1. НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Смотрите п. 1.8.5 *учебника (стр.* 73) *и стр.* 87, 88 *пособия.*

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – случайные величины, имеющие совместное распределение. Эти случайные величины называются *независимыми* (в совокупности), если для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F(x_n), \tag{1}$$

где через $F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(\,\cdot\,)$ и $F_i(\,\cdot\,)$ обозначены совместная функция распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и функция распределения одной случайной величины ξ_i, $i = 1, \ldots, n$,

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n), \qquad F_i(x_i) = P(\xi_i < x_i).$$

Если случайные величины распределены дискретно, то аналогом (1) является набор равенств

$$P(\xi_1 = x_i, \ldots, \xi_n = z_k) = P(\xi_1 = x_i) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n = z_k)$$

для всех значений, которые могут принимать данные случайные величины. Если случайные величины распределены абсолютно непрерывно, то их совместная плотность вероятности также представляется как произведение отдельных плотностей:

$$p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_1(x_1) \ldots p(x_n).$$

В дифференциальной форме

$$\begin{aligned} p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n &\overset{\text{def}}{=} P(x_1 \leqslant \xi < x_1 + dx_1, \ldots, x_n \leqslant \xi_n < x_n + dx_n) = \\ &= \prod_{k=1}^{n} P(x_k \leqslant \xi_k < x_k + dx_k) = \prod_{k=1}^{n} p_{\xi_k}(x_k)\, dx_k. \end{aligned}$$

Замечание. Отметим, что независимость произвольных событий $A_1, \ldots, A_n$ определяется через большое количество равенств «разного порядка»,

$$\begin{aligned} P(A_i \cap A_j) &= P(A_i)P(A_j) && \text{при } i \neq j, \\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k) && \text{при } i \neq j, i \neq k,\ k \neq j, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(A_1 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n) &= P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n), \end{aligned}$$

а независимость случайных величин задаётся только одним равенством (1) «старшего порядка». Это связано с тем, что совместные функции распределения более низких порядков получаются из «старшей» путём предельного перехода. Например, при $x_n \to +\infty$ мы имеем

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},\xi_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\big|_{x_n \to +\infty} = F_{\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

откуда, учитывая (1) и тот факт, что $F_{\xi_n}(x_n) \to 1$ при $x_n \to +\infty$, получаем условие независимости случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$:

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = F_1(x_1) \ldots F(x_{n-1}).$$

Аналогично можно получить подобные равенства для любого подмножества случайных величин из $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми попарно*, если для любых индексов $i \neq j$ из множества $\{1, \ldots, n\}$ и любых $x_i, x_j \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $F_{\xi_i, \xi_j}(x_i, x_j) = F_i(x_i)F(x_j)$. Согласно сделанному замечанию из совокупной независимости следует попарная, но обратное следствие неверно.

2. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Смотрите стр. 37, 38, 42, 43 *учебника и раздел* 1.6 *пособия целиком.*

1. Проверьте, что условное вероятностное пространство удовлетворяет аксиомам вероятностного пространства.

2. Покажите, что при фиксированном событии B

$$P(\bar{A} \,|\, B) = 1 - P(A \,|\, B),$$
$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n \,|\, B) = P(A_1 \,|\, B) + P(A_2 \,|\, B) + \cdots + P(A_n \,|\, B).$$

3. Теорема, связанная с формулой полной вероятности, формулируется так.

Теорема. *Пусть $P(B_i) \neq 0$ для каждого $i = 1, \ldots, n$ и события $B_1, \ldots, n$ образуют полную группу (здесь $n < \infty$ или $n = \infty$, т.е. набор событий полной группы счётный). Тогда* ***для любого*** *события A*

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \,|\, B_k)P(B_k). \tag{2}$$

Как можно ослабить условия теоремы, чтобы формула (2) осталась верной для **для одного, фиксированного** события A? При этом неважно, будет ли она верна для других событий?

Замечание. Доказательство теоремы напрямую вытекает из аддитивности вероятности: мы имеем для любого события A

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\bigg(A \cap \Big(\sum_{k=1}^{n} B_k\Big)\bigg) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A \,|\, B_k)P(B_k).$$

При этом видно, что условие $P(B_i) \neq 0$ по сути дела нужно только для того, чтобы существовала условная вероятность. Но формулу (2) можно применять и в случае, когда некоторые из B_i имеют нулевую вероятность. В этом случае понятно, что $P(A \cap B_i) \leqslant P(B_i) = 0$, и соответствующие слагаемые в сумме можно просто исключить.

Можно также заменить условие $B_1 + \cdots + B_n = \Omega$ на $P(B_1) + \cdots + P(B_n) = 1$. Другими словами, мы имеем равенство $B_1 + \cdots + B_n = \Omega'$, где $P(\Omega') = 1$, но при этом Ω' не обязательно покрывает всё множество Ω. Тогда, очевидно, $P(\Omega \backslash \Omega') = 0$ и $P(A \cap \Omega) = P(A \cap \Omega')$ для любого события A.

3. УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Смотрите раздел 2.4 *пособия*:

• стр. 114 до слов «условное математическое ожидание»,

• стр. 116, кусок текста от начала абзаца над формулой (2.54) до слов «условное математическое ожидание»,

• примеры 4.1 и 4.2.

В учебнике этот материал раскидан по разным разделам. Поэтому привожу здесь необходимые теоретические сведения (частично повторяя материал пособия).

Пусть с. в. ξ задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и некоторое событие $B \in \mathcal{F}$ имеет ненулевую вероятность. Функция $F_\xi(\,\cdot\,|B)\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, заданная равенством

$$F_\xi(x|B) = P(\xi < x|B),$$

называется *функцией условного распределения*, или *условной функцией распределения* с. в. ξ (при условии, что произошло событие B). При фиксированном событии B функция $F_\xi(\,\cdot\,|B)$ обладает **всеми** свойствами функции распределения: определена для любого $x \in \mathbb{R}$, не убывает, непрерывна слева при любом $x \in \mathbb{R}$, имеет предельные значения на бесконечности

$$F_\xi(x|B)\big|_{x\to-\infty} = 0, \qquad F_\xi(x|B)\big|_{x\to+\infty} = 1$$

и т. д.

Если при всех $x \in \mathbb{R}$

$$P(x \leqslant \xi < x + \Delta x|B) = F_\xi(x+\Delta x|B) - F_\xi(x|B) = p_\xi(x|B)\Delta x + o(\Delta x),$$

то говорят, что существует *плотность условной вероятности* (или *условная плотность вероятности*) $p_\xi(\,\cdot\,|B)$ с. в. ξ (при условии, что произошло событие B), и тогда

$$F_\xi(x|B) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t|B)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Эта функция также обладает всем свойствами плотности вероятности,

$$p_\xi(x|B) \geqslant 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x|B)\,dx = 1.$$

На практике условные распределения обычно возникают в задачах с двумерными случайными величинами. Пусть ξ и η – две случайные величины, имеющие совместную функцию распределения. Свяжем событие B со значением случайной величины η и при этом условии будем искать распределение случайной величины ξ. В случае *дискретного распределения* все формулы получаются непосредственно.

Пусть задано совместное дискретное распределение

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij} \geqslant 0, \qquad i = 1,\ldots,n,\ \ j = 1,\ldots,m, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,$$

где $n, m \leqslant \infty$. Рассмотрим событие $\eta = y_j$, причём считаем, что $P(\eta = y_j) \neq 0$. *Условным распределением* случайной величины ξ при условии $\eta = y_j$ называется совокупность равенств

$$P(\xi = x_i \,|\, \eta = y_j) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

События $\xi = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, образуют полную группу: они несовместны, так как $\xi(\omega)$ при каждом ω принимает единственное значение и $\sum_{i=1}^{n} P(\xi = x_i) = 1$. Тогда мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi = x_i \,|\, \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)} = \frac{P(\eta = y_j)}{P(\eta = y_j)} = 1,$$

т. е. равенства (4) действительно задают распределение.

Аналогично события $\eta = y_j$, $j = 1, \ldots, m$, образуют полную группу, и мы можем записать формулу полной вероятности

$$P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi = x_i \,|\, \eta = y_j) P(\eta = y_j), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

которая показывает, как из условных распределений можно «собрать» безусловное. Также верна формула Байеса

$$P(\eta = y_j \,|\, \xi = x_i) = \frac{P(\xi = x_i \,|\, \eta = y_j) P(\eta = y_j)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi = x_i \,|\, \eta = y_k) P(\eta = y_k)}.$$

Если случайные величины ξ и η независимы, т. е.

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) P(\eta = y_j), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

то, очевидно,

$$P(\xi = x_i \,|\, \eta = y_j) = P(\xi = x_i), \qquad P(\eta = y_j \,|\, \xi = x_i) = P(\eta = y_j),$$

это означает, что условные и безусловные распределения совпадают.

Для *абсолютно непрерывных* распределений прямое применение формул условной вероятности невозможно, потому что $P(\eta = z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{R}$. В этом случае заменяем событие $\eta = z$ его «дифференциальным» аналогом $z \leqslant \eta < z + dz$. Итак, пусть ξ и η – две случайные величины, имеющие совместную плотность вероятности, для задания которой мы используем дифференциальное равенство

$$p_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy = P(x \leqslant \xi < x + dx, y \leqslant \eta < y + dy).$$

Теперь выберем произвольный $x \in \mathbb{R}$ и y, для которого $p_\eta(y) \neq 0$, и рассмотрим события $x \leqslant \xi < x + \Delta x$ и $y \leqslant \eta < y + \Delta y$. Запишем условную вероятность

$$P(\leqslant \xi < x + \Delta x \,|\, y \leqslant \eta < y + \Delta y) = \frac{P(\leqslant \xi < x + \Delta x, y \leqslant \eta < y + \Delta y)}{P(y \leqslant \eta < y + \Delta y)}.$$

В первом порядке малости по Δx, Δy имеем

$$P(\leqslant \xi < x + \Delta x, y \leqslant \eta < y + \Delta y) = p_{\xi,\eta}(x,y)\Delta x \Delta y, \qquad P(y \leqslant \eta < y + \Delta y) = p_\eta(y)\Delta y,$$

Отсюда в первом порядке малости по Δx, Δy

$$P(\leqslant \xi < x + \Delta x \,|\, y \leqslant \eta < y + \Delta y) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)\Delta x \Delta y}{p_\eta(y)\Delta y} = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}\Delta x,$$

или

$$P(\leqslant \xi < x + dx \,|\, y \leqslant \eta < y + dy) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy}{p_\eta(y)\,dy} = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}\,dx. \tag{5}$$

Мы видим, что условная вероятность выглядит совершенно аналогично дифференциальному равенству для плотности вероятности случайной величины

$$P(\leqslant \xi < x + dx) = p_\xi(x)\,dx.$$

Естественно назвать коэффициент при dx в (5) *условной плотностью вероятности* случайной величины ξ при условии $\eta = y$ (хотя, конечно, мы рассматриваем не событие $\eta = y$, а событие, заключающееся в том, что η лежит в бесконечно малой окрестности значения y). Введём для этой условной плотности обозначение $p_{\cdot|,|\eta}(x|y)$. Тогда из (5) имеем

$$p_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} \tag{6}$$

для всех x и тех y, для которых $p_\eta(y) \neq 0$. Данная функция формально является функцией двух переменных, однако при любом фиксированном y (если $p_\eta(y) \neq 0$) функция $p_{\xi|\eta}(\,\cdot\,|y)$ обладает свойствами плотности вероятности, при y выступает как параметр:

$$p_{\xi|\eta}(x|y) \geqslant 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi|\eta}(x|y)\,dx = 1.$$

Справедливы непрерывные аналоги формулы полной вероятности (по которой можно найти безусловное распределение с. в. ξ) и формулы Байеса:

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi|\eta}(x|y)p_\eta(y)\,dy,$$
$$p_{\eta|\xi}(y|x) = \frac{p_{\xi|\eta}(x|y)p_\eta(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi|\eta}(x|\tilde{y})p_\eta(\tilde{y})\,d\tilde{y}}.$$

Все эти формулы напрямую вытекают из очевидных равенств

$$p_{\xi|\eta}(x|y)p_\eta(y) = p_{\xi,\eta}(x,y), \qquad p_{\eta|\xi}(y|x)p_\xi(x) = p_{\xi,\eta}(x,y),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = p_\xi(x), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx = p_\eta(y).$$

Условная плотность связана с условной вероятностью следующим равенством в бесконечно малых величинах:

$$p_{\xi|\eta}(x|y)\,dx = P(x \leqslant \xi < x + dx \,|\, y \leqslant \eta < y + dy).$$