Подсекция:

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ

И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Сопредседатели
профессор В.Ф.Бутузов, профессор В.Ч.Жуковский,
профессор Б.И.Садовников

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА КРИСТАЛЛОВ В КОРРЕЛЯЦИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Профессор Николаев П.Н.

Метод корреляционного разложения является исключительно важным подходом при построении статистической термодинамики [1,2]. В наибольшей мере это проявляется при описании кристаллического состояния вещества. Данный подход начал использоваться еще в основополагающих работах Эйнштейна [3]. Но в силу того, что при низких температурах в то время он не был способен описать поведение теплоемкости при стремлении абсолютной температуры к нулю, в дальнейшем стал использоваться подход, основанный на введении представлений о фононном спектре как точном решении задачи N тел в гармоническом приближении.

При исследовании твердых тел вблизи температуры плавления, а также сильно ангармонических кристаллов при произвольных температурах, было показано, что гармоническое приближение как основное здесь не применимо [4]. В этом случае удобнее использовать корреляционное приближение. В то же время встал вопрос о том, насколько применимо корреляционное разложение при низких температурах.

Для решения данной проблемы в настоящей работе используется метод Боголюбова для матриц плотности [5]. Здесь решается квантовая цепочка уравнений для таких матриц. Рассматриваются системы с двухчастичным взаимодействием. В этом случае достаточно найти бинарную матрицу плотности. Это позволяет определить внутреннюю энергию и давление кристалла в корреляционном приближении. Обобщение на системы с многочастичным взаимодействием очевидно. В отличие от однородных систем проблема термодинамического согласования уравнений состояния для упорядоченных систем не является определяющей. Поэтому найденные с использованием двухчастичной матрицы плотности уравнения состояния, как правило, термодинамически согласованы в пределах используемой точности рядов теории возмущений.

Выражение для внутренней энергии позволяет найти энергию основного состояния системы в виде корреляционного разложения. Аналогичное выражение может быть получено и в рамках модели Дебая, а также как точное решение задачи в гармоническом приближении для определенной структуры кристалла. Таким образом, можно сопоставить различные подходы и сравнить результаты основных приближений.

Расчеты, проведенные для корреляционного разложения, показали, что корреляционные вклады позволяют говорить о сходящемся ряде теории возмущений даже при нулевой температуре. В итоге мы имеем связь между температурами Эйнштейна и Дебая, а также средней скоростью звука. Это позволяет оценить степень точности полученных теоретических результатов по имеющимся экспериментальным данным. Кроме того, мы получаем целый ряд соотношений, связывающих независимо полученные экспериментальные данные [6].

Для ускорения сходимости рядов корреляционной теории возмущений использование того или иного подхода определяется рассматриваемой областью фазовой диаграммы и особенностями потенциала взаимодействия. В рассматриваемой низкотемпературной области в большинстве случаев можно ограничиться методом аппроксимант Паде, за исключением сильно ангармонических кристаллов. В последнем случае важен учет короткодействующих корреляций и ускорение скорости сходимости следует проводить на основе анализа поведения статистической суммы. Это особенно актуально при изучении кристаллов гелия. Для них само корреляционное разложение не сопряжено с какими-либо дополнительными проблемами по сравнению с обычными кристаллами. Но в силу особенностей системы, связанных со слабостью взаимодействия частиц по сравнению с их средней кинетической энергией, в данном случае совершенно особое место занимает проблема учета ангармонических членов [7].

Проведение корреляционного разложения для многосортных атомных кристаллов принципиально не отличается от односортных систем. Трудности здесь носят технический характер [8]. Для простейших многосортных систем ионных кристаллов полученные результаты аналогичны результатам для одноатомных кристаллов. При изучении молекулярных кристаллов со сложной структурой молекул ситуация существенно изменяется. Для проведения реальных количественных оценок необходимо ввести целый ряд дополнительных соображений, позволяющей сохранить реализм поставленной задачи. Но и в этом случае безусловна ценность корреляционного разложения как метода, позволяющего получить результаты исходя из первых принципов статистической механики.

Литература

1. Николаев П.Н. //Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика, астрономия. 2002. № 1. С. 14
2. Cowley E.R.// Phys. Rev. B. 1999. V. 60. P. 14500
3. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 3. М.: Наука. 1966. С. 134
4. Bazarov I.P., Nikolaev P.N. //Russian Journal of Physical Chemistry. 2001. V. 75. Suppl. 1. P. S159
5. Боголюбов Н.Н.// Избранные труды в трех томах. Т. 2. Киев: Наукова думка. 1970. С. 225
6. Николаев П.Н.//В сб. трудов XV международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». М. 2007. С. 481
7. Arms D.A., Shah R.S., Simmons R.O. //Phys. Rev. B 2003. V. 67. 094303

8. Polyakov P., Zhang M., Muller-Plathe F., Wiegand S.// J. Chem. Phys. 2007. V. 127. 014502

ОБ УРАВНЕНИЯХ КВАНТОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ БОЗОНОВ И ФЕРМИОНОВ С КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Профессор *Кузьменков Л.С.*, физик *Андреев П.А.*

Экспериментальные результаты по атомарному Бозе-Эйнштейновскому конденсату (БЭК) в последнее время дают возможность проверки и подтверждения основных положений квантового теоретического изучения систем многих частиц (1). Во многих экспериментах Бозе атомы находятся в магнитных ловушках, так что спиновые степени свободы «выморажены» (2). Поэтому формально можно рассматривать частицы как бесспиновые. Такому приближению соответствует уравнение Гросса-Питаевского (Г.П.) (3). Уравнение Г.П. и его обобщения на случай бозон-фермионных (4)-(6) смесей составляют основу аппарата теоретических исследований ультрахолодных атомов в магнитных ловушках. Состояние системы многих частиц при таком подходе задается при помощи эффективной волновой функции трех пространственных переменных и времени или «параметром порядка» в отличие от точного квантовомеханического описания при помощи многочастичной волновой функции. Переход к полевому описанию системы частиц является по существу переходом к квантовой гидродинамике. Альтернативный подход может быть сформулирован на основании численного анализа многочастичного уравнения Шредингера. Из сказанного выше следует, что уравнение Г.П., отражающее существенные черты БЭК должно непосредственно вытекать из уравнений квантовой гидродинамики, в которых все функции трех переменных и времени имеют ясный физический смысл. Другой подход в результате которого может быть установлена связь между уравнением Г.П. и многочастичным уравнением Шредингера представлен в работе (7).

В предлагаемой работе дается вывод выражения для тензора напряжений в квантовом уравнении баланса импульса и на этой основе- уравнения Г.П.. Найдено также обобщения Г.П. на случай ультрахолодных бозон-бозонных и бозон-фермионных смесей, содержащие поправочные слагаемые к приближению Гросса-Питаевского для системы бозонов в отсутствии примесей. Вывод соответствующих уравнений выполнен в рамках квантовогидродинамического подхода (8),(9) при явном предположении об электрической нейтральности частиц и о короткодействующем характере взаимодействия между частицами.

Показано, что поля сил описывающих взаимодействие в квантовомеханических системах бозонов или фермионов представляется в виде дивергенции тензора который, по аналогии с классической гидродинамикой, может быть назван квантовым тензором напряжений.

Исходя из уравнения Шредингера с гамильтонианом:

$$\hat{H}=\sum_{i}\left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}+V_{i(ext)}(t)\right)+\frac{1}{2}\sum_{i_b,j_b}U_{i_bj_b}(\vec{r}_{i_b}-\vec{r}_{j_b})+\frac{1}{2}\sum_{i_f,j_f}U_{i_fj_f}(\vec{r}_{i_f}-\vec{r}_{j_f})+\sum_{i_b,i_f}U_{i_bi_f}(\vec{r}_{i_b}-\vec{r}_{i_f}),$$

(1)

в котором $U_{i_bj_b}, U_{i_fj_f}, U_{i_bi_f}$ – потенциалы взаимодействия между бозонами, фермионами, и между бозонами и фермионами, соответственно. Все эти потенциалы вообще говоря различны. Индекс i в формуле (1) пробегают значения от 1 до N, где N полное число частиц в системе, как бозонов, так и фермионов. Индексы i_b, j_b, i_f, j_f нумеруют только бозоны и фермионы соответственно.

Вводя, как и в (8), (9) концентрацию каждой компоненты и дифференцируя их по времени, приходим к известным уравнениям непрерывности. Дифференцирование по времени возникающих при этом выражений для токов приводит к уравнениям баланса импульса.

Уравнения баланса импульса оказываются незамкнутыми, они содержат тензоры плотности потока импульса каждой компоненты и двухчастичные концентрации.

Разлагая N частичную волновую функцию по полному ортонормированному набору одночастичных волновых функций, используя явно тот факт, что потенциалы взаимодействия быстро спадают на расстояниях порядка радиуса взаимодействия и ограничиваясь членами кубическими по радиусу взаимодействия, получаем выражения для квантовых тензоров напряжений отдельно для бозонов и фермионов, а также полей сил взаимодействия между бозонами и фермионами содержащих концентрации частиц, токи, тензоры плотности потока импульса и одночастичные волновые функции обеих компонент.

Каждой паре уравнений непрерывности и баланса импульса, при условии потенциальности поля скоростей и диагональности тензора кинетического давления можно сопоставить некоторое интегро-дифференциальное уравнение для скалярной комплексной функции, определенной как: $\sqrt{n(\vec{r},t)}\exp(\frac{i}{\hbar}m\phi(\vec{r},t))$, где $n(\vec{r},t)$ это концентрация, $\phi(\vec{r},t)$ - потенциал поля скоростей, m -масса атомов рассматриваемой компоненты.

Используя в качестве произвольных одночастичных волновых функций построенные таким образом макроскопические одночастичные функции, мы получаем самосогласованную систему уравнений для концентрации, поля скоростей и одночастичных волновых функций.

Макроскопическую одночастичную функцию можно найти используя метод итераций, пренебрегая взаимодействием в уравнении типа Шредингера в первом приближении. Тогда макроскопическая одночастичная функция будет иметь вид плоской волны. Используя далее полученное таким образом решение в уравнениях баланса импульса фермионов и бозонов, полагая равной нулю температуру и, что все бозоны находятся в состоянии БЭК, получаем следующую систему уравнений замкнутую относительно функций концентрации и поля скоростей.

В частном случае для системы Бозе атомов в отсутствии примесей, в первом приближении по радиусу взаимодействия мы приходим к системе уравнений непрерывности и баланса импульса. Уравнение Г.П. при этом появляется в качестве интеграла Коши-Лагранжа.

Преимущество приведенного вывода уравнения Г.П. состоит в том, что он дает явный вид для «константы связи», а также дает возможность получить следующие по радиусу взаимодействия поправки.

Литература

1. See http://amo.phy.gasou.edu/bec.html/bibliography.html

2. Anderson M. H., Ensher J. R., Matthews M. R., Wieman C. E. and Cornell E. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor A 1995 *Science* **269** 198

3. Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L.P., Stringari S. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases // Rev. Mod. Phys. 71, p.463 (1999)

4. Rothel S., Pelster A. Density and stability in ultracold dilute boson-fermion mixtures // Eur. Phys. J. B. 59, p.343 (2007)

5. Belemuk A.M., Ryzhov V.N.,Chui S.-T. Stable and unstable regimes in Bose-Fermi mixtures with attraction between components // Phys. Rev. A.76, p.013609 (2007)

6. Adhikari S.K., Salaasnich L. Mixing-demixing transition and collapse of a vortex state in a quasi-two-dimensional boson-fermion mixture // Phys. Rev. A.75, p.053603 (2007)

7. Erdos L., Schlein B., Yau H.-T. Rigorous Derivation of the Gross-Pitaevskii Equation // Phys. Rev. Lett. 98, p.040404 (2007)

8. Кузьменков Л.С., Максимов С.Г. Квантовая гидродинамика систем частиц с кулоновским взаимодействием и квантовый потенциал Бома // ТМФ. 118, с.287 (1999)

9. Андреев П.А., Кузьменков Л.С. Об уравнениях эволюции коллективных явлений в системах фермионов // Известия Вузов. Физика. N12, с.74 (2007)

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ НЕЙТРИНО В ПЛОТНОЙ СРЕДЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Доцент *Арбузова Е.В.* (Международный университет «Дубна»),
вед.науч.сотр. *Лобанов А.Е.*, аспирантка *Мурчикова Е.М.*,
доцент *Павлова О.С.*

При квантовомеханическом описании взаимодействия релятивистской частицы с внешней средой для классификации ее состояний требуется найти полную систему решений волнового уравнения, а также полный набор операторов, которые являются интегралами движения, т.е. коммутируют с оператором волнового уравнения. Для свободной релятивистской частицы со спином 1/2, описываемой уравнением Дирака, полным набором могут служить, например, оператор канонического импульса и оператор проекции спина на направление импульса. Однако для частицы, взаимодействующей с внешними полями, возникает проблема интерпретации наблюдаемых величин, т. к. в релятивистской квантовой механике наблюдаемыми могут считаться только интегралы движения [1]. Данная проблема только усугубляется, если частица имеет аномальный магнитный момент.

Еще в работе [2] нами были получены решения уравнения Дирака-Паули для нейтральной частицы, обладающей аномальным магнитным моментом, во внешних электромагнитных полях специального вида. Эти решения можно представить как результат действия некоторого, вообще говоря, интегрального, оператора на решения уравнения для свободной частицы. Если решения для свободной частицы выбрать в виде плоских волн, то действие указанного оператора сводится к умножению на матричную функцию, которая зависит от некоторого параметра q^{μ}. Этот параметр удовлетворяет условию $q^2=m^2$, где m — масса частицы, вследствие чего его можно интерпретировать как кинетический импульс частицы во внешнем поле. Кроме компонент кинетического импульса в полный набор операторов должен входить оператор проекции спина. В нашем случае спиновые операторы можно представить как свертки вектора Паули-Любаньского-Баргмана с пространственноподобными нормалями $S^{\mu}(q)$ [3]. Таким образом, задача интерпретация наблюдаемых в данном случае была решена. Впоследствии решения указанного вида были обобщены на случай аксиального взаимодействия частиц с постоянным векторным конденсатом [4-6]. Отметим, что взаимодействие такого типа может быть использовано для феноменологического описания распространения нейтрино в плотной среде, состоящей из фермионов (см., например, [7]).

Конечно, наличие полной системы решений позволяет задать действие операторов полного набора на функции из области их определения.

Однако во многих отношениях интересно знать и явный вид этих операторов. Это имеет особый смысл, если указанные операторы можно задать как псевдодифференциальные. Поэтому в работе [8] мы получили явный вид операторов полного набора для нейтральной частицы с аномальным магнитным моментом в наиболее простом случае, когда внешнее электромагнитное поле, с которым частица взаимодействует, является постоянным и однородным.

Вид полученных спиновых операторов показывает, что наши решения могут описывать состояние нейтральной частицы, которая движется с постоянной скоростью и спин которой прецессирует вокруг направления магнитного поля в системе покоя частицы $\mathbf{H}_0$ с частотой $2m|\mathbf{H}_0|/q^0$. Данное состояние является чистым состоянием. Подчеркнем, что существование плосковолновых решений уравнения Дирака-Паули, описывающих чистые состояния нейтральной частицы, проекция спина которой на фиксированную в пространстве ось не сохраняется, возможно только при использованном нами выборе в качестве квантовых чисел компонент кинетического импульса.

Рассмотрим теперь к каким следствиям приводят полученные нами результаты при описании поведения нейтрино, — единственного известного в настоящее время стабильного нейтрального фермиона. Как в пионерской работе [9], так и в других, посвященных изучению влияния постоянного чисто магнитного поля на характер осцилляций нейтрино, в качестве волновых функций частицы использовались стационарные решения $\Psi_{p\zeta}(x)$, впервые найденные в [10]. Эти решения являются собственными функциями оператора канонического импульса и спинового оператора с собственным значением ζ. Предполагалось, что в заданный момент времени среднее значение спиральности нейтрино равно по модулю единице, а дальнейшая эволюция спина описывается линейными комбинациями указанных выше волновых функций $\Psi(x)=\Sigma_{\zeta=\pm 1}\, \alpha_\zeta(p)\Psi_{p\zeta}(x)$.

Однако в общем случае такое описание некорректно. Так как стандартный оператор спиральности $(\mathbf{\Sigma p})/|\mathbf{p}|$ не коммутирует с оператором уравнения Дирака-Паули, то из основных принципов квантовой механики следует, что состояние частицы с фиксированным каноническим импульсом, имеющей в заданный момент времени среднее значение спиральности равное по модулю единице, может быть только смешанным по спину, кроме частного случая, когда нейтрино распространяется перпендикулярно магнитному полю (см. [11]). Но в смешанном состоянии изменение поляризации пучка нейтрино может быть обусловлено исключительно различием групповых скоростей его компонентов, следующим из вида закона дисперсии. Этот эффект должен исчезать на больших расстояниях от источника вследствие того, что пучок перестает быть когерентным. Полученные же нами результаты позволяют трактовать возможный эффект изменения поляризации нейтрино в электромагнитном поле как реальную прецессию спина частицы.

Литература

1. Landau L.D., Peierls R. Zs. f. Phys. 1931. **69**. P. 56.
2. Лобанов А.Е., Павлова О.С. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.1999. № 4. С. 3.
3. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М: Наука, 1987.
4. Lobanov A.E. Phys. Lett. B. 2005. **619**. P. 136.
5. Лобанов А.Е., Мурчикова Е.М. Вестник Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 2, С. 11.
6. Arbuzova E.V., Lobanov A.E., Murchikova E.M. arXiv0711.2649 [hep-ph].
7. Wolfenstein L. Phys. Rev. D. 1978. **17**. P. 2369.
8. Арбузова Е.В., Лобанов А.Е., Павлова О.С. Препринт физического факультета МГУ № 7/2008.
9. Fujikawa K., Shrock R.E Phys. Rev. Lett.1980. **45.** P. 963.
10. Тернов И.М., Багров В.Г., Хапаев А.М. ЖЭТФ. 1965. **48**. С. 921.
11. Борисов А. В., Жуковский В. Ч., Тернов А. И. Изв. вузов, Физика. 1988. №3. С. 64.

ДИНАМИКА ГОРИЗОНТА ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Профессор *Василенко О.И.*

В последнее время значительный интерес привлекает гипотеза решения проблемы иерархии взаимодействий в рамках предположений о наличии дополнительных измерений и величины многомерной планковской массы порядка $O(TeV)$, которая может быть проверена в экспериментах на LHC по генерации чёрных дыр [1].

Введём систему координат в пространстве Минковского $(\overline{u}=\overline{t}-\overline{z},\overline{v}=\overline{t}+\overline{z},\overline{x}^i)$, $i=1,2$. Частицы движутся навстречу вдоль оси $\overline{z}$ с прицельным параметром b и поперечными координатами $\overline{x}^1=\pm b/2,\overline{x}^2=0$. Метрика для одиночной ультрарелятивистской частицы с полной энергией μ, движущейся в направлении $+z$ с $\overline{x}^{1,2}=0$, описывается решением Айчельбурга-Сексла, имеющим форму ударной волны, $ds^2=-d\overline{u}d\overline{v}+d\overline{x}^{i2}+\Phi(\overline{x}^i)\delta(\overline{u})d\overline{u}^2$. Функция $\Phi=-2a\ln(\overline{r})$ зависит только от поперечного радиуса $\overline{r}=\sqrt{\overline{x}^i\overline{x}_i}$. Здесь $a=4G\mu$, где G — гравитационная постоянная. Сингулярность метрики можно устранить введением новых координат (u,v,x^i) $\bar{u}=u,\bar{v}=v+\Phi\theta(u)+\dfrac{u\theta(u)(\nabla\Phi)^2}{4},\bar{x}^i=x^i+\dfrac{u}{2}\nabla_i\Phi\,\theta(u)$, в которых геодезические и их касательные непрерывны на поверхности ударной волны при $u=0$. Метрика является плоской везде кроме поверхности ударной волны $\bar{u}=0$. Поэтому для описания двух частиц во время $\bar{t}<0$ до момента столкновения можно объединить её с аналогичной метрикой второй частицы, движущейся вдоль $\bar{v}=0$ в направлении $-z$, полагая общим плоское пространство в области между ударными волнами.

Рассмотрим следующее сечение пространства-времени [3]: *область* R_+: $\quad t=z, \qquad t\le T,$

область R_I: $\quad t=T, \quad T\le z\le -T$, *область* R_-: $\quad t=-z, \quad t\le T$. Здесь $T\le 0$ и столкновение происходит при ($T=0, z=0$). Образование чёрной дыры при столкновении означает, что в его процессе формируется пространственно-временная область, из которой геодезические не могут уйти в бесконечность. Ловушечная поверхность (горизонт) определяется как граница этой области. Определим внешние ловушечные поверхности M_+ и M_- в областях R_+ и R_- выражениями $u=+0, \quad v=-\Psi_+(x^1,x^2)$ и $v=+0, \quad u=-\Psi_-(x^1,x^2)$. В момент столкновения ловушечные поверхности $M_\pm$ должны объединиться в одну непрерывную и гладкую поверхность. Это требование достаточно для определения функций $\Psi_\pm$. Они найдены в работе [2] и могут быть представлены в виде

$$\Psi_\pm=-a\ln\left[\frac{e^{2k(\pm x^1-b/2)}-2e^{k(\pm x^1-b/2)}\cos(kx^2)+1}{1-e^{-kb}}\right],$$

где k удовлетворяет соотношению $e^{kb}-1=(ka)^2$. Замкнутые линии $C_\pm$, образованные пересечениями ловушечных поверхностей $M_\pm$ с границами $(z=\pm T)$ области R_I, описываются выражениями $\cosh[k(x^1 \mp x_b)]=e^{k(b/2-x_b)}\cos(kx^2), \quad 1-e^{k(x_b-b/2)}=\left(1-e^{-kb}\right)e^{2T/a}.$

Определим ловушечную поверхность M_I в области R_I как $t=T=const, \qquad z=f(x^1,x^2)$. Нулевая геодезическая, ортогонально пересекающая ловушечную поверхность в точке $(T,x_0^1,x_0^2,z_0=f(x_0^1,x_0^2)\equiv f_0)$, является прямой линией. Сдвиг точек поверхности M_I вдоль подобных геодезических на расстояние τ преобразует её в поверхность $M_I(\tau)$. Вводя метрику g_{ij} на $M_I(\tau)$ как $(d\vec{r},d\vec{r})=g_{ij}dx_0^i dx_0^j$, представим площадь участка $M_I(\tau)$ в виде

$$S_I(\tau) = \int \sqrt{|g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}|}dx_0^1 dx_0^2. \tag{1}$$

Согласно основному свойству ловушечной поверхности ортогональные ей и направленные в будущее световые геодезические локально сходятся. Это означает, что площадь $S_I(\tau)$ должна уменьшаться с увеличением малого параметра $|\tau|$ независимо от его знака. Следовательно, уравнение для f можно получить, раскладывая правую часть (1) по степеням τ и полагая линейный член равным нулю,

$$(1+f_{x^2}{}^2)f_{x^1x^1} + (1+f_{x^1}{}^2)f_{x^2x^2} - 2f_{x^1}f_{x^2}f_{x^1x^2} = 0. \tag{2}$$

Для нахождения формы внутренней ловушечной поверхности M_I необходимо найти решение уравнения (2) в области R_I, в котором функция f принимает значения $\pm T$ на граничных контурах $C_\pm$. Будем искать вид функции $f(x^1, x^2) = z$ в неявной форме, предполагая, что она удовлетворяет соотношению $\cosh\left[k\left(x^1 - x_m(kz)\right)\right] = p(kz)\cos\left(kx^2\right)$. Соотношение (2) будет при этом выполняться, если функции x_m и p удовлетворяют уравнениям $x_m''\left(p^2-1\right) - 2x_m' pp' = 0,$ $\left(p'' - p\left(1 + x_m'^2\right)\right)\left(p^2-1\right) - 2pp'^2 = 0.$ Их решение можно представить в параметрической форме как

$$kz(p) = \mathrm{sign}(z)\int_{p_0}^{p} \frac{p_0^2-1}{\xi^2-1}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-p_0^2)\left(k^2c^2+\frac{p_0^2-1}{\xi^2-1}\right)}},$$

$$x_m(p) = -\mathrm{sign}(z)\int_{p_0}^{p} \frac{c\,d\xi}{\sqrt{(\xi^2-p_0^2)\left(k^2c^2+\frac{p_0^2-1}{\xi^2-1}\right)}}.$$

Параметры c и p_0 зависят от T и определяются из условий непрерывности ловушечной поверхности на границах внутренней и внешней областей, т.е. решение должно иметь следующий вид на $C_\pm$: $|z(p_b)| = -T,\quad |x_m(p_b)| = x_b,\quad p_b = e^{k(b/2-x_b)}.$

Для данного b существуют два значения $k: k_1(b) < k_2(b)$. Прицельный параметр b достигает своего максимального значения $b_{max} = 0.8047a$ при $k = 1.98/a$, что даёт ограничение на сечение образования чёрной дыры при столкновении двух частиц [2]. Ловушечная поверхность возникает при $T = T_{min}$. Для данного b существуют два значения $T_{min}: T_{min1} < T_{min2}$, соответствующие $k_1(b)$ и $k_2(b)$. Зависимость между параметрами c и T также двузначна. Процесс формирования горизонта выглядит следующим образом. Горизонт появляется в момент времени $T = T_{min1}$. При $T_{min1} < T < T_{min2}$ возможно существования двух форм ловушечной поверхности. Одна из них (внутренняя) располагается внутри другой (внешней). С увеличением времени T $(z=0)$-размер внутренней поверхности уменьшается, а внешней — растет. В момент времени $T=T_{min2}$ возможно появление двух других ловушечных поверхностей с аналогичными свойствами.

Можно ожидать, что описанная выше картина образования и динамики ловушечной поверхности качественно описывает процесс формирования горизонта при ненулевом прицельном параметре столкновения и в случае большего числа измерений.

Литература

1. S. B. Giddings, arXiv:0709.1107 [hep-ph]; P. Kanti, arXiv:0802.2218 [hep-th].
2. D. M. Eardley and S. B. Giddings, arXiv:gr-qc/0201034.
3. О. И. Василенко // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2004, № 4, С. 42–45; O. I. Vasilenko, arXiv:hep-th/0305067

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ В СЛУЧАЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КОРНЕЙ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Профессор *Бутузов В.Ф.*, аспирант *Костин А.В.*

Рассматривается сингулярно возмущённая эллиптическая система двух уравнений

$$\varepsilon^2 \Delta u = g(u,v,x,\varepsilon)\ , \quad \Delta v = f(u,v,x,\varepsilon), \quad x=(x_1,x_2)\in D \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0, \quad v=v^0(x), \quad x\in \Gamma . \qquad (2)$$

Здесь ε ф 0 – малый параметр; Δ – оператор Лапласа; D – ограниченная область с гладкой границей Г; $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к Г; g, f, v^0 – достаточно гладкие функции.

Условие 1. Пусть функция g(u,v,x,ε) представима в виде

$$g(u,v,x,\varepsilon)=h(u,v,x)(u-\varphi_1(v,x))(u-\varphi_2(v,x))-\varepsilon g_1(u,v,x,\varepsilon) \qquad (3)$$

где $h(u,v,x)$ ф 0.

Из условия 1 следует, что уравнение

$$g(u,v,x,0)=0 \qquad (4)$$

имеет два корня u=φ_1(v,x) и u=φ_2(v,x).

Условие 2. Пусть существует гладкая поверхность $v = v_0(x)$, $x \in \overline{D}$, такая, что для $x \in \overline{D}$ выполнены соотношения

$$\varphi_1(v,x) \text{ f } \varphi_2(v,x) \quad \text{при} \quad v \,\pi\, v_0(x),$$

$$\varphi_1(v_0(x),x) = \varphi_2(v_0(x),x),$$

$$\varphi_1(v,x) \text{ p } \varphi_2(v,x) \quad \text{при} \quad v \text{ f } v_0(x).$$

Условие 2 означает, что корни $\varphi_1(v,x)$ и $\varphi_2(v,x)$ уравнения (4) пересекаются. Используя эти корни, построим решение вырожденной задачи. При этом построении важную роль играет соотношение между функциями $v^0(x)$ и $v_0(x)$ Ограничимся рассмотрением следующего случая.

Условие 3. Пусть $v^0(x) \text{ p } v_0(x)$, $x \in \varGamma$.

При этом условии рассмотрим две краевые задачи

$$\Delta v = f(\varphi_1(v,x),v,x,0), \;\; x \in D_1; \quad v = v^0(x),\; x \in \varGamma;\; v = v_0(x)\; x \in C; \quad (5)$$

$$\Delta v = f(\varphi_2(v,x)v,x,0), \;\; x \in D_2; \quad v = v_0(x),\; x \in C, \quad (6)$$

где C — замкнутая кривая, лежащая в области D и разбивающая её на две подобласти D_1 и D_2:
D_2 – внутри C, D_1=D\D_2.

Условие 4. Пусть существует простая гладкая замкнутая кривая $C \subset D$, такая, что задачи (5) и (6) имеют решения $v = v_1(x)$ и $v = v_2(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$v_1(x) \text{ p } v_0(x), \;\; x \in D_1; \;\; v_2(x) \text{ f } v_0(x), \;\; x \in D_2; \;\; \frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{\partial v_2}{\partial n}, \;\; x \in C,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к C.

Введём функцию

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} v_1(x), & x \in \overline{D}_1 \\ v_2(x), & x \in \overline{D}_2 \end{cases},$$

и положим $\hat{u} = \varphi(\hat{v}(x),x)$, где $\varphi(v,x) = \varphi_1(v,x)$ при $v \le v_0(x)$, $\varphi(v,x) = \varphi_2(v,x)$ при $v \ge v_0(x)$.

Условие 5. Пусть $g_1(\varphi_i(v_0(x),x),v_0(x),x,0) > 0$, $x\in\overline{D}$, где g_1 — функция из (3).

Ещё одно требование связано с задачей Штурма–Лиувилля

$$\Delta w+\lambda w=0,\quad x\in D;\quad w=0,\ \ x\in\Gamma. \tag{7}$$

Условие 6. Пусть существует число $\beta > 0$, такое, что

$$\left|\varphi_v(\hat{v}(x),x)\right| < \beta,\quad -\left|f_u(\hat{u}(x),\hat{v}(x),x,0)\right|\beta+f_v(\hat{u}(x),\hat{v}(x),x,0) > -\lambda_0,\quad x\in\overline{D}$$

где λ_0 — главное (наименьшее) собственное значение задачи (7).

Теорема 1. *Если выполнены Условия 1-6, то для достаточно малых* ε *задача (1), (2) имеет решение* $u_s(x,\varepsilon),v_s(x,\varepsilon)$ *, удовлетворяющее предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u_s(x,\varepsilon)=\hat{u}(x),\ \ \lim_{\varepsilon\to 0}v_s(x,\varepsilon)=\hat{v}(x),\ \ x\in\overline{D}.$$

Решение $u_s(x,\varepsilon),v_s(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) является стационарным решением соответствующей системы параболических уравнений

$$-u_t+\varepsilon\Delta u=g(u,v,x,\varepsilon),\quad -v_t+\Delta v=f(u,v,x,\varepsilon),\quad x\in D,\ t>0 \tag{8}$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t,\varepsilon)=0,\ \ v(x,t,\varepsilon)=v^0(x),\quad x\in\Gamma,\ t\geq 0. \tag{9}$$

Встаёт вопрос об устойчивости стационарного решения $u_s(x,\varepsilon),v_s(x,\varepsilon)$ задачи (8), (9).

Теорема 2. *Если выполнены Условия 1-6, то при достаточно малых* ε *стационарное решение* $u_s(x,\varepsilon),v_s(x,\varepsilon)$ *параболической задачи (8), (9) является асимптотически устойчивым.*

Теоремы 1 и 2 доказываются с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ "РЕАКЦИЯ-АДВЕКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ".

доцент *Никитин А.Г.*

Математические задачи для уравнения адвекция-реакция-диффузия имеют много важных практических приложений в химической кинетике, синергетике, астрофизике, биологии и других областях естествознания. Во многих важных случаях решения этих задач имеют пограничные и внутренние слои внутренние слои ([1], [2] и ссылки в этой работе). В настоящее время большой интерес вызывают более сложные модели, которые включают эффекты обратной связи или нелокального взаимодействия. Эти модели представлены интегродифференциальными уравнениями(см. [3, 10, 11]). В докладе представлены результаты по движущимся и стационарным внутренним слоям для таких задач ([4 - 7]).

Приведем более подробно результат для случая движущегося внутреннего слоя (фронта) ([7]). Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}-\int_a^b g(u(x,t,\varepsilon),u(s,t,\varepsilon),x,s,\varepsilon)ds=0, \quad a<x<b, \quad t\in(0,T], \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,t,\varepsilon)=\frac{\partial u}{\partial x}(b,t,\varepsilon)=0, \qquad u(x,0,\varepsilon)=u^0(x,\varepsilon), \tag{2}$$

для которой показано существование решений, имеющих движущиеся внутренние слои. Здесь, $A(x,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,s,\varepsilon)$ - достаточно гладкие функции (их фактическая степень гладкости определена ниже), $u^0(x,\varepsilon)$ - некоторая начальная функция, имеющая вид внутреннего переходного слоя, ε - малый параметр. Соответствующая стационарная краевая задача для случая $A(x,\varepsilon)\equiv 0$ рассмотрена в [5]. Результаты развивают методы, предложенные в [5] и [8] на более сложный класс задач.

Вырожденное уравнение

$$\int_a^b g(u(x,t,\varepsilon),v(s,t,\varepsilon),x,s,\varepsilon)ds=0,\ a<x<b, \tag{3}$$

является интегральным. Следуя подходу, предложенному в [5], для описания внутреннего переходного слоя предполагается существование у вырожденной задачи (3) семейства разрывных решений, а именно, требуется выполнения следующего условия.

Условие I. *Пусть существуют две функции*

$$\varphi^{(-)}(x,y) \in C_{xy}(\Omega^{(-)}), \quad \Omega^{(-)} \equiv \{(x,y): a \le x \le y \le b\} \ ,$$

$$\varphi^{(+)}(x,y) \in C_{xy}(\Omega^{(+)}), \quad \Omega^{(+)} \equiv \{(x,y): a \le y \le x \le b\} \ ,$$

которые для любого заданного $y \in (a,b)$ *удовлетворяют системе двух связанных интегральных уравнений*

$$\int_a^y g(\varphi^{(-)}(x,y), \varphi^{(-)}(s,y), x, s, 0)ds +$$

$$+\int_y^b g(\varphi^{(-)}(x,y), \varphi^{(+)}(s,y), x, s, 0)ds = 0, \ a < x < y,$$

$$\int_a^y g(\varphi^{(+)}(x,y), \varphi^{(-)}(s,y), x, s, 0)ds +$$

$$+\int_y^b g(\varphi^{(+)}(x,y), \varphi^{(+)}(s,y), x, s, 0)ds = 0, \ y < x < b,$$

и

$$\varphi^{(-)}(y,y) < \varphi^{(+)}(y,y), \qquad a < y < b.$$

Пусть также выполняется неравенство

$$\int_a^b g_u(\varphi^{(i)}(x,y), \varphi(s,y), x, s, 0)ds > 0 \qquad (i = -,+),$$

где

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x,y), \ x \in \Omega^{(-)}, \\ \varphi^{(+)}(x,y), \ x \in \Omega^{(+)}, \end{cases}$$

и существует непрерывное решение $\varphi_0(x)$, *такое что*

$$\varphi^{(-)}(y,y) < \varphi(y) < \varphi^{(+)}(y,y), \qquad a \le y \le b,$$

$$\int_a^b g_u(\varphi_0(x), \varphi_0(s), x, s, 0)ds < 0, \qquad a \le x \le b$$

(g_u *- производная функции* g *по первому аргументу).*

Показано, что при некоторых дополнительных предположениях, задача (1), (2) имеет решение с движущимся внутренним слоем, которое стремится к $\varphi(x, y(t))$, представленному в Условии I, при стремлении малого параметра ε к нулю.

Чтобы построить формальную асимптотику, рассматривается две вспомогательные задачи для системы связанных интегро-дифференциальных уравнений в областях $\Omega^{(-)}$ и $\Omega^{(+)}$. Неизвестная точка перехода $y(t) \equiv x^*(t,\varepsilon)$ ищется в виде ряда по степеням малого параметра

$$x^*(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) \tag{4}$$

и определяется из условия пересечения решения с непрерывным решением φ_0 .

Далее строятся погранслойные асимптотики $U^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ для вспомогательных задач системы связанных интегро-дифференциальных уравнений и используются пограничные слои вблизи точки $x^*(t,\varepsilon)$, чтобы описать внутренний переходный слой исходной задачи (1), (2). Чтобы найти члены асимптотического разложения (4) мы используем условие C^1-сшивания асимптотики в точке $x^*(t,\varepsilon)$. В нулевом приближении это приводит к определению $x_0(t)$ из нелинейного уравнения

$$x_0' = A(x_0,0) + \frac{\displaystyle\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0,x_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0,x_0)} \left[\int\limits_a^b g(u,\varphi(s,x_0),x_0,s,0)ds \right] du}{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}(\xi,x_0) \right)^2 d\xi},$$

где $\tilde{u}(\xi,x_0)$- функция, описывающая переходный слой в нулевом приближении, а $\xi = x - x^*(t,\varepsilon)$ - переменная переходного слоя. Это уравнение позволяет определить $x_0(t)$ для любой заданной начальной точки $x_0(0) = x_{00}$.

Условие II. *Пусть* $x_0' > 0$ *для любого* $x_0 \in [a,b]$.

Регулярные члены асимптотики следующих порядков определяются из связанных систем линейных интегральных уравнений, порожденных линеаризацией системы уравнений (3) на регулярном члене нулевого приближения $\varphi(x,y)$. Следующее условие является условием достаточным для разрешимости таких задач (заметим, что оно важно и для обоснования асимптотики).

Условие III. *Пусть система связанных интегральных неравенств*

$$w^{(-)}(x,y) + \int\limits_a^y K^{(--)}(x,s,y) w^{(-)}(s,y)ds + \int\limits_y^b K^{(-+)}(x,s,y) w^{(+)}(s,y)ds > 0,\ a \le x \le y,$$

$$w^{(+)}(x,y) + \int\limits_a^y K^{(+-)}(x,s,y) w^{(-)}(s,y)ds + \int\limits_y^b K^{(++)}(x,s,y) w^{(+)}(s,y)ds > 0,\ y \le x \le b,$$

где

$$K^{(ij)}(x,s,y)=\frac{g_v(\varphi^{(i)}(x,y),\varphi^{(j)}(s,y),x,s,0)}{\int\limits_a^b g_u(\varphi^{(i)}(x,y),\varphi(s,y),x,s,0)ds},$$

имеет положительное решение.

Выполнение ***Условий I-III*** позволяет построить формальную асимптотику решения задачи (1), (2) до членов любого порядка малости по степеням малого параметра ε .

Для доказательства существования решений, имеющих вид движущихся фронтов, используется асимптотический метод дифференциальных неравенств ([9]). Суть метода состоит в построении верхнего и нижнего решений (см. [3]) путем модификации построенной асимптотики. Дадим определение верхнего решения задачи (1), (2).

Определение I. *Функция* $\beta(x,t,\varepsilon)\in C\{[a,b]\times[0,T]\}\cap C^{2,1}\{(a,x^*(t)]\times[0,T]\}\cap C^{2,1}\{[x^*(t),b)\times[0,T]\}$, *где* $x^*(t)\in(a,b)$ *для* $t\in[0,T]$ *- гладкая функция, называется верхним решением задачи (1), (2), если*

1) $L[\beta]\le 0$ *для всех* $(x,t)\in\{(a,x^*]\times[0,T]\}\cap C^{2,1}\{[x^*,b)\times[0,T]\}$,

2) $\frac{\partial\beta}{\partial x}(x^*+0,t,\varepsilon)-\frac{\partial\beta}{\partial x}(x^*-0,t,\varepsilon)\le 0$,

3) $\frac{\partial\beta}{\partial x}(a,t,\varepsilon)\le 0$, *и* $\frac{\partial\beta}{\partial x}(b,t,\varepsilon)\ge 0$,

4) $\beta(x,0,\varepsilon)\ge u^0(x,\varepsilon)$,

где L *- интегродифференциальный оператор уравнения (1).*

Определение нижнего решения $\alpha(x,t,\varepsilon)$ будет аналогичным и отличается только изменением знаков неравенств в Определении I на противоположный**.** При обосновании построенного асимптотического приближения решения задачи (1), (2) используется следующая теорема о дифференциальных неравенствах ([3]).

Теорема I. *Пусть существуют функции* $\alpha(x,t,\varepsilon)$ *и* $\beta(x,t,\varepsilon)$ *такие, что*

(a) $\alpha(x,t,\varepsilon)$ *и* $\beta(x,t,\varepsilon)$*-нижнее и верхнее решения задачи (1), (2) соответственно*

(b) $\alpha(x,t,\varepsilon)\le\beta(x,t,\varepsilon)$

(c) $A(x,\cdot)\in C^1([a,b])$, $g(u,v,x,s,\cdot)$, $g_u(u,v,x,s,\cdot)$ и $g_v(u,v,x,s,\cdot)\in$

$\in C([\alpha(x,t,\cdot),\beta(x,t,\cdot)]\times[\alpha(s,t,\cdot),\beta(s,t,\cdot)]\times[a,b]^2)$,

(d) $g_v(u,v,x,s,\cdot)\le 0$ *для всех* $(u,v,x,s)\in\{\alpha(x,t,\cdot),\beta(x,t,\cdot)]\times[\alpha(s,t,\cdot),$ $\beta(x,t,\cdot)]\times[\alpha(s,t,\cdot),\beta(s,t,\cdot)]\times[a,b]^2\}$. *Тогда задача (1), (2) имеет классическое решение* $u(x,t,\varepsilon)$ *такое, что*

$$\alpha(x,t,\varepsilon)\le u(x,t,\varepsilon)\le\beta(x,t,\varepsilon)$$

для $(x,t)\in\{(a,b)\times[0,T]\}$.

Еще раз заметим, что Теорема I может быть применена только в случае, если функция g из уравнения (1) удовлетворяет так называемому условию квазимонотонности (d). Таким образом, предположим выполнение следующего условия (также играющего важную роль при обосновании условия (b) упорядоченности верхнего решения и нижнего решений).

Условие IV. *Функция* $g(u,v,x,s,\varepsilon)$ *монотонно невозрастает по переменной* v *при всех допустимых значениях ее аргументов.*

Получая путем модификации асимптотики решения явный вид нижнего и верхнего решений задачи (1), (2) и проверяя выполнение условий (a) – (d) Теоремы I, получим следующий основной результат.

Теорема II. *Пусть*

$$A(x,\varepsilon)\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^+]),\ g(u,v,x,s,\varepsilon)\in C^2([\mathbb{R}^2\times[a,b]^2\times\mathbb{R}^+])$$

и Условия I-IV выполнены. Тогда найдется такое $\varepsilon_0>0$, *что при всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *задача (1), (2) с начальной функцией, удовлетворяющей неравенствам*

$$\alpha(x,0,\varepsilon)\le u^0(x,\varepsilon)\le\beta(x,0,\varepsilon)$$

имеет классическое решение $u=u(x,t,\varepsilon)$ *такое что*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}u(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}\varphi^{(-)}(x,x_0(t)), & x\in[a,x_0(t))\\ \varphi^{(+)}(x,x_0(t)), & x\in(x_0(t),b].\end{cases}$$

Литература

1. *A. Vasil'eva, A. Nikitin, A. Petrov,* Stability of contrasting solutions of nonlinear hydromagnetic dynamo equations and magnetic fields reversals in galaxies // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, v. 78, 1994, pp. 261 – 279.

2. *А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов,* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика, Т. 4, выпуск 3, 1998 г., с. 799-851.

3. *Pao C.V.*, Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York and London, 1992.

4. *Н.Н.Нефедов, А.Г.Никитин,* Метод дифференциальных неравенств для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2000, т. 36, № 10, с. 1398-1404.

5. *Н.Н.Нефедов, А.Г.Никитин,* Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для решений типа ступеньки в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях // ЖВМ и МФ, 2001, т.41, № 7, с. 1057 –1066.

6. *Н.Н.Нефедов, А.Г.Никитин,* Метод дифференциальных неравенств для контрастных структур типа ступеньки в сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнениях в пространственно двумерном случае // Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, №.5.

7. *N.N. Nefedov, A.G. Nikitin, L. Recke,* Moving Fronts in Integro-Parabolic Reaction-Diffusion-Advection Equations // Humboldt-Universitat zu Berlin, Institut fur Mathematik, preprint 2007-22, 17 p.

8. *Nefedov N.N., Radziunas M., Schneider K.R., Vasil'eva A.B.*, Change of the Type of Contrast Structures in Parabolic Neumann Problems // ЖВМ и МФ, 2005, т. 45. №. 1, с. 41-55.

9. *Нефедов Н.Н.*, Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференциальные уравнения, 1995, т. 31, № 7, с. 1132-1139.

10. *J.P. Raquepas, J.D. Dockery*, Dynamics of a reaction-diffusion equation with nonlocal inhibition // Physica D, v. 134 (1999), p. 94-110.

11. *M. Grinfeld and A. Novick-Cohen,* The viscous Cahn-Hilliard equation: Morse decomposition and structure of the global attractor // University of Minnesota, IMA, preprint 1468 (Feb. 1997), 37 p.

ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ

Профессор *Ягола А.Г.*

Хорошо известно, что оценить погрешность решения некорректно поставленной задачи, вообще говоря, не представляется возможным. В докладе рассматриваются алгоритмы оценивания погрешности в случае наличия априорной информации об искомом решении: 1) принадлежность искомого решения выпуклому компакту; 2) истокообразная представимость искомого решения с помощью вполне непрерывного оператора. В первом случае возможно оценить погрешность, во втором случае построить так называемую апостериорную оценку погрешности. В обоих случаях после конечно-разностной аппроксимации задача может быть сведена к нестандартным задачам выпуклого программирования.

Описываются численные алгоритмы и их применение для решения обратных задач акустики, электронной микроскопии и физической химии.

Работа поддержана грантом РФФИ-ГФЕН 07-01-92103-ГФЕН_a.

Литература.

1. A.G.Yagola, K.Yu.Dorofeev. Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems. - In "A. G. Ramm, P. N. Shivakumar, A. V. Strauss (Eds.), Fields Institute Communications: Operator Theory and Its Applications", Providence, RI: American Mathematical Society, v. 25, 2000, pp. 543-550.

2. К.Ю.Дорофеев, В.Н.Титаренко, А.Г.Ягола. Алгоритмы построения апостериорных погрешностей для некорректных задач. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 2003, т. 43, №1, с. 12-25.

3. Н.Н.Николаева, М.Н.Рычагов, В.Н.Титаренко, А.Г.Ягола. Оценка погрешности реконструкции симметричных профилей скорости в многоплоскостных измерительных модулях. - Журнал вычислительной математики и математической физики, 2004, т. 44, №1, с. 23-34.

4. A. Yagola, V. Titarenko. Using a priori information about a solution of an ill-posed problem for constructing regularizing algorithms and their applications. - Inverse Problems in Science and Engineering, 2007, v. 15, No 1, pp. 3 – 17.

5. A.V. Bayev, A.G. Yagola. Optimal recovery in problems of solving linear integral equations with a priori information. – J. of Inverse and Ill-Posed Problems, 2007, v. 15, N 6, pp. 569-586.