«УТВЕРЖДАЮ»

И.о. декана физического факультета МГУ

профессор Белокуров В.В.

____

БИЛЕТЫ ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА

Направление подготовки 03.04.02 «Физика»

Магистерская программа

«ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ФИЗИКЕ»

Билет № 1

1. Динамика абсолютно твёрдого тела. Тензор инерции. Уравнения Эйлера.
2. Задачи выпуклого программирования. Функция Лагранжа. Свойство седловой точки. Теорема Куна–Таккера.
3. Постройте приближённый доверительный интервал для параметра распределения Пуассона по выборке объёма n.

Билет № 2

1. Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа для системы материальных точек. Интегралы движения.
2. Форма мозаичного полутонового изображения, ортогональный проектор на неё.
3. Расстояние между элементом x нормированного пространства $\mathscr{R}$ и множеством $\mathscr{M} \subset \mathscr{R}$ задаётся как $\rho(\mathscr{M}, x) = \inf\limits_{z \in \mathscr{M}} \| x - z \|$. Найдите элемент z, на котором достигается точная нижняя грань, если $\mathscr{M}$ – замкнутый шар с центром x_0 и радиусом $r > 0$.

Билет № 3

1. Функция Гамильтона в классической механике. Уравнения Гамильтона.
2. Постановка задачи точечного оценивания. Несмещённость, состоятельность, эффективность. Метод максимального правдоподобия. Неравенство Рао–Крамера в случае оценки одномерного неизвестного параметра распределения.
3. Пусть $\mathscr{R}^m$ и $\mathscr{R}^n$ – евклидовы пространства размерности m и $n > m$ соответственно. Для заданных линейного оператора A, действующего из $\mathscr{R}^m$ в $\mathscr{R}^n$, и элемента $z \in \mathscr{R}^n$ найдите минимум функции $J(u) = \| Au - z \|$ по $u \in \mathscr{R}^m$. Единственно ли решение?

Билет № 4

1. Вязкая ньютоновская жидкость. Уравнение Навье–Стокса. Некоторые точные решения.
2.Меры правдоподобия и доверия и их распределения, неопределенный элемент, неопределенная высказывательная переменная.
3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \dots, \eta_n$ – две независимые нормальные совокупности, взятые из нормальных распределений с единичной дисперией. Для первой выборки математическое ожидание равно μ_1, для второй оно равно μ_2. Проверьте гипотезу $\mu_1 = \mu_2$ при альтернативе $\mu_1 < \mu_2$.

Билет № 5

1. Термодинамический подход к описанию жидкостей и газов. Первое начало термодинамики, его применение к описанию основных процессов.
2. Понятие линейного функционала. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.
3. Пусть $\mathscr{R}^n$ – евклидово пространство размерности n и B – невырожденный линейный оператор, действующий из $\mathscr{R}^n$ в $\mathscr{R}^n$. Для заданного элемента $z \in \mathscr{R}^n$ найдите $\inf\limits_u \max\{\| u - z \|^2, \| Bu|^2\}$.

Билет № 6

1. Второе начало термодинамики. Циклические процессы. Тепловые двигатели, КПД. Холодильная машина.

2. Граф, связный граф, компонента связности графа, точка сочленения, мост. Вершинная связность, рёберная связность, их соотношение и оценка сверху.

3. Пусть $\mathscr{R}$ – пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций с нормой $\| x \| = \sup\limits_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$. Оператор A из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}$ задан формулой

$$(Ax)(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}, \qquad -1 < t < 1.$$

Найдите $\| A \|$ и ненулевой элемент $x \in \mathscr{R}$, при котором $\| Ax \| = \| A \| \cdot \| x \|$, или докажите, что такого элемента не существует.

Билет № 7

1. Представление о температуре как о характеристике случайных движений частиц. Броуновское движение. Формула Эйнштейна–Смолуховского.

2. Независимость мер правдоподобия и доверия и неопределенных элементов. Субъективная независимость.

3. Пусть $\mathscr{R}^n$ – евклидово пространство размерности n и a, z – заданные элементы из $\mathscr{R}^n$. Сведите к задаче линейного программирования следующую задачу:

$$\inf_u \max_{i=1,\dots,n} |a_i u_i - z_i|, \qquad u = (u_1, \dots, u_n), \quad a = (a_1, \dots, a_n).$$

Билет № 8

1. Распределение Максвелла. Средняя, среднеквадратичная и наиболее вероятная скорость частиц. Идеальный газ во внешнем поле (распределение Больцмана). Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы.

2. Сравнение полутоновых изображений по форме, независимость по форме.

3. Пусть $\mathscr{R} = l_2$ и линейный оператор A из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}$ имеет вид

$$A\langle x_1 \dots, x_n, \dots \rangle = \langle \lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, \dots \rangle.$$

При каком условии на последовательность $\{\lambda_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ данный оператор ограничен и чему равна его норма?

Билет № 9

1. Состояния макроскопической термодинамической системы частиц. Распределение Гиббса.

2. Группа автоморфизмов и группа изоморфизмов шкал значений правдоподобия и доверия. Принцип относительности.

3. С помощью начального момента первого порядка найдите оценку параметра показательного распределения по выборке объёма n. Является ли эта оценка максимально правдоподобной?

Билет № 10

1. Понятие энтропии. Уравнение материального баланса. Закон сохранения энергии в открытых системах. Уравнение баланса энтропии.

2. Построение формы множества полутоновых изображений методом главных компонент.

3. Найдите минимум функции $J(u_1, u_2) = u_1 + u_2$ двух действительных переменных u_1, u_2 на множестве, ограниченном неравенствами $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$, $u_1 - u_2 \leqslant 1$.

Билет № 11

1. Магнитное поле. Закон Био–Савара–Лапласа и теорема о циркуляции магнитного поля. Векторный потенциал магнитного поля. Ферромагнетики, диамагнетики, парамагнетики, их свойства. Электромагнитная индукция.

2. Постановка задачи интервального оценивания параметров распределения. Интервальные оценки параметров нормального распределения.

3. Пусть P_1, P_2 – ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{R}$ на линейные подпространства $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ соответственно. При каком условии оператор $P_1 + P_2$ является ортогональным проектором, и каково при этом условии пространство $\mathscr{L}$, на которое он проецирует?

Билет № 12

1. Уравнения Максвелла. Электромагнитная теория света. Волновое уравнение как следствие уравнений Максвелла.

2. Правдоподобия и доверия истинности характеристик объекта исследования, обусловленных его субъективной моделью. Субъективные модели абсолютного незнания и точного знания.

3. Пусть $\mathscr{R}$ – пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций с нормой $\| x \| = \sup\limits_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$. Функционал f задан формулой

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\, dt - \int_{0}^{1} x(t)\, dt, \qquad x \in \mathscr{R}.$$

Найдите норму этого функционала и элемент $x \in \mathscr{R}$, на котором достигается норма, или показажите, что такового не существует.

Билет № 13

1. Дифракция света. Дифракция Фраунгофера и дифракция Френеля. Принцип Гюйгенса.

2. Основы библиотеки TensorFlow: задание функций и минимизация методом градиентного спуска.

3. По выборке объёма n найдите оценку максимального правдоподобия параметра a равномерного на отрезке $[0, a]$ распределения.

Билет № 14

1. Интерференция света. Основные интерференционные схемы.

2. Понятие спектра линейного оператора. Спектр компактного оператора.

3. Пусть $\mathcal{R}^n$ – евклидово пространство размерности n и B – невырожденный линейный оператор, действующий из $\mathcal{R}^n$в $\mathcal{R}^n$. Для заданного элемента $z \in \mathcal{R}^n$ найдите $\inf\limits_{u} \max\{\| u - z \|^2, \| Bu|^2\}$.

Билет № 15

1. Фермионы и бозоны. Теорема о связи спина и статистики. Распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна.

2. Разложение булевых функций и функций   -значной логики по переменным, совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы.

3. Пусть P_1, P_2 – ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{R}$ на линейные подпространства $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ соответственно. При каком условии оператор $P_1 + P_2$ является ортогональным проектором, и каково при этом условии пространство $\mathcal{L}$, на которое он проецирует?

Билет № 16

1. Основные постулаты квантовой механики. Волновая функция, операторы координаты и импульса. Уравнение Шредингера.

2. Дискретная задача на минимакс. Необходимое условие на минимакс и его геометрическая интерпретация.

3. Пусть $\mathcal{R}$ – пространство непрерывных на отрезке $[-1{,}1]$ функций с нормой $\| x \| = \sup\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$. Функционал f задан формулой

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_{0}^{1} x(t)\,dt, \qquad x \in \mathcal{R}.$$

Найдите норму этого функционала и элемент $x \in \mathcal{R}$, на котором достигается норма, или покажите, что такового не существует.

Билет № 17

1. Линейный квантовый гармонический осциллятор. Энергии и волновые функции квантовых состояний.

2. Постановка задачи проверки статистических гипотез. Статистический критерий и его характеристики. Равномерно наиболее мощный критерий. Теорема Неймана–Пирсона.

3. Пусть $\mathcal{R}^m$ и $\mathcal{R}^n$ – евклидовы пространства размерности m и $n > m$ соответственно. Для заданных линейного оператора A, действующего из $\mathcal{R}^m$ в $\mathcal{R}^n$, и элемента $z \in \mathcal{R}^n$ найдите минимум функции $J(u) = \| Au - z \|$ по $u \in \mathcal{R}^m$. Единственно ли решение?

Билет № 18

1. Основы специальной теории относительности. Преобразования Лоренца. Интервал. Изменение промежутков времени при переходе к другой системе отсчета. Лоренцево сокращение.

2. Задачи линейного программирования. Свойства решений (разрешимость, единственность). Численные методы решения.

3. Расстояние между элементом x нормированного пространства $\mathcal{R}$ и множеством $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ задаётся как $\rho(\mathcal{M}, x) = \inf\limits_{z\in\mathcal{M}} \| x - z \|$. Найдите элемент z, на котором достигается точная нижняя грань, если $\mathcal{M}$ – замкнутый шар с центром x_0 и радиусом $r > 0$.

Билет № 19

1. Функция Гамильтона в классической механике. Уравнения Гамильтона.

2. Оператор, сопряжённый к оператору в гильбертовом пространстве: определение и свойства. Оператор ** и его связь с исходным оператором .

3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \dots, \eta_n$ – две независимые нормальные совокупности, взятые из нормальных распределений с единичной дисперсией. Для первой выборки математическое ожидание равно μ_1, для второй оно равно μ_2. Проверьте гипотезу $\mu_1 = \mu_2$ при альтернативе $\mu_1 < \mu_2$.

Билет № 20

1. Представление о температуре как о характеристике случайных движений частиц. Броуновское движение. Формула Эйнштейна–Смолуховского.
2. Теорема Вейерштрасса о минимуме полунепрерывных функций на компакте конечномерного евклидова пространства.
3. Пусть $\mathcal{R} = l_2$ и линейный оператор A из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$ имеет вид

$$A\langle x_1 \dots, x_n, \dots \rangle = \langle \lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, \dots \rangle.$$

При каком условии на последовательность $\{\lambda_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ данный оператор ограничен и чему равна его норма?

Билет № 21

1. Уравнения Максвелла. Электромагнитная теория света. Волновое уравнение как следствие уравнений Максвелла.
2. Реляционная модель данных: отношение, операции над отношениями (перестановка, проецирование, объединение, натуральное объединение, композиция, натуральная композиция).
3. Найдите минимум функции $J(u_1, u_2) = u_1 + u_2$ двух действительных переменных u_1, u_2 на множестве, ограниченном неравенствами $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$, $u_1 - u_2 \leqslant 1$.

Билет № 22

1.Фермионы и бозоны. Теорема о связи спина и статистики. Распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна.
2. Банахово пространство ограниченных линейных операторов. Гильбертово пространство операторов Гильберта–Шмидта.
3. С помощью начального момента первого порядка найдите оценку параметра показательного распределения по выборке объёма n. Является ли эта оценка максимально правдоподобной?

Билет № 23

1. Магнитное поле. Закон Био–Савара–Лапласа и теорема о циркуляции магнитного поля. Векторный потенциал магнитного поля. Ферромагнетики, диамагнетики, парамагнетики, их свойства. Электромагнитная индукция.
2. Линейные операторы. Нуль-пространство и пространство значений оператора. График оператора. Замкнутые операторы. Теорема о замкнутом графике.
3. Пусть $\mathcal{R}^n$ – евклидово пространство размерности n и a, z – заданные элементы из $\mathcal{R}^n$. Сведите к задаче линейного программирования следующую задачу:

$$\inf_{u} \max_{i=1,\dots,n} |a_i u_i - z_i|, \qquad u = (u_1, \dots, u_n), \quad a = (a_1, \dots, a_n).$$

Билет № 24

1. Основы специальной теории относительности. Преобразования Лоренца. Интервал. Изменение промежутков времени при переходе к другой системе отсчёта. Лоренцево сокращение.
2. Эмпирическое восстановление модели неопределённого нечёткого объекта.
3. Постройте приближённый доверительный интервал для параметра распределения Пуассона по выборке объёма .