладающих конечной плотностью фермионных нулевых мод. Эти конфигурации рассматриваются как случайные суперпозиции калибровочных полей, в которых фермион может распространяться вдоль четырехмерной траектории на произвольные расстояния без уменьшения амплитуды.

1. Как известно, конфайнмент и нарушение киральной симметрии (НКС) — два наиболее ярких непертурбативных явления квантовой хромодинамики (КХД) [1]. В работе [2] в качестве полевой конфигурации, обеспечивающей механизм НКС, выбран газ инстантонов и антиинстантонов, являющихся седловыми точками в континуальном интеграле [3], которым определяются величины, ответственные за