



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Физический факультет

Олимпиады

МГУ им. М.В. Ломоносова для школьников

ФИЗИКА



ПОКОРИ
ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ



МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

**Олимпиады школьников по физике,
проводимые физическим факультетом
МГУ им. М.В. Ломоносова**

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова традиционно участвует в организации и проведении олимпиад школьников по физике «Ломоносов», «Покори Воробьевы горы!», Московской олимпиады школьников и олимпиады «Робофест».

В 2022-2023 учебном году в соответствии с Перечнем олимпиад школьников этим олимпиадам присвоены следующие уровни:

- Московская олимпиада школьников по физике – уровень 1;
- «Ломоносов» по физике – уровень 2;
- «Покори Воробьевы горы!» – уровень 1;
- «Робофест» по физике – уровень 2.

Победители олимпиад уровней 1 и 2, а также призеры олимпиад уровня 1 зачислялись в 2023 году на физический факультет МГУ без вступительных испытаний, а призеры олимпиад 2-го уровня получали 100 баллов за дополнительное вступительное испытание по физике. В 2023 г. на физический факультет было зачислены 119 человек, являющихся победителями и призерами олимпиад школьников, что составляет 33% от общего числа зачисленных на 1-й курс абитуриентов. Из них четверть являются победителями и призерами олимпиад школьников, проводимых физическим факультетом.

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ
2023 год

7, 8 и 9 классы

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО (ЗАОЧНОГО)
ЭТАПА

Задание отборочного тура состояло из двух частей. В части I предлагалось три вопроса, ответ к которым (без решения) нужно было загрузить в специальную форму на сайте олимпиады. Вопросы у участников различались числовыми данными, выбираемыми автоматически из широкого диапазона значений. В части II (творческой) предлагалось 4 одинаковых для всех участников задачи, к которым требовалось загрузить ответы и решения, причем оценка определялась по результатам проверки решений.

Часть I (проверяются ответы), пример варианта:

Вопрос 1 (7 баллов):

На научном шоу экспериментатор выливал в емкость, установленную на весах, разные объемы разных жидкостей до одного и того же общего уровня. Сначала он выливал некоторый объем жидкости 1 с плотностью $\rho_1 = 0,6 \text{ г/см}^3$, затем в два раза больший объем жидкости 2 с плотностью $\rho_2 = 1,5 \text{ г/см}^3$, и наконец доливал до нужного уровня жидкости 3. При этом вес сосуда с жидкостями всегда оказывался одним и тем же. Чему равна плотность жидкости 3? Ответ запишите в г/см^3 , с точностью до десятых, без указания единиц измерения.

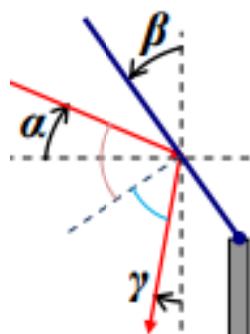
Ответ: 1,2.

Комментарий: Пусть V – объем жидкости 1, вылитой экспериментатором в емкость. Тогда (по условию) объем жидкости 2, вылитой в сосуд, равен $2V$, а объем жидкости 3 будет равен $V_0 - 3V$, где V_0 – общий объем трех жидкостей, одинаковый во всех случаях. Общая масса жидкостей в сосуде

$$m = \rho_1 \cdot V + \rho_2 \cdot 2V + \rho_3 \cdot (V_0 - 3V) = \rho_3 \cdot V_0 + (\rho_1 + 2\rho_2 - 3\rho_3) \cdot V,$$

согласно условию, не зависит от величины V . Ясно, что это возможно, только если $\rho_1 + 2\rho_2 - 3\rho_3 = 0$, откуда $\rho_3 = \frac{\rho_1 + 2\rho_2}{3} = 1,2 \text{ г/см}^3$.

Вопрос 2 (8 баллов):



Лучи солнца падают на стекло фрамуги, открывающейся наружу, в плоскости, перпендикулярной ее горизонтальной оси вращения (см. рисунок). На какой угол β должна быть отклонена фрамуга от вертикали, чтобы отраженные от нее солнечные лучи были направлены под углом $\gamma = 14^\circ$ к вертикали? В этот момент высота Солнца над горизонтом равна $\alpha = 18^\circ$. Ответ запишите в градусах, без указания единиц измерения.

Ответ: 29.

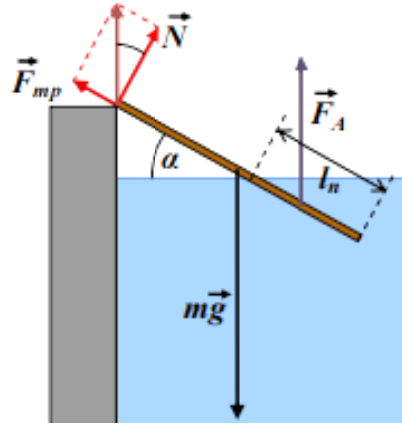
Комментарий: Согласно закону отражения света, угол падения луча на стекло (угол между падающим лучом и перпендикуляром к поверхности стекла, равный, как видно из рисунка, $\alpha + \beta$) равен углу отражения (между этим перпендикуляром и отраженным лучом – это $90^\circ - \beta - \gamma$). Следовательно, $\beta = \frac{90^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 29^\circ$.

Вопрос 3 (10 баллов):

Однородная тонкая доска длины $L = 1$ м лежит неподвижно, опираясь «самым краешком» на борт бассейна. Другой ее конец находится в воде, уровень которой в бассейне на $h = 24$ см ниже этого борта. Плотность дерева, из которого изготовлена доска, $\rho = 0,6$ г/см³. Плотность воды в бассейне $\rho_0 = 1,0$ г/см³. При какой минимальной величине коэффициента трения между краем бассейна и доской такое возможно? Ответ запишите с точностью до сотых.

Ответ: 0,41.

Комментарий: На неподвижную доску действуют сила тяжести, сила Архимеда и две силы реакции – сила нормальной реакции борта бассейна и сила трения об этот борт. Так как силы тяжести и Архимеда направлены вертикально, то равнодействующая сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{mp}$ тоже вертикальна, и поэтому в положении равновесия $F_{mp} = N \cdot \operatorname{tg}(\alpha)$, где α – угол наклона доски к горизонту. С другой стороны, величина силы трения покоя должна удовлетворять требованию $F_{mp} \leq \mu N$, и поэтому возникает и требование к коэффициенту трения $\mu \geq \operatorname{tg}(\alpha)$, то есть $\mu_{\min} = \operatorname{tg}(\alpha)$. Запишем теперь для доски условие равновесия моментов сил относительно точки опоры $+F_A \cdot l_A - mg \cdot l_g = 0$. Величина силы тяжести для



доски с сечением S равна $mg = \rho S L g$, и ее плечо $l_g = \frac{L}{2} \cos(\alpha)$. Величина силы

Архимеда $F_A = \rho_0 S l_n g$ ($l_n = L - \frac{h}{\sin(\alpha)}$ – длина погруженной в воду части доски),

а ее плечо $l_A = \left(L - \frac{l_n}{2}\right) \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \left(L + \frac{h}{\sin(\alpha)}\right) \cos(\alpha)$. Как видно, уравнение моментов позволяет найти α :

$$\rho L^2 - \rho_0 \left(L - \frac{h}{\sin(\alpha)}\right) \left(L + \frac{h}{\sin(\alpha)}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{1 - \rho / \rho_0 - x^2}}, \text{ где } x \equiv \frac{h}{L}.$$

В данном варианте $x = 0,24$, $1 - \frac{\rho}{\rho_0} = 0,4$. Таким образом,

$$\mu_{\min} = \frac{x}{\sqrt{1 - \rho / \rho_0 - x^2}} \approx 0,41.$$

В этом ответе, в соответствии со смыслом искомой величины, считалось правильным не только округление до сотых по стандартным правилам, но и

округление «вверх». Например, в данном варианте правильным также считался ответ 0,42.

Часть II (проверяются решения):

1. («Фонари на мосту», 15 баллов) Некий ученик 7 класса задумался о том, как измерить расстояние между фонарями на одном из длинных метромостов. Он узнал, что длина старого вагона метро изнутри примерно 18 метров. Однажды при выезде на метромост он пошел из конца в конец вагона по ходу поезда, считая «проехавшие» мимо него фонари. Он старался идти одинаковыми шагами в одном ритме, и обнаружил, что за время движения он проехал ровно 6 промежутков между фонарями. Он вышел на следующей станции и поехал в обратную сторону, и на сей раз он в том же ритме шагнул из конца в конец вагона против хода поезда. Оказалось, что теперь он проехал почти ровно 5 таких же промежутков. Предполагая, что поезда относительно моста и школьник относительно поездов оба раза двигались с одинаковыми скоростями, найдите расстояние между фонарями. Кроме того, определите, во сколько раз скорость школьника относительно вагона была меньше скорости поезда относительно моста.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Обозначим v – скорость поезда относительно моста, u – скорость школьника относительно поезда, и L – расстояние между фонарями. В обоих случаях время движения школьника из конца в конец вагона равно $t = \frac{l}{u}$, где $l = 18$ м. В первом случае скорость школьника относительно фонарей была равна $v+u$, и поэтому $6L = (v+u)t = \left(\frac{v}{u} + 1\right)l$. Во втором эта скорость равнялась $v-u$, то есть $5L = (v-u)t = \left(\frac{v}{u} - 1\right)l$. Вычитая второе уравнение из первого, найдем, что $L = 2l = 36$ м. Разделив их друг на друга, получим уравнение для переменной $x = \frac{v}{u}$: $\frac{6}{5} = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{v}{u} = 11$.

ОТВЕТЫ: $L = 36$ м, $\frac{v}{u} = 11$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Указано (используется в решении), что время движения школьника в обоих случаях одинаково	1
Записано соотношение, эквивалентное $t = l/u$	1
Верно записаны скорости школьника относительно фонарей через v и u	2+2=4
Записано уравнение, эквивалентное $6L = (v+u)t = (v/u + 1)l$	2
Записано уравнение, эквивалентное $5L = (v-u)t = (v/u - 1)l$	2
Правильно найдено расстояние $L = 36$ м	2
Правильно найдено отношение скоростей $v/u = 11$	3
ВСЕГО	15

2. («Ложка снега в банке пара», 18 баллов) Вертикальный цилиндрический сосуд имеет площадь сечения $S = 500 \text{ см}^2$ и гладкие теплоизолирующие прозрачные стенки. Сверху содержимое сосуда – чистый водяной пар (без воздуха) – накрыто легким теплоизолирующим поршнем, который может свободно перемещаться в сосуде, оставаясь горизонтальным. Давление снаружи сосуда равно нормальному атмосферному $p_0 \approx 101 \text{ кПа}$, а внутри на стенках видны микроскопические капельки воды. Известно, что плотность водяного пара в сосуде $\rho_0 \approx 0,586 \text{ кг/м}^3$. Не нарушая теплоизоляции и не выпуская пар из сосуда, в него добавили чайную ложку мокрого снега (находящуюся в равновесии смесь ледяных кристаллов и воды), в котором доля льда по массе равнялась 50%. К моменту установления равновесия поршень опустился на $h \approx 22,4 \text{ мм}$. Найдите массу снега в упомянутой чайной ложке. Удельная теплота парообразования воды $r \approx 2258 \text{ кДж/кг}$, удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 334 \text{ кДж/кг}$, удельная теплоемкость воды $c \approx 4,2 \text{ кДж/(кг} \cdot ^\circ\text{С)}$. Кроме того, Вы можете использовать в решении определение шкалы температур Цельсия. Найдите также изменение внутренней энергии воды в сосуде в процессе установления равновесия (после добавления снега).

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Из условия и определения шкалы Цельсия понятно, что в начальном состоянии пар является насыщенным и его температура равна $t_0 = 100^\circ\text{С}$, а температура ледяных кристаллов и воды в мокром снеге равна $t_1 = 0^\circ\text{С}$. Если после добавления ложки снега поршень опустился не до дна сосуда, то есть в конечном состоянии под поршнем есть пар, и он находится в равновесии с жидкостью, то этот пар по-прежнему является насыщенным, и при том же давлении он имеет ту же температуру 100°С , которая стала равновесной температурой всей системы. Ясно, что в процессе установления нового равновесия часть пара сконденсировалась, и за счет тепла конденсации лед расплавился, а вода (как та, что изначально была жидкой, так и, которая образовалась при таянии льда) нагревается до температуры 100°С . Обозначим искомую массу снега m . Масса льда в составе порции снега равна $m/2$, поэтому уравнение теплового баланса для установления равновесия в системе имеет вид

$$r \cdot m_c = m \left[\frac{\lambda}{2} + c(t_0 - t_1) \right] \Rightarrow m = \frac{2r}{\lambda + 2c(t_0 - t_1)} m_c.$$

Здесь $m_c = \rho_0 S h$ – масса сконденсировавшегося пара. Следовательно,

$$m = \frac{2r\rho_0 S h}{\lambda + 2c(t_0 - t_1)} \approx 2,5 \text{ г}.$$

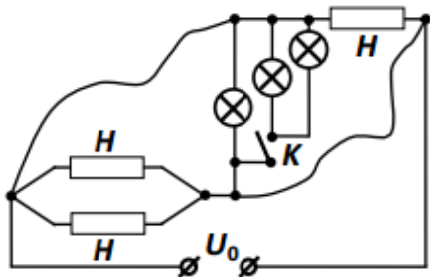
Для определения изменения внутренней энергии воды в сосуде в процессе установления равновесия нужно заметить, что разные ее части обменивались теплом только между собой – содержимое сосуда было теплоизолировано, но при этом внешнее давление, опуская поршень, совершало работу над содержимым сосуда. Таким образом, энергия воды в сосуде увеличивалась – в точности на величину этой работы: $\Delta E = A = p_0 S \cdot h \approx 113 \text{ Дж}$.

ОТВЕТЫ: $m = \frac{2r\rho_0 S h}{\lambda + 2c(t_0 - t_1)} \approx 2,5 \text{ г}$, $\Delta E = p_0 S \cdot h \approx 113 \text{ Дж}$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Объяснено, что в начальном состоянии пар является насыщенным	1
Указано, что начальная температура пара равна 100°C	2
Указано, что начальная температура снега 0°C	2
Указано, что конечная температура содержимого сосуда равна 100°C	2
Правильно записано УТБ для установления равновесия	3
Правильно определена масса сконденсировавшегося пара	2
Правильно найдена масса мокрого снега в ложке (формула + число)	2+1=3
Правильно найдено изменение внутренней энергии (формула + число)	2+1=3
ВСЕГО	18

3. («Тепло и свет», 18 баллов) В полевой лаборатории три одинаковых нагревательных элемента с постоянным сопротивлением и три лампы работали



от одного генератора, поддерживающего на своих клеммах постоянное напряжение. В схеме электропитания использованы два длинных провода с заметным сопротивлением (на рисунке они показаны «кривыми» линиями). Сопротивления остальных соединительных проводов по сравнению с ними пренебрежимо малы. В первом режиме работы схемы ключ К разомкнут, работает только одна лампа, одиночный нагреватель потребляет мощность $P_1 = 980$ Вт, а каждый из нагревателей в паре – $P_2 = 720$ Вт. Затем ключ К замкнули, и теперь светят все три лампы. При этом мощность потребления каждого из парных нагревателей уменьшилась до $P'_2 = 648$ Вт. Какую мощность P'_1 теперь потребляет одиночный нагреватель?

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Обозначим R – сопротивление «первого» длинного провода (расположенного на схеме «слева»), $k \cdot R$ – сопротивление «второго» («справа»), $x \cdot R$ – сопротивление одного нагревателя, и $y \cdot R$ – сопротивление нити одной лампы. Тогда, вычисляя сумму напряжений по «верхнему берегу» нашего моста, получаем: $I_1 R + I_H x R = U_0$ (I_H – сила тока через «одиночный» нагреватель). Введя обозначение $I_0 \equiv U_0 / R$, мы можем переписать это соотношение в виде уравнения

$$I_1 + x I_H = I_0 \quad (3.1)$$

Аналогично для «нижнего берега» запишем (I_{2H} – сила тока через пару нагревателей)

$$k I_2 + \frac{x}{2} I_{2H} = I_0 \quad (3.2)$$

Еще два независимых уравнения дают условия непрерывности общего тока

$$I_1 + I_{2H} = I_2 + I_H \quad (3.3)$$

и закона Ома для лампы (первый случай)

$$\frac{x}{2}I_{2H} - I_1 = y(I_1 - I_H) \Rightarrow \frac{x}{2}I_{2H} + yI_H = (1+y)I_1. \quad (3.4).$$

Эту систему линейных уравнений можно решить относительно сил токов. В частности, для сил токов через нагревательные элементы

$$I_H = I_0 \frac{x(k+y) + 2k(1+y)}{kx(1+x) + (x+2k)[y+x(1+y)]}$$

$$I_{2H} = I_0 \frac{2[k+y+x(1+y)]}{kx(1+x) + (x+2k)[y+x(1+y)]}$$

Отношение этих токов нам известно, ведь $\frac{P_1}{P_2} = \frac{49}{36} = \frac{I_H^2}{(I_{2H}/2)^2} \Rightarrow \frac{I_H}{I_{2H}} = \frac{7}{12}$.

Это соотношение дает уравнение на k , x и y :

$$x = \frac{5k + (12k - 7)y}{7 - 6k + y}.$$

Ясно, что для второго случая (одна лампа заменена на параллельное соединение трех) получаются точно такие же формулы с заменой $y \rightarrow \frac{y}{3}$. Тогда

соотношение P_2 к P'_2 дает нам еще одно уравнение: $\frac{P_2}{P'_2} = \frac{10}{9} = \frac{I_{2H}^2}{I_{2H}'^2} \Rightarrow \frac{I_{2H}}{I_{2H}'} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

или

$$\frac{\sqrt{10}}{3} \frac{3(k+x) + (1+x)y}{(k+x) + (1+x)y} = \frac{3kx(1+x) + 3x(x+2k) + (x+2k)(x+1)y}{kx(1+x) + x(x+2k) + (x+2k)(x+1)y}.$$

Этот путь позволяет найти x и y для каждого k , и при этом исследовать диапазон значений k , при которых решение является физически допустимым (отношения сопротивлений положительны и близки по порядку величины). Например, при $k=1$ получается $x=5$, $y \approx 0,3015$. Для каждого полученного корня можно вычислить

$$\frac{P'_1}{P'_2} = \frac{I_H'^2}{(I_{2H}'/2)^2} = \left(\frac{x(3k+y) + 2k(3+y)}{3k+y+x(3+y)} \right)^2,$$

и найти P'_1 . Впрочем, это очень неудобный путь, так как полученная система после исключения любой пары неизвестных приводят к уравнениям высокой степени, не позволяющих решить ее аналитически. Так что для участников, которые пошли этим путем, практически единственной возможностью являлось численное решение (например, с помощью таблиц Excel или специализированных математических программ). Такой подход приводил к выводу, что возможные значения мощности потребления одиночного нагревателя во втором случае лежат в диапазоне $855 \text{ Вт} < P'_1 < 909 \text{ Вт}$.

Впрочем, есть еще один возможный путь. Если *предположить*, что задача должна иметь достаточно простое решение, то можно искать вариант, в котором выражение для отношения сил токов существенно упрощается. Известно, что это происходит в случае «пропорционального моста», когда сопротивление двух «длинных» проводов одинаково (в наших обозначениях $k=1$). Действительно, в этом случае из (3.1) и (3.2) можно получить уравнение

$$I_1 + xI_H = I_2 + \frac{x}{2}I_{2H}.$$

Вычитая из него (3.3), обнаруживаем, что

$$(1+x)I_H = \left(1 + \frac{x}{2}\right)I_{2H}.$$

Таким образом, при $k=1$ отношение сил токов через нагреватели $\frac{I_H}{I_{2H}} = \frac{x+2}{2(x+1)}$ не зависит от I_0 и y , и поэтому будет одинаково для обоих

подключений! Приравнявая $\frac{x+2}{2(x+1)} = \frac{7}{12}$, можно найти, что $x=5$, а потом

получить квадратное уравнение для y с нужным положительным корнем $y \approx 0,3015$, но в действительности в этом нет необходимости. Ведь теперь мы

знаем, что для второго случая тоже $\frac{I'_H}{I'_{2H}} = \frac{7}{12}$, и $\frac{P'_1}{P'_2} = \frac{49}{36} \Rightarrow P'_1 = \frac{49}{36} P'_2 = 882$ Вт.

Такой подход использовался участниками, и считался «почти» правильным решением (см. критерии проверки)

ОТВЕТ: $855 \text{ Вт} < P'_1 < 909 \text{ Вт}$; допустимый ответ: $P'_1 = (P_1/P_2)P'_2 = 882 \text{ Вт}$.

Примечание: Обращаем внимание участников, что эта задача – по физике, а не по математике, хотя она и требует значительного объема математической работы. В реальных исследованиях законов природы мы часто начинаем с ситуации, когда нам неизвестна часть параметров реалистичной модели явления, и в этом случае именно анализ возможных значений «недостающих» величин позволяет спланировать эксперименты для их определения. Поэтому в научном исследовании недостаточность количества уравнений для однозначного решения задачи – не повод останавливаться. Конечно, на олимпиадах обычно стараются давать задачи, в которых такого не бывает. Но это творческая часть задания! Например, литературный персонаж братьев Стругацких, ставший героем одного из наших заданий (Кристобаль Хунта, олимпиада «ПВГ!»-2020), принципиально интересовался только решением тех задач, для которых доказано отсутствие решения.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Получена полная система 4 уравнений связи сил токов с сопротивлениями (эквивалентная (3.1) – (3.4))	4×1=4
Вычислено отношение $I_H / I_{2H} = 7/12$ либо получено правильное уравнение, связывающее $P_1 / P_2 = 49/36$ с сопротивлениями	1
Записана полная система уравнений для сопротивлений или их отношений	3
Предложен алгоритм анализа системы уравнений ИЛИ Указано, что при $k=1$ связь сил токов через нагреватели оказывается максимально простой	3*)
Записана верная формула для расчета P'_1 / P'_2 в выбранном методе	3
Получен ответ $855 \text{ Вт} < P'_1 < 909 \text{ Вт}$ (получен ответ $P'_1 = (882 \pm 1) \text{ Вт}$ или другой правильный ответ для одного допустимого значения k)	4 (3)
ВСЕГО	18

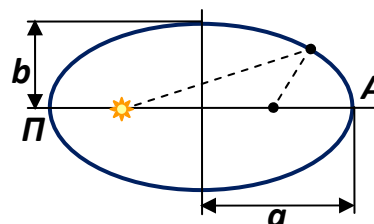
*) Если случай $k = 1$ выбран без анализа общего случая, то при правильном решении за пункт 1 ставится **2 балла** (2 уравнения), за пункт 2 – **полный балл**, за пункт 3 ставится **2 балла**, за пункты 4 и 5 – **полный балл**, за пункт 6 – **3 балла**. Таким образом, максимальная оценка за этот вариант решения равна **14 баллам**.

4. («Космическое освещение», 24 балла) На межпланетной станции установили окуляр, направляющий свет на фотоэлемент. Окуляр все время направлен на Солнце (угол его захвата больше углового размера Солнца, видимого с орбиты станции), а сила тока фотоэлемента пропорциональна мощности светового излучения из желто-зеленой части видимого спектра, попадающего в «глазок» окуляра. Запись значений силы тока фотодатчика в зависимости от времени была начата в момент прохождения станцией перигелия своей орбиты (момент времени $t \equiv 0$), и производилась при определенных положениях станции относительно Солнца. Результаты представлены в таблице. На основании этих результатов определите величину большой и малой полуосей эллиптической орбиты станции (в а.е.). Поглощением света в околосолнечном пространстве пренебрегите.

t , земн. года	0,00	0,351	0,582	0,873	1,236	1,673	2,182	2,751	3,364	4,000	4,636
I , мА	25,60	15,47	9,77	6,17	4,10	2,91	2,24	1,86	1,66	1,60	1,66

Указание: Используйте изложенные ниже сведения из астрономии и геометрии.

Согласно **I закону Кеплера**, планеты и другие небесные тела Солнечной системы движутся по *эллипсам*, в фокусе которых находится Солнце. Эллипс можно рассматривать как «сплюснутую окружность» - расстояние от центра эллипса до его точек изменяется в пределах $b \leq r \leq a$, где a и b называют *большой* и *малой полуосями* эллипса (см. рисунок). Определяющим свойством эллипса как геометрической фигуры является существование двух симметричных точек – *фокусов* эллипса, расположенных на более длинной оси симметрии. Сумма расстояний от любой точки эллипса до двух его фокусов есть величина постоянная для данного эллипса. На эллиптической орбите выделяют точку, в которой тело ближе всего к Солнцу (*перигелий П*) и точку, в которой оно дальше всего от Солнца (*афелий А*). Расстояния в Солнечной системе обычно измеряют в астрономических единицах, примерно соответствующих радиусу орбиты Земли, которая мало отличается от окружности: 1 а.е. $\approx$ 150 млн. км. Согласно **III закону Кеплера**, отношение квадратов периодов обращения небесных тел Солнечной системы равно отношению кубов больших полуосей их орбит: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$. Максимум мощности электромагнитного излучения Солнца приходится на желто-зеленую часть видимого спектра.



ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Если мы пренебрегаем поглощением света в околосолнечном пространстве, то мощность излучения, попадающего в окуляр, изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния до Солнца (энергия излучения по мере удаления от источника распределяется по поверхности растущей сферы, площадь которой растет пропорционально квадрату расстояния). Следовательно, так же должна вести себя и сила тока фотодатчика. Поэтому ясно, что после прохождения перигелия, где ток фотодатчика достигает максимума, он должен убывать до достижения станцией афелия, где ток фотодатчика убывает, а затем снова начать расти. В таблице минимальное значение силы тока фотодатчика соответствует времени $t = 4,000$ года. Если обратить внимание, что симметрично по времени от этого значения расположены положения, которым соответствуют два одинаковых значения силы тока фотодатчика (то есть два одинаковых расстояния до Солнца), то становится ясно, что это значение соответствует именно афелию. Следовательно, к этому моменту времени прошла половина периода обращения станции, и поэтому период обращения равен $T = 8$ лет. Применим III закон Кеплера к станции и Земле: куб отношения больших полуосей их орбит равен $\left(\frac{a}{a_E}\right)^3 = 8^2 = 64$, и поэтому $\frac{a}{a_E} = 4 \Rightarrow a \approx 4$ а.е. (орбита Земли практически круговая, так что большая полуось земной орбиты практически равна 1 а.е.). Кроме того, из отношения сил токов фотодатчика в перигелии и афелии находим отношение расстояний от Солнца до афелия и перигелия:

$$\frac{I_P}{I_A} = 16 = \left(\frac{r_A}{r_P}\right)^2 \Rightarrow \frac{r_A}{r_P} = 4.$$

Кроме того, из геометрических свойств эллипса следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} r_P + r_A = 2a \\ (a - r_P)^2 + b^2 = a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = (r_P + r_A)/2 \\ b = \sqrt{r_P r_A} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{r_A/r_P}}{(r_A/r_P) + 1} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно, $b = \frac{4}{5}a \approx 3,2$ а.е. (заодно можно найти, что $r_A = \frac{8}{5}a \approx 6,4$ а.е., а $r_P = \frac{2}{5}a \approx 1,6$ а.е., то есть орбита станции целиком лежит вне орбиты Земли).

Вообще из данных таблицы можно получить очень много интересных сведений о движении станции по орбите – практически все, что угодно. Попробуйте, например, вычислить минимальную и максимальную величину скорости станции на орбите, используя информацию, что среднее значение величины скорости движения Земли на ее орбите равно $V \approx 29,765$ км/с. Если Вы все сделаете правильно, то максимальная скорость станции окажется почти точно равна 47 км/с (с отклонением менее ошибки, обусловленной неточностями используемых данных).

ОТВЕТЫ: $a \approx 4$ а.е., $b \approx 3,2$ а.е..

Примечание: На самом деле можно использовать для определения b соотношение расстояний в разных точках (а не только r_A/r_P), но такой путь значительно менее удобен.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Установлено, что мощность излучения, попадающего в окуляр, изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния до Солнца	4
Указано, что это относится и к силе тока фотодатчика	1
По данным таблицы найдено (2) и обосновано (3), что $t = 4,000$ года соответствует афелию	2+3=5
Найдено, что период обращения станции по орбите равен 8 лет	3
Правильно найдено отношение r_A / r_P	3
Правильно найдена длина большой полуоси орбиты $a \approx 4$ а.е.	4*)
Правильно найдена длина малой полуоси орбиты $b \approx 3,2$ а.е.	4*)
ВСЕГО	24

*) Если правильно и обоснованно найдено отношение $b/a = 0,8$, но сами a и b найдены с ошибкой, за эти пункты ставится в сумме 4 балла.

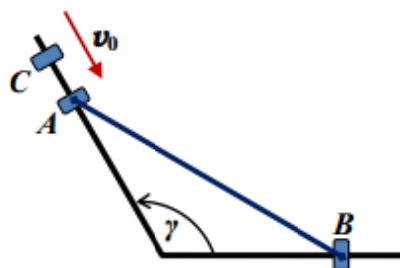
ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Максимальная оценка за вопрос – 5 баллов, максимальная оценка за задачу – 20 баллов.

БИЛЕТ № 06 (7-9 классы)**Задание 1:**

Вопрос: Две шайбы, скользящие по ровной поверхности, соединены жестким стержнем. В некоторый момент времени скорость одной из них направлена вдоль стержня и равна 1,2 м/с. В этот момент скорость второй шайбы направлена под углом 60° к стержню. Чему равна ее величина?

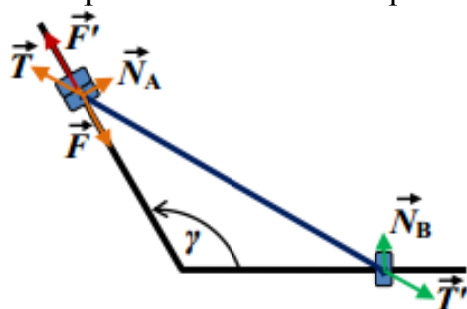
Задача: Три муфты (А, В и С) с одинаковыми массами могут скользить по двум гладким горизонтальным направляющим, пересекающимся под углом $\gamma = 120^\circ$. Муфты А и В изначально покоятся, и они шарнирно соединены с легким жестким стержнем так, что стержень составляет одинаковые углы с обеими направляющими. Между муфтой С, движущейся по направляющей со скоростью $v = 1,5$ м/с, и муфтой А происходит упругое соударение. Определите скорость муфты А сразу после удара.



Ответ на вопрос: Поскольку стержень является «жестким», то расстояние между шайбами (длина стержня) не может измениться. Поэтому проекция скоростей шайб на ось, идущую вдоль стержня, должны быть равны. Следовательно, для скорости второй шайбы $v_2 \cdot \cos(\alpha) = v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{\cos(\alpha)}$. Значит, $v_2 = 2,4$ м/с.

Решение задачи: В процессе соударения шайб С и А суммарный импульс шайб не сохраняется, так на них действуют силы реакции направляющих (всегда

перпендикулярные направляющим, так как те по условию гладкие) и сила упругости стержня, направленная вдоль него. Сила $\vec{F}'$, действующая на шайбу С со стороны шайбы А во время удара, равна по величине и противоположна по



направлению силе $\vec{F}$, действующей со стороны С на А. Поэтому изменение импульса шайбы С за малое время удара Δt (в проекцию на направляющую) $mv_C - mv_0 = -F \cdot \Delta t$, а $mv_A = F \cdot \Delta t - T \cos(\alpha) \cdot \Delta t$. Легко заметить, что углы между стержнем и направляющими одинаковы и равны $\alpha = \frac{\pi - \gamma}{2}$, то есть

$\cos(\alpha) = \sin(\gamma/2)$. Сила $\vec{T}'$, действующая на шайбу В со стороны стержня, равна по величине и противоположна по направлению силе $\vec{T}$, с которой стержень действует на шайбу А (стержень невесомый, так что сумма приложенных к нему сил и моментов сил обязательно равна нулю). Поэтому $mv_B = T \cos(\alpha) \cdot \Delta t$. Кроме того, условие жесткости стержня требует $v_B \cos(\alpha) = v_A \cos(\alpha) \Rightarrow v_B = v_A$, и $F - T \cos(\alpha) = T \cos(\alpha) \Rightarrow F = 2T \cos(\alpha)$. Из этих соотношений и уравнения изменения импульса шайбы С следует, что

$$v_C = v_0 - \frac{F \cdot \Delta t}{m} = v_0 - \frac{2T \cos(\alpha) \cdot \Delta t}{m} = v_0 - 2v_A.$$

Наконец, запишем ЗСЭ и подставим в него полученные связи скоростей:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_A^2 + v_B^2 + v_C^2)}{2} \Rightarrow v_0^2 = v_A^2 + v_A^2 + (v_0 - 2v_A)^2 \Rightarrow v_A = v_B = \frac{2}{3}v_0, v_C = -\frac{1}{3}v_0.$$

Отрицательное значение v_C означает, что шайба С после удара изменяет направление своего движения («отскакивает» от шайбы А).

Ответ: $v_A = 1$ м/с.

Задание 2:

Вопрос: Опишите, как строится температурная шкала Цельсия.

Задача: В 5 термосах находилось одинаковое количество мокрого снега (смеси ледяных кристаллов и воды, находящихся в равновесии). В первый термос вылили 100 г кипятка, во второй – 200 г, в третий – 300 г, а в четвертый – 400 г, в пятый – неизвестное количество кипятка. После установления равновесия температура содержимого первого термоса оказалась равна $t_1 = 8^\circ\text{C}$, второго – $t_2 = 31^\circ\text{C}$, а пятого – $t_5 = 0^\circ\text{C}$. Какая температура установилась в третьем и четвертом термосах? Какова максимально возможная масса кипятка, вылитого в пятый термос? Опыт происходил при нормальном атмосферном давлении, теплообменом содержимого термоса с внешними телами можно пренебречь.

Ответ на вопрос: Для измерения температуры тела оно приводится в тепловое равновесие с термометром – стандартным телом с индикацией температуры, проградуированной в соответствии с некоторой температурной шкалой. Для градуировки термометра по шкале Цельсия используются две

«реперные» точки: температура плавления льда при нормальном атмосферном давлении принимается за 0°C , а температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении принимается за 100°C . Между этими точками шкала разделяется на градусы равномерно, и от них в обе стороны распространяется с таким же шагом.

Решение задачи: Пусть M – масса мокрого снега в каждом термосе, x – массовая доля ледяных кристаллов в нем, а k – количество «порций» кипятка по $m = 100$ г, вылитое в некоторый из термосов (то есть $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ и так далее, а k_5 неизвестно). Так как в мокром снеге вода и лед находятся в равновесии, то его температура равна 0°C , а температура кипятка $t_0 = 100^{\circ}\text{C}$. Предположим, что весь лед в некотором термосе растаял полностью. Запишем уравнение теплового баланса для установления равновесия в таком термосе, используя следующие обозначения: λ – удельная теплота плавления льда, c – удельная теплоемкость воды, $y \equiv \frac{M}{m}$, $T \equiv x \frac{M}{m} \frac{\lambda}{c}$. Тогда $\lambda x M + c M t_k = c k m (t_0 - t_k) \Rightarrow t_k = \frac{k t_0 - T}{k + y}$. Подставим в полученную формулу значения температур для первых двух термосов:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{t_0 - T}{1 + y} \\ t_2 = \frac{2t_0 - T}{2 + y} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_0 - T = t_1(1 + y) \\ 2t_0 - T = t_2(2 + y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{t_0 + t_1 - 2t_2}{t_2 - t_1} = 2 \\ T = \frac{t_2(t_0 + t_1) - 2t_1 t_0}{t_2 - t_1} = 76^{\circ}\text{C} \end{array} \right.$$

Таким образом,

$$t_k = \frac{k t_0 (t_2 - t_1) + 2 t_1 t_0 - t_2 (t_0 + t_1)}{k (t_2 - t_1) + t_0 + t_1 - 2 t_2} = \frac{k \cdot 100^{\circ}\text{C} - 76^{\circ}\text{C}}{k + 2}.$$

Подставляя значения для третьего и четвертого термоса, находим $t_3 = 44,8^{\circ}\text{C}$ и $t_4 = 54^{\circ}\text{C}$. Так как в пятом термосе $t_5 = 0^{\circ}\text{C}$, то количества теплоты, отданного кипятком, не хватило, чтобы растопить весь снег (или хватило только на это – на нагрев уже не осталось). Поскольку наше УТБ записано в предположении, что весь лед растаял, получающаяся при нарушении этого предположения температура не должна быть допустимой. Итак, $\frac{k_5 t_0 - T}{k_5 + y} \leq 0 \Rightarrow k_5 \leq \frac{T}{t_0} = 0,76$.

Значит, максимально возможная масса кипятка, вылитого в пятый термос $m_{5\max} = 0,76m = 76$ г.

Ответ: $t_3 = 44,8^{\circ}\text{C}$, $t_4 = 54^{\circ}\text{C}$, максимально возможная масса кипятка, вылитого в пятый термос, равна 76 г.

Задание 3:

Вопрос: Комета вращается по эллиптической орбите, на которой максимальное расстояние до Солнца в 9 раз больше минимального, а минимальная скорость кометы равна 6 км/с. Чему равна максимальная скорость кометы на этой орбите? Ответ обосновать.

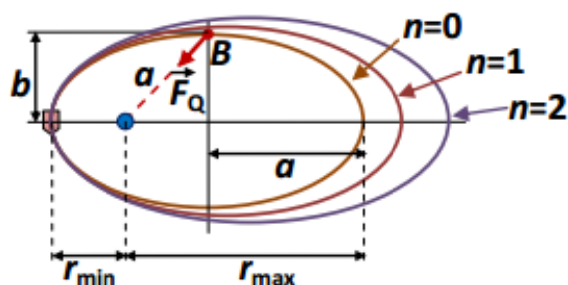
Задача: Положительно заряженный ион движется по эллиптической орбите вокруг маленького отрицательно заряженного шарика. Движение происходит в вакуумной камере большого размера. На первоначальной орбите максимальное расстояние от шарика до иона было в 8 раз больше минимального. Затем в точке орбиты, на которой это расстояние минимально, установили небольшую ускорительную камеру, которая не изменяет направление движения иона, но при каждом прохождении увеличивает его механическую энергию на одну и ту же величину. После первого прохождения камеры соотношение максимального и минимального расстояний между ионом и шариком увеличилось до 9. Каким станет это соотношение после 5-го прохождения ионом ускорительной камеры? После какого по счету прохождения ион не вернется к камере? Потери на сопротивление среды отсутствуют, потерями на излучение пренебречь. Радиусы кривизны эллипса на концах большой (a) и малой (b) полуосей равны $\frac{b^2}{a}$ и $\frac{a^2}{b}$ соответственно.

Ответ на вопрос: Максимальное и минимальное расстояние соответствуют апогелию (афелию) и перигелию орбиты кометы, то есть симметричным точкам эллипса, расположенных на концах его большой оси. Поэтому радиусы кривизны траектории R в этих точках одинаковы. Записав с учетом закона тяготения Ньютона уравнения для центростремительной компоненты ускорения в этих точках, найдем соотношение соответствующих скоростей:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{v_P^2}{R} = \frac{GmM}{r_P^2} \\ m \frac{v_A^2}{R} = \frac{GmM}{r_A^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = 9$$

Таким образом, $v_{\max} = 9v_{\min} = 54 \text{ км/с}$.

Решение задачи: Для начала вспомним определяющее свойство эллипса: сумма расстояний до фокусов эллипса до любой его точки постоянна и равна удвоенной длине большой полуоси. По аналогии с I законом Кеплера понимаем,



что заряженный шарик находится в фокусе эллиптической орбиты иона, и поэтому ясно, что расстояние от шарика до иона при прохождении точки B (находящейся на конце малой полуоси – см. рисунок) равно a . Далее запишем уравнение для центростремительного ускорения иона в точке B , то можно

выразить его скорость в этой точке через длину большой полуоси:

$$m \frac{v_B^2}{R_B} = F_n = \frac{kq|Q|}{a^2} \frac{b}{a} \Rightarrow v_B^2 = \frac{kq|Q|}{ma}$$

(здесь q и Q – разноименные заряды иона и шарика, и m – масса иона). С другой стороны, постоянная полная энергия иона на данной орбите

$E = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{kq|Q|}{a} = -\frac{kq|Q|}{2a}$. Как видно, мы можем связать энергию иона с отношением $N \equiv \frac{r_{\max}}{r_{\min}}$: поскольку $2a = r_{\max} + r_{\min} = (N+1)r_{\min}$, то $E = -\frac{kq|Q|}{r_{\min}(N+1)}$.

На первоначальной орбите $E_0 = -\frac{kq|Q|}{r_{\min}(N_0+1)} = -\frac{kq|Q|}{9r_{\min}}$, так что $\frac{kq|Q|}{r_{\min}} = -9E_0$.

После включения ускорительной камеры энергия и орбита иона изменяются, но $r_{\min}$ остается неизменным (ион вылетает из нее перпендикулярно радиусу, так что эта точка остается «перигелием» его орбиты). Пусть на каждом прохождении камеры энергия иона увеличивается на ΔE . Тогда после одного прохождения $E_0 + \Delta E = -\frac{kq|Q|}{r_{\min}(N_1+1)} = \frac{9}{10}E_0 \Rightarrow \Delta E = -\frac{E_0}{10}$, а после n прохождений

$$E_0 + n\Delta E = E_0 \left(1 - \frac{n}{10}\right) = \frac{9E_0}{N_n + 1}.$$

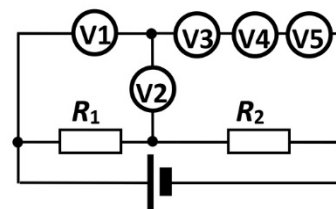
Из этого уравнения находим, что $N_n = \frac{80+n}{10-n}$. Как видно, после 5-го прохождения ионом ускорительной камеры $N_5 = 17$, а $N_{10} = \infty$, то есть после 10 прохождений ускорительной камеры ион перейдет на незамкнутую (на самом деле параболическую) орбиту и не вернется к ускорительной камере.

Ответ: После пятого прохождения ионом ускорительной камеры $N_5 = 17$, и после десяти прохождений ускорительной камеры ион перейдет на параболическую орбиту и не вернется к ускорительной камере.

Задание 4:

Вопрос: Когда к источнику постоянного напряжения подключили вольтметр, то он показал напряжение $(11,765 \pm 0,002)$ В. При подключении к этому источнику двух таких вольтметров, соединенных параллельно, каждый из них показал напряжение $(11,538 \pm 0,002)$ В. Найдите отношение внутренних сопротивлений вольтметра и источника и оцените возможную ошибку результата.

Задача: Ученик 9 класса собрал цепь, схема которой показана на рисунке, из аккумулятора, двух резисторов и пяти одинаковых вольтметров. Известно, что вольтметры «практически идеальные», ЭДС источника $\mathcal{E} = 14$ В, а его внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Сопротивления резисторов $R_1 = 5$ Ом и $R_2 = 4$ Ом. Определите показания всех вольтметров (они показывают напряжения без учета полярности).



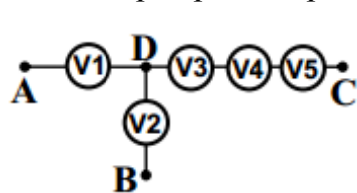
Ответ на вопрос: Введем обозначения: пусть U – напряжение, создаваемое источником на своих клеммах при разомкнутой цепи (его ЭДС), r – его внутреннее сопротивление, а R – сопротивление вольтметра. Тогда при подключении одного вольтметра к клеммам источника сила тока через него равна $I = \frac{U}{R+r}$, и напряжение на вольтметре $U_1 = \frac{R}{R+r}U = \frac{z}{z+1}U$, где

$z \equiv \frac{R}{r}$. При подключении двух вольтметров $U_2 = \frac{R/2}{R/2+r} U = \frac{z}{z+2} U$, то есть $\frac{U_1}{U_2} = \frac{z+2}{z+1} \Rightarrow z = \frac{2U_2 - U_1}{U_1 - U_2} \approx 48,828$ (здесь оставлены 5 значащих цифр – как было

в данных). Для оценки точности можно применить, например, «интервальный» метод: взять максимальные и минимальные в пределах ошибки значения U_1 и U_2 , получим максимальное и минимальное значение z : $z_{\min} \approx 48,939$ и $z_{\max} \approx 50,749$. Как видно, отклонения от «среднего» значения примерно равны $\Delta z \approx 0,9$, то есть реально ошибка появляется уже в третьей значащей цифре: $\frac{R}{r} \approx 48,8 \pm 0,9$. Такое снижение точности результата по сравнению с точностью

данных появилось из-за того, что в вычислениях мы делили на малое число – разность близких величин. В общем случае «интервальный» метод – весьма приблизительный метод оценки погрешностей, но в данном примере он дает разумный результат. Ответ $\frac{R}{r} \approx 49 \pm 1$ – тоже вполне приемлемый.

Решение задачи: Ясно, что сопротивление вольтметров значительно превышает сопротивления резисторов и источника, поэтому при расчете сил токов через резисторы токами, текущими через вольтметры, можно пренебречь.



Тогда через оба резистора течет ток с силой $I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r} = 1,4 \text{ А}$. При этом напряжение между

точками А и В равно $U_{AB} = IR_1 = 7 \text{ В}$, а напряжение между точками В и С $U_{BC} = IR_2 = 5,6 \text{ В}$. Отметим, что

вольтметры одинаковы, а через вольтметры 3-5 течет общий, так что их показания одинаковы. Справедливы следующие условия баланса напряжений: $U_1 + U_2 = U_{AB}$ и $3U_3 - U_2 = U_{BC}$. Еще одно уравнение можно получить, вспомнив, что токи (хоть и чрезвычайно малые) через вольтметры все-таки текут, и для них справедливо условие непрерывности в узле D: $I_1 = I_2 + I_3$ (обратите внимание на «согласование» выбора положительного направления тока и «положительной» полярности для вольтметра 2). Умножив это равенство на сопротивление одного вольтметра, получим $U_1 = U_2 + U_3$. Решаем полученную систему и находим:

$$U_1 = \frac{4U_{AB} + U_{BC}}{7} = 4,8 \text{ В}, \quad U_2 = \frac{3U_{AB} - U_{BC}}{7} = 2,2 \text{ В} \quad \text{и} \quad U_3 = \frac{U_{AB} + 2U_{BC}}{7} = 2,6 \text{ В}.$$

Отметим, что $U_2 > 0$, то есть мы «угадали» полярность, хотя этого и не требовалось.

Ответ: $U_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r} \frac{4R_1 + R_2}{7} = 4,8 \text{ В}, \quad U_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r} \frac{3R_1 - R_2}{7} = 2,2 \text{ В} \quad \text{и}$

$$U_3 = U_4 = U_5 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r} \frac{R_1 + 2R_2}{7} = 2,6 \text{ В}.$$

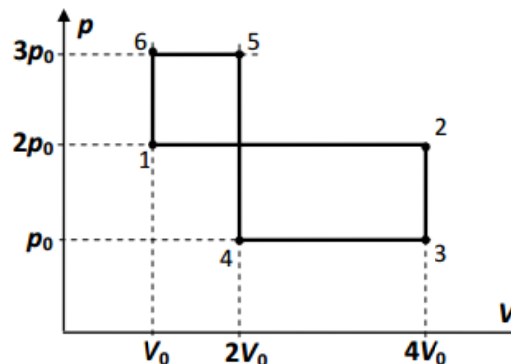
10 класс

ЗАДАНИЕ ОТБОРОЧНОГО (ЗАОЧНОГО)
ЭТАПА

Часть I (проверяются ответы), пример варианта:

Вопрос 1 (7 баллов):

Над постоянным количеством идеального газа произвели процесс 1-2-3-4-5-6-1, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление-объем. Вычислите количество теплоты, которым газ в этом процессе обменялся с окружающими телами, если $p_0 = 50$ кПа, а $V_0 = 3$ л. Ответ запишите в Дж, с учетом знака ($Q > 0$ соответствует получению газом теплоты), без указания единиц измерения.



Ответ: 150.

Комментарий: Согласно I Началу термодинамики, $Q = A + \Delta U$. В циклическом процессе $\Delta U = 0$, так что полученное газом тепло равно совершенной им работе, а она численно равна площади контура процесса в координатах давление-объем с учетом направления обхода. Здесь контур состоит из двух частей с противоположным направлением обхода, так что $Q = A = +2p_0V_0 - p_0V_0 = +p_0V_0 = +150$ Дж.

Вопрос 2 (9 баллов):

14 одинаковых маленьких заряженных шариков с зарядом $q = 1$ мкКл у каждого закреплены в вершинах правильного 14 – угольника, у которого радиус описанной окружности равен 3 см. По тонкому диэлектрическому стержню длиной 3 м равномерно распределен заряд $Q = 3$ мкКл. Стержень размещен перпендикулярно плоскости, в которой находятся шарики, и один из его концов оказался точно в центре 14-угольника. Найдите величину силы, действующей на стержень со стороны электрического поля шариков. Ответ запишите в Н, с точностью до десятых, без указания единиц измерения.

Ответ: 4,2.

Комментарий: Направим ось x вдоль стержня, совместив начало координат с началом стержня (и, естественно, с центром N -угольника). Работа искомой силы над стержнем при малом перемещении его вдоль этой оси равна $dA = F_x \cdot dx$. Эта работа может быть вычислена как взятое со знаком «минус» изменение потенциальной энергии взаимодействия зарядов системы при таком перемещении. Очевидно, что с точки зрения изменения относительного положения зарядов это перемещение эквивалентно «отрезанию» от конца стержня, находящегося в центре многоугольника из зарядов, кусочка длиной dx с зарядом $(Q/L)dx$ и переносу его на другой конец стержня. Поэтому

$$F_x \cdot dx = -dE_n = \left(\frac{kNq}{r} - \frac{kNq}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right) \frac{Q}{L} dx, \quad \text{и} \quad F_x = \frac{kNQq}{Lr} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right) \approx 4,2 \text{ Н.}$$

Впрочем, поскольку $\frac{r}{L} = 0,01$, то в рамках заданной точности последнее слагаемое в скобках несущественно, и можно пользоваться более простой формулой $F_x \approx \frac{kNQq}{Lr}$.

Вопрос 3 (9 баллов): Совпадал с вопросом 3 у 7-9 классов.

Часть II (проверяются решения):

1. («Эффект застоя», 20 баллов) Существует интересное явление, связанное с силой сухого трения. Его называют *эффектом застоя* и оно состоит в превышении максимальной величины силы трения покоя над силой трения скольжения. Рассмотрим движение бруска массы m , у которого зависимость силы трения от его скорости v относительно поверхности описывается выражением:

$$F_{mp}(v) = \begin{cases} 0 \div F_m \equiv \mu mg + \Delta F, & v = 0 \\ \mu mg + \Delta F(1 - v/v_0), & 0 < v \leq v_0 \\ \mu mg, & v > v_0 \end{cases}$$

Брусок сначала подталкивают, сообщая ему скорость, равную $v_0/2$, а затем тянут его по горизонтальной поверхности по прямой, прикрепив к легкой практически нерастяжимой нити, поддерживая силу натяжения нити неизменной и с высокой точностью равной максимальной величине силы трения покоя. Как при этом зависит величина его скорости от пройденного пути? Получите общую формулу, выражающую эту зависимость.

В качестве первого и второго численного ответа вычислите $v(s)/v_0$ для двух значений пройденного пути: $s_1 = \frac{mv_0^2}{4\Delta F}$ и $s_2 = \frac{9mv_0^2}{8\Delta F}$.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Движение бруска нужно разбить на две фазы: при скорости менее v_0 для описания величины силы трения можно, в соответствии с условием, использовать выражение $F_{mp}(v) = \mu mg + \Delta F(1 - v/v_0)$, а при $v > v_0$ сила трения постоянна: $F_{mp}(v) = \mu mg$. Запишем уравнение движения в первой фазе:

$$m \frac{dv}{dt} = F - F_{mp}(v) = \frac{\Delta F}{v_0} v.$$

Поскольку брусок не меняет направления движения, то его путь за малое время dt равен $ds = vdt$, и поэтому, суммируя малые приращения скорости бруска и его пути, находим:

$$m dv = \frac{\Delta F}{v_0} v dt = \frac{\Delta F}{v_0} ds \Rightarrow m \left(v - \frac{v_0}{2} \right) = \frac{\Delta F}{v_0} s \Rightarrow v(s) = \frac{v_0}{2} + \frac{\Delta F}{mv_0} s.$$

Скорость v_0 достигается при $s = s_0$, где, как видно из полученной формулы, $s_0 = \frac{mv_0^2}{2\Delta F}$. Следовательно, значение $s = s_1$ относится именно к этому интервалу, и $v_1 = (3/4)v_0$.

Второе значение $s = s_2$ относится уже ко второй фазе, для которой сила трения и (вместе с ней) результирующая сила $F - F_{mp} = \Delta F$ постоянны, и изменение кинетической энергии может быть вычислено по работе результирующей силы:

$$\frac{mv^2(s)}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Delta F(s - s_0) \Rightarrow v(s) = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\Delta F}{m}(s - s_0)} = \sqrt{\frac{2\Delta F}{m}s}.$$

Следовательно, $v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta F}{m}s_2} = \frac{3}{2}v_0$. Общая формула, выражающая зависимость величины скорости бруска от пройденного пути, получается объединением двух полученных формул:

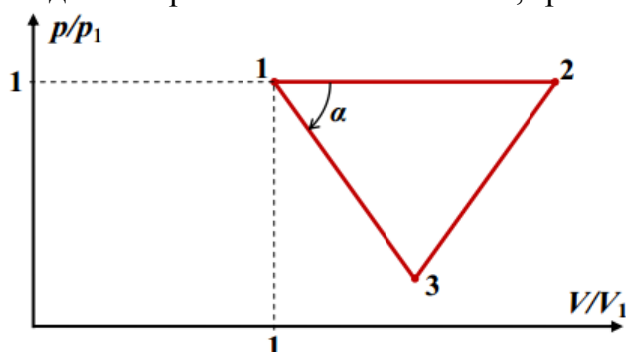
$$v(s) = \begin{cases} \frac{v_0}{2} + \frac{\Delta F}{mv_0}s, & s \leq s_0 \equiv \frac{mv_0^2}{2\Delta F} \\ \sqrt{\frac{2\Delta F}{m}s}, & s > s_0 \equiv \frac{mv_0^2}{2\Delta F} \end{cases}.$$

ОТВЕТЫ: $v(s) = \begin{cases} \frac{v_0}{2} + \frac{\Delta F}{mv_0}s, & s \leq s_0 \equiv \frac{mv_0^2}{2\Delta F} \\ \sqrt{\frac{2\Delta F}{m}s}, & s > s_0 \equiv \frac{mv_0^2}{2\Delta F} \end{cases}, v_1 = \frac{3}{4}v_0, v_2 = \frac{3}{2}v_0.$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Сделан вывод о разделении движения на две фазы	1
Правильно записано уравнение движения для первой фазы	1
Получено уравнение связи изменений скорости и пути, эквивалентное $m dv = \frac{\Delta F}{v_0} ds$	2
Правильно найдена зависимость $v(s)$ на первой фазе движения	4
Правильно найдена $v_1 = 0,75 \cdot v_0$	3
Для анализа второй фазы используется закон изменения энергии	1
Правильно найдена зависимость $v(s)$ на второй фазе движения	4
Правильно найдена $v_2 = 1,5 \cdot v_0$	2
Записан общий ответ для $v(s)$	2
ВСЕГО	20

2. («Треугольный КПД», 20 баллов) В некотором конструкторском бюро создали серию тепловых машин, рабочим телом которых было постоянное количество одного и того же идеального газа. Диаграммы циклов всех машин в координатах давление-объем имели вид равнобедренного треугольника с основанием, параллельным оси V . Если выбрать в качестве масштабных единиц на осях диаграммы значения объема и



давления p/p_1 и V/V_1 равными единице, то диаграмма цикла будет иметь вид равнобедренного треугольника с основанием, параллельным оси V . Если выбрать в качестве масштабных единиц на осях диаграммы значения объема и

давления в состоянии 1 (см. рисунок), то угол при основании всех треугольников окажется одинаков, и различаться циклы разных машин будут только отношением $\frac{V_{max}}{V_{min}}$. Известно также, что этот угол выбран так, что в каждом из трех процессов, отвечающих сторонам треугольника, газ только получает или только отдает тепло (для всех используемых циклов). В таблице даны два значения КПД для циклов с разными значениями переменной $z \equiv \frac{V_{max}-V_{min}}{V_{min}}$:

z	5/11	10/17
КПД	4 %	5 %

Определите количество степеней свободы молекулы используемого газа и величину угла α . Найдите КПД цикла при $z = 1$.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Начнем с определения параметров состояний. Как видно из определения нашей переменной, $V_2 = (1 + z)V_1$. Поскольку треугольник равнобедренный, $V_2 - V_3 = V_3 - V_1$, и поэтому $V_3 = \left(1 + \frac{z}{2}\right)V_1$. Так как величина угла при основании всегда одна и та же, то для всех циклов $\frac{p_1 - p_3}{p_1} = \operatorname{tg}(\alpha) \frac{V_3 - V_1}{V_1} = \operatorname{tg}(\alpha) \frac{z}{2}$. Тогда $p_1 - p_3 = \operatorname{tg}(\alpha) \frac{z}{2} p_1$ и $p_3 = \left(1 - \operatorname{tg}(\alpha) \frac{z}{2}\right) p_1$.

Работа в этом цикле равна $A = \frac{1}{2}(p_1 - p_3)(V_2 - V_1) = \frac{p_1 V_1}{4} \operatorname{tg}(\alpha) z^2$.

Ясно, что в процессе 1-2 газ только получает тепло, а в процессе 2-3 – только отдает. В процессе 3-1 может происходить изменение направления теплообмена, то есть именно на этом участке может находиться точка касания адиабаты. В соответствии с условием угол α выбран так, чтобы такая точка не была внутренней для отрезка 3-1. Значит, если такая точка и есть, то это одна из крайних точек – 1 или 3. Рассмотрим два возможных варианта: $Q_{31} < 0$ и $Q_{31} > 0$.

а) В случае $Q_{31} < 0$ газ получает тепло только в процессе 1-2, и количество теплоты нагревателя $Q_H = Q_{12} = \frac{i+2}{2} p_1 (V_2 - V_1) = \frac{i+2}{2} p_1 V_1 z$. (здесь i – число степеней свободы молекулы газа). Значит, в этом случае КПД цикла равен $\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{1}{2(i+2)} \operatorname{tg}(\alpha) \cdot z$. Таким образом, если в наших циклах $Q_{31} < 0$, то значения КПД должны удовлетворять соотношению $\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{z_2}{z_1}$. Проверим: на самом деле $\frac{5}{4} \neq \frac{22}{17}$, то есть этот вариант не подходит.

б) Остается $Q_{31} > 0$. Тогда газ отдает тепло только в процессе 2-3, и количество теплоты холодильника $Q_X = -Q_{23} = \frac{p_1 + p_3}{2} (V_2 - V_3) + \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_3 V_3)$. Используем выражения для параметров, полученные в начале, и получим:

$$Q_X = \frac{p_1 V_1}{4} \left\{ z \left[2 - \operatorname{tg}(\alpha) \frac{z}{2} \right] + 2i \left[1 + z - \left(1 + \frac{z}{2} \right) \left(1 - \operatorname{tg}(\alpha) \frac{z}{2} \right) \right] \right\} = \\ = \frac{p_1 V_1}{4} z \left[2 + i(1 + \operatorname{tg}(\alpha)) + (i - 1) \operatorname{tg}(\alpha) \frac{z}{2} \right].$$

Значит, в этом случае

$$\eta = \frac{A}{A + Q_X} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) z}{(i + 1) \operatorname{tg}(\alpha) \frac{z}{2} + 2 + i(1 + \operatorname{tg}(\alpha))}$$

Для исследования этой зависимости ее удобно линеаризировать. Как видно обратная величина КПД есть линейная функция обратной величины z :

$$\frac{1}{\eta} = \frac{i+1}{2} + \frac{2+i(1+\operatorname{tg}(\alpha))}{\operatorname{tg}(\alpha)} \frac{1}{z} \equiv a + \frac{b}{z}$$

По двум точкам находим коэффициенты этой зависимости:

$$\begin{cases} 25 = a + \frac{11b}{5} \\ 20 = a + \frac{17b}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \end{cases}$$

и находим число степеней свободы молекулы газа $\frac{i+1}{2} = 3 \Rightarrow i = 5$ (то есть это двухатомный идеальный газ) и угол $\frac{7+5\operatorname{tg}(\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha)} = 10 \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{7}{5}$. Таким образом, величина угла $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{5}\right)$. При $z = 1$ КПД равен $\eta = \frac{1}{13} \approx 7,7\%$.

Проверим то, что в процессе 3-1 нет состояний, в которых происходит изменение направления теплообмена. Запишем уравнение этого процесса в виде

$$p(V) = p_1 - \frac{p_1 - p_3}{V_3 - V_1}(V - V_1) = p_1 \left[1 - \frac{7}{5} \left(\frac{V}{V_1} - 1 \right) \right] = \frac{p_1}{5} \left[12 - 7 \frac{V}{V_1} \right]$$

и будем искать точку касания с адиабатой из условия равенства нулю бесконечно малого количества теплоты, которым газ обменялся с окружающими телами в окрестности этой точки:

$$\delta Q = pdV + \frac{5}{2}d(pV) = \frac{7}{2}pdV + \frac{5}{2}Vdp = \frac{42p_1dV}{5} \left[1 - \frac{V}{V_1} \right] = 0$$

Мы обнаруживаем, что такая точка есть на отрезке 3-1, и в ней объем газа $V = V_1$. Значит, это точка 1 – крайняя точка процесса, и условие постоянства направления теплообмена для 3-1 выполнено.

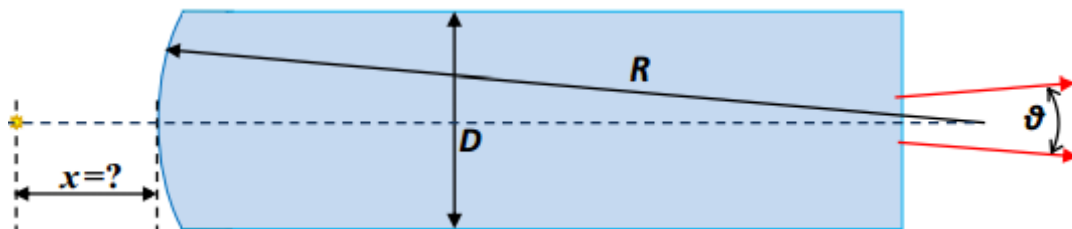
ОТВЕТЫ: $i=5$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1,4) \approx 54,5^\circ$, $\eta = \frac{1}{13} \approx 7,7\%$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Правильно выражены V_2 и V_3 через z и V_1	1+1=2
Правильно выражено p_3 через α , z и p_1	3
Получена формула для работы, эквивалентная $A = \frac{1}{2}(p_1 - p_3)(V_2 - V_1) = \frac{p_1 V_1}{4} \operatorname{tg}(\alpha) z^2$	2
Правильно проведен анализ возможности $Q_{31} < 0$	2
Для $Q_{31} > 0$ получена правильная формула для КПД через α , z и i	3
Правильно найдено $i=5$	2
Правильно найден $\alpha = \operatorname{arctg}(1,4) \approx 54,5^\circ$	2
Правильно найден КПД при $z = 1$	2
Проведена проверка постоянства направления теплообмена в процессе 3-1	2
ВСЕГО	20

3. («Тепло и свет», 15 баллов) Совпадала с задачей 3 для 7-9 классов.

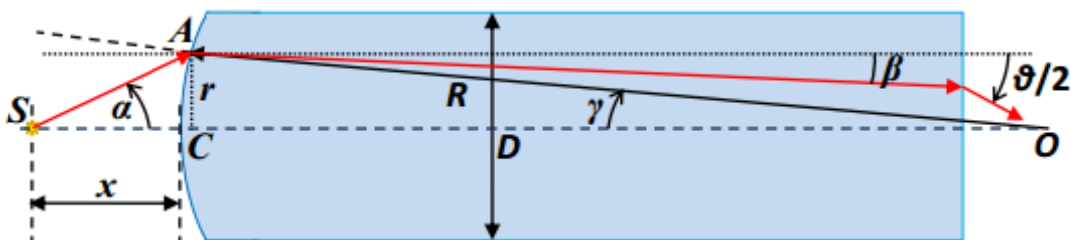
4. («Очень толстая линза», 20 баллов) В некоторой установке использовался пучок параллельных лучей с очень маленькой расходимостью – максимальный угол между двумя лучами в этом пучке не должен был превышать $\vartheta_{\max} = 0,1^\circ$. Для создания такого пучка использовались яркий монохроматический сферический источник света с диаметром $d = 4 \text{ мкм}$ и коллиматор – цилиндр диаметром $D = 10 \text{ см}$ из стекла с показателем преломления $n = 2$, один торец которого тщательно отшлифован в форме сферической поверхности радиусом $R = 50 \text{ см}$, центр кривизны которой лежит на оси цилиндра (см. рисунок). На каком расстоянии x от вершины этой поверхности нужно разместить источник, чтобы его лучи, прошедшие через коллиматор, образовали пучок с требуемыми характеристиками?



Указание: Учтите, что при $\alpha \ll 1$ справедливы приближенные равенства $\sin(\alpha) \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$ и $\text{tg}(\alpha) \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$ с ошибкой менее $\frac{\alpha^5}{5}$. Источник света в рамках требуемой точности можно считать точечным.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Сразу отметим, что размеры источника крайне малы и их влиянием на ход лучей можно пренебрегать ($\frac{d}{D} = 4 \cdot 10^{-5}$, и даже для «крайних» лучей влияние размеров источника на угол наклона луча к оси менее $0,001^\circ$). Введем обозначения: пусть α – угол наклона к оси системы луча от источника, падающего на сферическую поверхность в точке А на расстоянии r от оси.



Угол отклонения преломленного луча от оси обозначим β , а угол между осью системы и радиусом сферической поверхности, проведенным в точку А, назовем γ . В качестве переменной, описывающей положение точки А, будем использовать $y \equiv \sin(\gamma) = \frac{r}{R}$. Как видно, область изменения этой переменной

$0 \leq y \leq \frac{D}{2R} = 0,1 \ll 1$. Закон преломления луча в точке А дает связь углов β и α :

$$\sin(\alpha + \gamma) = n \cdot \sin(\gamma - \beta) \Rightarrow \sin(\alpha) \sqrt{1 - y^2} + y \cos(\alpha) = 2y \cos(\beta) - 2 \sin(\beta) \sqrt{1 - y^2}. \quad (4.1)$$

Искомое расстояние x связано с углом α :

$$x = r \cdot \operatorname{ctg}(\alpha) - R[1 - \cos(\gamma)] = R[y \cdot \operatorname{ctg}(\alpha) - 1 + \sqrt{1 - y^2}]. \quad (4.2)$$

Отметим, что отражение лучей от боковой цилиндрической поверхности коллиматора не изменяет модуля β , и к тому же для получающихся углов здесь происходит полное внутреннее отражение, так что и на яркость лучей эти отражения не влияют. В дальнейшем мы не будем обращать на них внимания. Так как ограничение на угол $\vartheta = \arcsin[n \cdot \sin(\beta)]$ очень жесткое, то и углы β должны быть крайне малы, и с высокой точностью можно считать, что $\frac{\vartheta}{2} = n |\beta| \Rightarrow |\beta| \leq \frac{\vartheta_{\max}}{4} = 0,025^\circ \approx 0,00044$. Однако аналитически выразить β через y из полученных трансцендентных уравнений не получится. Поэтому тут возможны два пути:

I. Выразить $\beta(x, y)$ из (4.1) и (4.2), пользуясь малостью y . При этом сразу необходимо понять, что слагаемые порядка $y^3 \leq 10^{-3}$ существенны в требуемом масштабе точности вычислений, и их необходимо сохранять (пренебрегать мы можем только слагаемыми порядка $y^5 \leq 10^{-5}$ и меньше). В этом случае из (4.2) с учетом $1 - \sqrt{1 - y^2} \approx \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8}$ находим: $\operatorname{tg}(\alpha) \approx \frac{y}{z + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8}}$, где $z \equiv \frac{x}{R}$. Записав

$\alpha \approx a_1 y + a_3 y^3$, и используя разложение для тангенса, находим, приравнивая слагаемые с одинаковой степенью: $a_1 = \frac{1}{z}$ и $a_3 = -\frac{3z+2}{6z^3}$. Таким образом, с точностью до поправок порядка y^5 угол $\alpha \approx \frac{y}{z} - \frac{3z+2}{6z^3} y^3$. Аналогично в (4.1) записываем $\beta \approx b_1 y + b_3 y^3$, и снова используем разложения для синуса и косинуса ($\cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha)} \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$): $b_1 = \frac{z-1}{2z}$ и $b_3 = +\frac{7z^3 + 9z^2 + 21z + 11}{48z^3}$. Таким образом,

$$\beta(y, z) \approx \frac{z-1}{2z} y + \frac{7z^3 + 9z^2 + 21z + 11}{48z^3} y^3.$$

Мы обнаружили, что в порядке y^1 при $z = 1$ (то есть для случая $x = R$, когда источник располагается в фокусе сферической поверхности, рассчитанном в параксиальном приближении – например, по формуле оптической силы тонкой линзы) мы получаем, что все лучи в коллиматоре идут параллельно оси. Однако при учете поправок порядка y^3 для луча с максимальным отклонением ($y = 0,1$) от оси $\beta(0,1,1) \approx 0,001 > 0,00044$. Это означает, что при таком положении источника пучок имеет слишком большую расходимость! Как видно, на самом деле лучше взять z немного меньше 1, и в этом случае $\beta_{\max}$ будет меньше. Например, можно выбрать его так, чтобы при $y = 0,1$ угол отклонения β обращался в ноль (это соответствует $z \approx 0,980$ или $x \approx 490$ мм), и этот выбор отвечает $\beta_{\max} \approx 0,00041$, то есть пучок удовлетворяет введенным требованиям. Более подробное исследование показывает, что пучок удовлетворяет

требованиям при $0,979 \leq z \leq 0,988$ (то есть $489,5 \text{ мм} \leq x \leq 494 \text{ мм}$), а наименьшая расходимость пучка достигается при $z \approx 0,984$ ($x \approx 492 \text{ мм}$).

II. Можно догадаться, что наиболее критичная область – область углов, близких к максимальному отклонению ($y \approx 0,1$), и можно выбирать положение источника таким образом, чтобы $\beta = 0$ при определенном значении y , например – именно при $y = 0,1$. Такой подбор можно осуществить непосредственно на базе формул (3.1) и (3.2): положив в (3.1) $\beta = 0$, находим, что $\sin(\alpha)\sqrt{1-y^2} + y \cos(\alpha) = 2y \Rightarrow \alpha = \arcsin[2\sin(\gamma)] - \gamma$. Подставив это значение в

(3.2), находим, что $x = R \left[\frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-4y^2} + 2y^2}{2\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-4y^2}} - 1 + \sqrt{1-y^2} \right]$. Тогда для $y = 0,1$

получается $x \approx 0,97985 \cdot R \approx 489,9 \text{ мм}$. Как видно, этот метод дает разумный результат и намного проще по расчетам, но он менее строг: отсутствие аналитической формулы для β не позволяет провести анализ угла отклонения на максимум, и мы опираемся на «догадку» о том, что нужно минимизировать отклонение «крайних» преломленных лучей от оси.

III. Можно модифицировать «второй» метод, проведя численный анализ значений угла отклонения на максимум во всем возможном интервале точек падения (на основе формул (3.1) и (3.2) или в рамках корректного эквивалентного подхода). В этом случае – при четком объяснении процедуры и представлении результатов расчета для разных значений x и разных точек падения – такой метод решения становится строгим, и он засчитывался наравне с «первым».

ОТВЕТ: $x \approx (492 \pm 2) \text{ мм}$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Указано (используется в решении), что размерами источника можно пренебречь	1
Указано (используется в решении), что отражения от боковой поверхности не влияют на результат	1
Правильно записан закон преломления на сферической поверхности (3.1)	3
Правильно записано уравнение, эквивалентное (3.2)	2
Обосновано, что в разложении по малому параметру нужно учитывать слагаемые с относительной величиной до 10^{-3} / Объяснено, что нужно минимизировать отклонение «крайних» лучей от оси	3 / 2*)
Получено выражение для $\beta(y, z)$ в нужном порядке / найдено выражение для x , при котором крайний луч не отклоняется	5 / 3*)
Ответ для x в виде диапазона $(492 \pm 2) \text{ мм}$ / ответ в виде числа в диапазоне $(492 \pm 3) \text{ мм}$ / только в диапазоне $(492 \pm 5) \text{ мм}$	3/2/1
Проведен анализ отклонения на максимум для всех точек падения	2*
ВСЕГО	20

*) При решении «вторым» методом вообще без анализа отклонений на максимум во всем возможном интервале точек падения максимальная оценка равна **16 баллам**, если также нет объяснения, почему выбран крайний луч, то **15 баллам**.

Примечание: Как видно из приведенного решения, использование формулы тонкой линзы или «формулы шлифовальщика» при заданном требовании к *коллинеарности* (малой расходимости) пучка является слишком грубым, так как при их выводе в выражениях для синусов и тангенсов углов пренебрегают упомянутыми в условии кубическими поправками. Поэтому практически любое решение на основе этих формул оказывается по сути неверным. Кроме того, ясно, что в рамках параксиального приближения корректные вычисления обязательно должны привести нас к ответу $x = 500$ мм. В ходе проверки жюри обнаружило много (более 100) работ с решениями, приводящими к ответу $x \geq 504$ мм (или аналогичному со «сдвигом» запятой). Жюри просит участников в дальнейшем быть более внимательными. Эти решения не только получены в рамках некорректного для данной задачи приближения с помощью вычислений, содержащих неточности, но и имеют физически бессмысленный ответ (из него, например, следует, что для лучи от удаленного ($x \rightarrow \infty$) источника, находящегося на главной оптической оси линзы, после прохождения линзы идут практически параллельно этой оси, а это очевидно не так!). Поэтому такие решения считались полностью неправильными.

ЗАДАНИЕ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА.

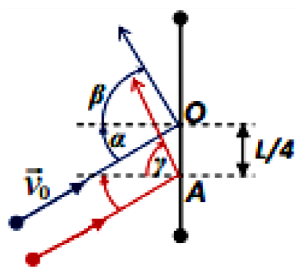
Максимальная оценка за вопрос – 5 баллов, максимальная оценка за задачу – 20 баллов.

БИЛЕТ № 05 (10 класс)

Задание 1:

Вопрос: Гантель из двух маленьких шайб, соединенных прямым жестким стержнем длины L скользит по ровной поверхности. В некоторый момент времени шайбы движутся перпендикулярно стержню в одну сторону со скоростями v и $2v$. С какой угловой скоростью вращается стержень гантели в этот момент времени? Ответ объяснить.

Задача: Гантель из двух одинаковых массивных маленьких шайб, соединенных легким прямым гладким жестким стержнем, покоилась на гладкой



горизонтальной поверхности. Еще одна маленькая однородная цилиндрическая шайба скользила по этой поверхности со скоростью v_0 и нанесла упругий удар по стержню гантели в его середине – точке O . Угол падения (между $\vec{v}_0$ и нормалью к стержню в точке удара) был равен $\alpha = 30^\circ$, а угол отражения (см. рисунок) $\beta = 60^\circ$.

После этого гантель вернули на место, и ту же шайбу запустили еще раз – с той же скоростью $\vec{v}_0$, но, так, что теперь удар пришелся в

точку A , находящуюся на расстоянии $x = \frac{L}{4}$ от центра стержня. Найдите величину угла отражения шайбы γ при этом ударе.

Ответ на вопрос: Ясно, что если скорость мгновенного центра вращения гантели равна V , то она направлена в ту же сторону, что и скорости шайб, причем $V_1 = V - \omega \frac{L}{2}$ и $V_2 = V + \omega \frac{L}{2}$. Значит, $V_2 - V_1 = \omega L$, то есть $\omega = \frac{2v - v}{L} = \frac{v}{L}$.

Решение задачи: Первый удар является центральным, и гантель не начнет вращаться. Действительно, из ответа на вопрос следует, что скорости шайб сразу после удара будут одинаковы, что также соответствует поступательному движению. Пусть v – величина скорости налетающей шайбы после удара, а V – скорости каждой из шайб (и, соответственно скорость центра масс гантели). Закон сохранения импульса в проекции на оси x (перпендикулярно стержню) и y (вдоль стержня) имеют вид (m – масса налетающей шайбы, и M – масса каждой из шайб модели):

$$\begin{cases} mv_0 \cos \alpha = 2MV - mv \cos \beta \\ mv_0 \sin \alpha = mv \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{v_0}{\sqrt{3}} \\ V = \frac{m}{M} \frac{v_0}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Здесь использовано знание углов падения и отражения: $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. С учетом закона сохранения энергии $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2MV^2}{2}$ находим, что $M = m$.

Второй удар – нецентральный, и угловая скорость вращения гантели после удара отлична от нуля. Обозначим ее ω . Если теперь V – скорость центра масс гантели после удара, то скорости шайб сразу после удара $V_1 = V - \omega \frac{L}{2}$ и $V_2 = V + \omega \frac{L}{2}$. Пусть теперь $\vec{F}$ – сила, действующая на стержень во время удара (со стороны налетающей шайбы). Она приложена к точке на расстоянии x от центра стержня и перпендикулярна ему. Так как стержень невесом, то в любой момент времени сумма приложенных к нему сил и моментов сил равна нулю. Тогда для проекций сил $\vec{F}_{1,2}$, действующих во время удара на стержень со стороны шайб, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = F \\ F_2(L/2) - F_1(L/2) = Fx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = (0,5 - x/L)F \\ F_2 = (0,5 + x/L)F \end{cases}.$$

Импульсы, приобретенные шайбами за время удара, пропорциональны «парным» силам $\vec{F}'_{1,2}$. Поэтому $\frac{V_2}{V_1} = \frac{L+2x}{L-2x}$. Таким образом, $\frac{2V + \omega L}{2V - \omega L} = \frac{L+2x}{L-2x} \Rightarrow \omega L = \frac{4x}{L} V \equiv 2\varepsilon V$ (введено обозначение $\varepsilon \equiv \frac{2x}{L} \leq 1$). Новая запись закона сохранения импульса позволяет выяснить, что

$$\left\{ \begin{array}{l} mv_0 \cos \alpha = 2mV - mv \cos \gamma \\ mv_0 \sin \alpha = mv \sin \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v \sin \gamma = v_0 \sin \alpha \\ v \cos \gamma = 2V - v_0 \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 4v_0 \cos \alpha \cdot V + 4V^2$$

Подставляя это выражение в закон сохранения энергии, записанный с учетом энергии вращательного движения $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mV^2}{2} + 2 \frac{m(\omega L/2)^2}{2}$ и связь $\omega L = 2\varepsilon V$, получаем: $V = \frac{2 \cos \alpha}{3 + \varepsilon^2} v_0$. С учетом этого $v \cos \gamma = \frac{1 - \varepsilon^2}{3 + \varepsilon^2} v_0 \cos \alpha$, и $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{13}{3\sqrt{3}}$. Как видно, $\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{13}{3\sqrt{3}}\right) \approx 68^\circ$ (оценка численного значения угла не обязательна).

Ответ: $\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{3 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \operatorname{tg} \alpha\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{13}{3\sqrt{3}}\right) \approx \operatorname{arctg}(2,5) \approx 68^\circ$, где $\varepsilon = \frac{2x}{L} = \frac{1}{2}$.

Возможный вариант ответа: $\gamma = 60^\circ + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right) \approx \left(60 + \frac{15\sqrt{3}}{\pi}\right)^\circ \approx 68^\circ$.

Задание 2:

Вопрос: Влажный воздух в герметичном сосуде при 100°C имеет относительную влажность 60% и давление 1 Атм. Каким станет его давление после изотермического уменьшения объема сосуда в два раза? Ответ дайте в атмосферах.

Задача: В цилиндрическом герметичном сосуде с гладкими стенками под легким подвижным поршнем находится влажный воздух. Масса содержимого сосуда $m = \frac{2522}{831} \approx 3,035$ г, и при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ и нормальном атмосферном давлении $p_0 \approx 101$ кПа объем содержимого $V = 3,73$ л. Сосуд вынесли на улицу, и содержимое сосуда охладилось до $t' = -13^\circ\text{C}$. Найдите массу льда, образовавшегося в сосуде. Каким примерно стал объем содержимого сосуда при новой температуре? Известно, что молярные массы воды и «сухого воздуха» можно считать равными $\mu_1 = 18,0$ г/моль и $\mu_2 = 29,0$ г/моль, давление насыщенных паров воды при новой температуре $p'_H \approx 202$ Па. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8,31$ Дж/(кг·К), $0^\circ\text{C} \approx 273$ К.

Ответ на вопрос: В соответствии с определением шкалы Цельсия, давление насыщенного водяного пара при 100°C равно 1 Атм. Значит, в исходном состоянии парциальное давление водяного пара равно 0,6 Атм, а сухого воздуха 0,4 Атм. При изотермическом уменьшении объема сосуда в два раза парциальное давление сухого воздуха, согласно закону Бойля-Мариотта, увеличивается в два раза и становится равным 0,8 Атм. Давление водяного пара в отсутствие конденсации тоже возросло бы в два раза, но это невозможно для равновесного состояния, так как тогда оно было бы больше давления насыщенного пара. Следовательно, при таком сжатии часть воды сконденсируется, и давление водяного пара будет равно 1 Атм. Таким образом, давление в сосуде станет равно 1,8 Атм.

Решение задачи: Пусть ν_1 и ν_2 – количества воды и сухого воздуха в сосуде. Запишем соотношения для давления и массы газовой смеси:

$$\left. \begin{aligned} p &= p_1 + p_2 = (\nu_1 + \nu_2) \frac{RT}{V} \\ m &= m_1 + m_2 = \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \nu_1 + \nu_2 = \frac{pV}{RT} \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 \approx \frac{101}{831} \text{ моля} \approx 0,1215 \text{ моля} \\ \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 = m \Rightarrow 18\nu_1 + 29\nu_2 \approx \frac{2522}{831} \text{ моля} \approx 3,035 \text{ моля} \end{cases}$$

Решая получившуюся систему, находим:

$$\nu_1 \approx \frac{37}{831} \text{ моля} \approx 0,04452 \text{ моля}, \quad \nu_2 \approx \frac{64}{831} \text{ моля} \approx 0,07702 \text{ моля}.$$

Ясно, что парциальное давление водяного пара меньше 1 Атм, и этот пар не был насыщенным. Значит, вначале в сосуде было $m_1 = \mu_1 \nu_1 =$

$$= \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \left(\frac{\mu_2 p V}{RT} - m \right) \approx 0,8014 \text{ г воды в виде пара. После охлаждения масса насы-$$

щенного водяного пара в сосуде равнялась $m'_1 = \frac{\mu_1 p'_H V'}{RT'}$, в то время как объем

содержимого сосуда определялся равенством давления сухого воздуха внешнему атмосферному давлению (давление водяного пара намного меньше

атмосферного). Значит, $V' = \frac{\nu_2 RT'}{p} = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left(\frac{m RT'}{p} - \mu_2 V \frac{T'}{T} \right) \approx 1,65 \text{ л, а } m'_1 =$

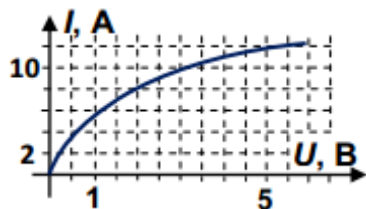
$$= \frac{\mu_1 \nu_2 p'_H}{p} \approx 0,0028 \text{ г. Значит, масса образовавшегося льда } \Delta m = m_1 - m'_1 \approx 0,7986 \text{ г.}$$

$$\text{Ответ: масса льда в сосуде } \Delta m = \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \left[\frac{pV}{RT} \left(\mu_2 + \frac{p'_H}{p} \mu_1 \right) - m \left(1 + \frac{p'_H}{p} \right) \right] \approx 0,8 \text{ г,}$$

$$\text{новый объем содержимого } V' = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left(\frac{m RT'}{p} - \mu_2 V \frac{T'}{T} \right) \approx 1,65 \text{ л.}$$

Задание 3: Совпадает с заданием 3 у 7-9 классов.

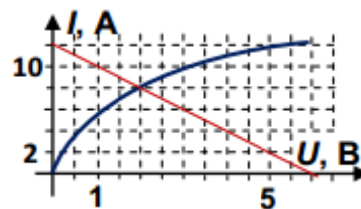
Задание 4:



Вопрос: Нелинейный элемент, ВАХ которого показана на рисунке, подключили к источнику постоянного тока с ЭДС 6 В и внутренним сопротивлением 0,5 Ом. Какую мощность этот элемент будет потреблять от источника?

Задача: ЭДС источника постоянного напряжения $\mathcal{E} = 24 \text{ В}$, а его внутреннее сопротивление $r = 3 \text{ Ом}$. К этому источнику подключили, соединив параллельно, резистор с сопротивлением $R = 3r = 9 \text{ Ом}$ и нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого описывается выражением $I(U) = \alpha \cdot \sqrt{U} \equiv \frac{1}{r} \sqrt{3\mathcal{E}U}$. Найдите мощности, потребляемые резистором и нелинейным элементом в этой схеме.

Ответ на вопрос: Приравняв напряжение на нелинейном элементе U к напряжению на источнике при токе $I(U)$, получаем уравнение, определяющее это напряжение: $U = \mathcal{E} - rI(U)$, то есть $I(U) = \frac{1}{r}(\mathcal{E} - U)$. Его можно решить графически, построив на рисунке с графиком ВАХ прямую, отвечающую правой части уравнения («нагрузочную прямую» источника). Точка пересечения ВАХ и прямой дает значения силы тока и напряжения для нелинейного элемента: $I = 8 \text{ А}$ и $U = 2 \text{ В}$ (см. рисунок). Следовательно, потребляемая элементом мощность $P = IU = 16 \text{ Вт}$.



Решение задачи: В соответствии с описанной схемой подключения, напряжение на нелинейном элементе U равно напряжению на резисторе и напряжению на источнике: $U = I_R R = \mathcal{E} - rI \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}$. С другой стороны, сила тока в ветви с источником, в соответствии с законом непрерывности тока $I = I_R + I_{HЭ} = \frac{U}{R} + \frac{1}{r}\sqrt{3\mathcal{E}U}$. Приравняв полученные выражения для силы тока, получаем уравнение на U : $\frac{U}{3} + \sqrt{3\mathcal{E}U} = \mathcal{E} - U$, или $x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4} = 0$ для переменной $x = \sqrt{U/\mathcal{E}}$. Положительный корень этого уравнения $x = \sqrt{3}/4$, так что $U = \frac{3}{16}\mathcal{E}$. Следовательно, сила тока через резистор равна $I_R = \frac{U}{R} = \frac{\mathcal{E}}{16r}$, а сила тока через нелинейный элемент $I_{HЭ} = \frac{1}{r}\sqrt{3\mathcal{E}U} = \frac{3}{4}\frac{\mathcal{E}}{r}$. Потребляемые мощности $P_R = UI_R = \frac{3}{256}\frac{\mathcal{E}^2}{r} = 2,25 \text{ Вт}$ и $P_{HЭ} = UI_{HЭ} = \frac{9}{64}\frac{\mathcal{E}^2}{r} = 27 \text{ Вт}$.

Ответ: $P_R = \frac{3}{256}\frac{\mathcal{E}^2}{r} = 2,25 \text{ Вт}$ и $P_{HЭ} = \frac{9}{64}\frac{\mathcal{E}^2}{r} = 27 \text{ Вт}$.

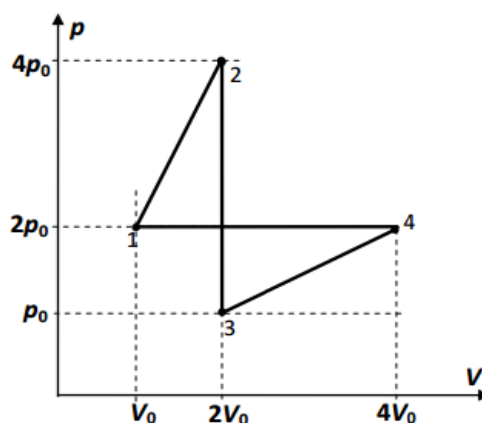
11 класс

ЗАДАНИЕ ОТБОРОЧНОГО (ЗАОЧНОГО) ЭТАПА

Часть I (проверяются ответы), пример варианта:

Вопрос 1 (7 баллов):

Над постоянным количеством идеального газа произвели процесс 1-2-3-4-1, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление-объем. Вычислите количество теплоты, которым газ в этом процессе обменялся с окружающими телами, если $p_0 = 50 \text{ кПа}$, а $V_0 = 3 \text{ л}$. Ответ запишите в Дж, с учетом знака ($Q > 0$ соответствует получению газом теплоты), без указания единиц измерения.



Ответ: 0.

Комментарий: Согласно I Началу термодинамики, $Q = A + \Delta U$. В циклическом процессе $\Delta U = 0$, так что полученное газом тепло равно совершенной им работе, а она численно равна площади контура процесса в координатах давление-объем с учетом направления обхода. Здесь контур состоит из двух частей равной площади с противоположным направлением обхода, так что $Q = A = 0$.

Вопрос 2 (9 баллов):

На двух одинаковых легких пружинах жесткостью $k = 300$ Н/м симметрично подвешена длинная однородная доска массы 2 кг. Точно над центром масс доски на ней лежит маленький по размерам груз массой $m = 1$ кг. Найдите максимальную возможную амплитуду вертикальных гармонических колебаний этой системы в отсутствие сил сопротивления воздуха. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с². Ответ запишите в см, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

Ответ: 5.

Комментарий: Так как пружины подчиняются закону Гука (задано k), колебания вертикальны и сопротивления воздуха нет, то причиной нарушения гармоничности колебаний может быть только отрыв груза от доски (у груза появляется негармоническая фаза свободного падения). Орыв произойдет, если доска будет двигаться вниз с ускорением, превышающим ускорение свободного падения g . Таким образом, условие гармоничности движения – это ограничение на амплитуду колебаний ускорения $a_m \leq g$. С другой стороны, при гармонических колебаниях $a_m = \omega^2 x_m$, а квадрат циклической частоты колебаний доски с грузом на паре пружин $\omega^2 = \frac{2k}{M + m}$. Таким образом, $x_m \leq \frac{(M + m)g}{2k}$, и максимальная возможная амплитуда вертикальных гармонических колебаний описанной системы $(x_m)_{\max} = \frac{(M + m)g}{2k} \approx 5$ см.

Вопрос 3 (9 баллов):

В некоторой области пространства откачан воздух и размещена отрицательно заряженная частая сетка, создающее в этой области почти однородное электрическое поле с напряженностью 1000 В/м. Кроме того, в этой области создано магнитное поле с индукцией 2 Тл, причем линии индукции параллельны силовым линиям электрического поля. Из одной из ячеек сетки ионная пушка выстреливает ион с удельным зарядом $+6 \cdot 10^6$ Кл/кг со скоростью 1 км/с под углом 20° к плоскости сетки. На каком расстоянии от точки вылета будет находиться ион в тот момент, когда он впервые вновь окажется в плоскости сетки? вновь. Ответ запишите в мкм с точностью до десятых, без указания единиц измерения.

Ответ: 99,0.

Комментарий: Ион после выстрела движется под действием силы $\vec{F}_E = q\vec{E}$, действующей со стороны электрического поля и силы Лоренца $\vec{F}_B = q[\vec{v} \times \vec{B}]$,

причем первая всегда направлена перпендикулярно сетке (ион притягивается к сетке), а вторая – в плоскости сетки. Поэтому движения иона вдоль оси z , направленной перпендикулярно сетке в направлении выстрела, и в проекции на плоскость сетки xy , происходят независимо: движение по z – равноускоренное ($z(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{qE}{2m}t^2$), а движение в проекции на плоскость xy – ларморовское

вращение по окружности радиусом $R = \frac{mv_0 \cos(\alpha)}{qB}$ с угловой скоростью $\omega = \frac{qB}{m}$.

Значит, возвращение иона в плоскость сетки произойдет за время $t = \frac{2mv_0 \sin(\alpha)}{qE}$,

и угол поворота его проекции по ларморовской окружности $\varphi = \omega t = \frac{2Bv_0 \sin(\alpha)}{E}$.

Расстояние иона от точки вылета в этот момент равно длине хорды ларморовской окружности, соответствующей этому углу поворота:

$$l = 2R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2mv_0 \cos(\alpha)}{qB} \sin\left(\frac{Bv_0 \sin(\alpha)}{E}\right) \approx 99,0 \text{ мкм.}$$

Часть II. «РАЗРАБОТКИ ТЕХНИКА ХАРЛАНА» (проверяются решения)

1. («Неожиданный подарок», 16 баллов) Как-то, еще во время учебы, Эндрю было очень важно покинуть школу на некоторое время. Но в это время он должен был выполнять лабораторную работу по изучению эффекта застоя (состоящего в превышении на величину ΔF максимальной величины силы трения покоя над силой трения скольжения). В работе требовалось изучить движение бруска массой $m = 410,0$ г. Из теоретического введения было известно, что величина силы трения бруска практически перестает зависеть от его скорости v относительно поверхности только при превышении некоторой величины скорости v_0 (именно эта неизменная величина и считается величиной силой трения скольжения для этого бруска). При $v < v_0$ сила трения убывает линейно с ростом скорости. В эксперименте нужно было слегка подтолкнуть брусок и затем тянуть его по горизонтальной поверхности, прикрепив к легкой практически нерастяжимой нити, поддерживая силу натяжения нити неизменной и с высокой точностью равной максимальной величине силы трения покоя. Затем на основе наблюдения за изменением скорости и ускорения бруска нужно было определить v_0 и ΔF . Измерения требовались очень аккуратные и занимали немало времени, но, придя в лабораторию, Эндрю обнаружил пакет с запиской и микрочипом. Из записки он узнал, что наблюдения уже выполнил он сам в другой реальности, а на микрочипе есть оцифрованное видео движения бруска. Также было сообщено, что сила сопротивления воздуха для бруска с достаточной точностью пропорциональна его скорости. В таблицах приведены данные с микрочипа, которые использовал студент Харлан – зависимости от времени скорости центра масс бруска (за все время наблюдений) и его ускорения (на наиболее важном интервале времени). Определите по этим данным v_0 , ΔF и коэффициент пропорциональности α между действующей на брусок силой сопротивления воздуха и его скоростью (движения воздуха при съемках видео отсутствовали).

$t, \text{с}$	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00
$v, \text{м/с}$	0,200	0,205	0,351	0,600	0,871	1,060	1,192	1,285	1,349	1,426	1,464	1,482	1,491

$t, \text{с}$	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90	3,00	3,10	3,20	3,30	3,40	3,50
$a, \text{м/с}^2$	0,246	0,260	0,274	0,289	0,305	0,322	0,311	0,300	0,289	0,279	0,269

Проверьте, насколько точны Ваши выводы на примере определения v_0 .

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Движение бруска нужно разбить на две фазы: при скорости менее v_0 для описания величины силы трения можно, в соответствии с условием, использовать выражение $F_{mp}(v) = \mu mg + \Delta F(1 - v/v_0)$, а при $v > v_0$ сила трения постоянна: $F_{mp}(v) = \mu mg$. Запишем уравнение движения в первой фазе с учетом силы сопротивления воздуха:

$$m \frac{dv}{dt} = F - F_{mp}(v) - \alpha v = \left(\frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right) v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \beta v.$$

Как видно, производная функции пропорциональна самой функции с коэффициентом $\beta = \frac{1}{m} \left(\frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right)$ и ясно, что это экспоненциальная функция.

Обозначив малую начальную скорость бруска после того, как его «слегка подтолкнули» $v(0) = u$, находим, что при скорости изменяется по закону $v(t) = u \cdot e^{\beta t}$. Ускорение на этой стадии тоже растет экспоненциально, причем $\frac{a(t)}{v(t)} = \text{const} = \beta$. Из таблицы видно, что ускорение растет до момента времени

$t_0 \approx 3 \text{ с}$, и отношение скорости и ускорения в этой точке дает оценку для β :

$$\beta = \frac{1}{m} \left(\frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right) \approx \frac{a(t_0)}{v(t_0)} \approx 0,537 \text{ с}^{-1}. \text{ Таким образом, } \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha = m\beta \approx 0,220 \text{ кг/с, а}$$

также $v_0 \approx v(t_0) \approx 0,60 \text{ м/с}$.

На второй фазе

$$m \frac{dv}{dt} = F - F_{mp}(v) - \alpha v = \Delta F - \alpha v.$$

Как видно, скорость продолжает расти, пока $v < \Delta F/\alpha$, а ускорение уже убывает, что соответствует данным наблюдений. Поскольку у нас есть только одна «общая» точка зависимостей скорости и ускорения от времени, мы не можем из данных найти коэффициенты линейной связи ускорения и скорости, и нам лучше обратить внимание, что на «больших» временная скорость бруска должна стремиться к установившемуся значению $\bar{v} = \Delta F/\alpha$. Из таблицы видно, что скорость действительно приближается к значению $\bar{v} \approx 1,5 \text{ м/с}$. Из двух полученных уравнений находим, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta F = \alpha \bar{v} \\ \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \approx 0,220 \text{ кг/с} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \approx 0,147 \text{ кг/с} \\ \Delta F \approx 0,220 \text{ Н} \end{array} \right.$$

Проведем оценку точности результатов. Для этого отметим, что, если в уравнении движения на второй фазе использовать подстановку $v(t) = \bar{v} + \tilde{v}(t)$, то оно превратится в уравнение $\frac{d\tilde{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\tilde{v}$. Это означает, что мы снова мы получаем уравнение для экспоненциальной функции, так что $v(t) = \bar{v} + C \cdot e^{-\alpha t/m}$. С учетом условия $v(t_0) = v_0$ приходим к закону изменения скорости на второй стадии в виде $v(t) = \bar{v} + (v_0 - \bar{v}) \cdot e^{\alpha(t_0-t)/m} \approx 1,5 \text{ м/с} - 0,9 \text{ м/с} \cdot \exp[(3 \text{ с} - t)/2,795 \text{ с}]$. Сравним полученную зависимость с экспериментальными данными:

$t, \text{ с}$	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00
$v_{\text{теор}}, \text{ м/с}$	0,871	1,060	1,192	1,285	1,350	1,426	1,464	1,482	1,491

Эти значения отличаются от экспериментальных не более чем на единицу последнего разряда (да и то только в одной точке!), так что на самом деле нам необычайно повезло: точность результата не менее точности данных, а на большую точность рассчитывать было нельзя.

ОТВЕТЫ: $v_0 \approx 0,60 \text{ м/с}$, $\Delta F \approx 0,220 \text{ Н}$, $\alpha \approx 0,147 \text{ кг/с}$, точность не ниже точности данных.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Используется правильное описание силы трения на обеих фазах движения	1+1=2
Правильно решено уравнение движения на первой фазе	4
Указан момент времени $t_0 \approx 3 \text{ с}$	1
Правильно найдено $v_0 \approx 0,60 \text{ м/с}$	2
Получена верная связь ΔF и α	1
Указано на существование на второй фазе установившегося режима	1
Получено второе (независимое) соотношение для ΔF и α	1
Правильно найдены ΔF и α	1+1=2
Проведен разумный анализ точности результата (само проведение + правильный вывод)	1+1=2
ВСЕГО	16

Примечание: На самом деле самый простой и естественный путь восстановления нужных величин по зависимостям скорости и ускорения от времени в этой модели – изучение зависимости $a(v)$, которая должна быть линейна для обеих фаз движения:

$$a(v) = \begin{cases} \frac{1}{m} \left(\frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right) v, & v \leq v_0 \\ \frac{\Delta F}{m} - \frac{\alpha}{m} v, & v > v_0 \end{cases}.$$

Поэтому анализ графика $a(v)$ позволяет найти все, что нужно относительно просто и без интегрирования уравнений движения. Но в данном случае проблема

в том, что при высокой точности данных у нас есть всего одна общая точка в данных по $v(t)$ и $a(t)$! Получение новых точек интерполяцией (в промежуточных точках) и экстраполяцией (в точках за пределами интервала, где есть данные по ускорению) существенно снижает точность результатов. В этом убедились участники, действовавшие по «простой» схеме. Как видно из предлагаемого решения, мы все же можем добиться, чтобы уровень точности результатов соответствовал точности данных, но в этом случае нам необходимо использовать знание вида «теоретических» зависимостей $v(t)$ и $a(t)$. Таким образом, в решениях этого типа нельзя было полноценно использовать точность имеющихся данных, и поэтому максимальная оценка по этому типу решений составляла 9 баллов.

2. («База Вечности», 25 баллов) Во время подготовки одного из вмешательств Вечным понадобилось создать скрытую базу на одной из экзопланет. Эта планета оказалась очень оригинальна – она большей частью (кроме каменно-металлического ядра) состоит из воды. Собственное солнце очень слабо обогревает планету, но распад радиоактивных материалов в ядре поддерживает достаточно высокую температуру ее жидкой поверхности: $T_s \approx 400$ К. Радиус этой поверхности равен $R \approx 3931$ км, а ускорение свободного падения вблизи поверхности океана $g \approx 1,65$ м/с². Отметим, что в глубинах океана из-за высокого давления вода становится твердой, и как раз внутри слоя льда, вблизи его поверхности, и была оборудована база. Определите радиус и температуру внешней поверхности ледяного слоя на этой планете. При решении Вы можете использовать следующие данные и приближения:

- Плотность жидкой воды в океане изменяется, но в расчетах считайте, что эта плотность постоянна и равна $\rho \approx 925$ кг/м³;
- Плотность модификации льда, из которой состоит ледовый слой на этой планете, тоже можно считать примерно постоянной и равной $\rho_1 \approx 1480$ кг/м³;
- Средняя плотность вещества ядра планеты равна $\rho_2 \approx 8880$ кг/м³;
- Мощность тепла, выделяемого в ядре планеты, можно считать постоянной и равной $P \approx 1850$ МВт.
- Согласно закону Фурье, количество теплоты, протекающее при теплообмене в единицу времени через единицу площади поверхности слоя вещества, пропорциональна разности температур по разные стороны от слоя и обратно пропорциональна толщине слоя: $\frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S} \equiv \frac{\Delta P}{\Delta S} = \kappa \frac{\Delta T}{l}$. Для воды в океане нашей планеты коэффициент теплопроводности можно считать равным $\kappa \approx 0,749$ Вт/(м·К);
- Фазовая диаграмма воды представлена на рисунке ниже*) (римскими цифрами обозначены различные модификации льда).

Можно ли по данным задачи определить радиус ядра планеты? Если да, то найдите его.

*) Изображение из открытых источников.


$$P = -\kappa \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{4\pi\kappa r^2} = \frac{d(P/4\pi\kappa r)}{dr} \Rightarrow T(r) = C_1 + \frac{P}{4\pi\kappa r}.$$

Затем рассмотрим механическое равновесие слоя жидкой воды толщиной dr . Разность сил давления по разные стороны от этого слоя уравнивает силу тяжести, то есть $[p(r) - p(r + dr)] \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot 4\pi r^2 dr \cdot g(r)$. Используя теорему Гаусса по аналогии с электростатикой, находим, что ускорение свободного падения на расстоянии r от центра планеты определяется массой вещества, находящегося внутри поверхности этого радиуса: $4\pi r^2 \cdot g(r) = 4\pi GM(r)$. Масса планеты находится из условия $GM = R^2 \cdot g$, а при погружении в океан $M(r)$ уменьшается на массу слоя воды выше этого радиуса, так что в жидкой воде $GM(r) = GM - G \frac{4\pi}{3} \rho (R^3 - r^3)$. Значит, $g(r) = \frac{R^2}{r^2} \left(g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) + \frac{4\pi G \rho}{3} r$. Таким

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho R^2}{r^2} \left(g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) - \frac{4\pi G \rho^2}{3} r \Rightarrow p(r) = C_2 + \frac{\rho R^2}{r} \left(g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) - \frac{2\pi G \rho^2}{3} r^2.$$

Давление на поверхности океана соответствует давлению насыщенного пара p_s при температуре T_s , и в результате

$$p(r) = p_s + \rho R(2\pi G\rho - g) + \frac{\rho R^2}{r} \left(g - \frac{4\pi G\rho R}{3} \right) - \frac{2\pi G\rho^2}{3} r^2$$

(в принципе $p_s \approx 0,25$ МПа можно пренебречь – это не скажется на результате). Зависимости $T(r)$ и $p(r)$ определяют связь температуры и давления при каждом значении r , и по фазовой диаграмме мы можем найти точку пересечения кривой $p_{eq}(T)$ с кривой фазового равновесия «вода-лед VII». В логарифмическом масштабе в нужном диапазоне кривая фазового равновесия выглядит почти как прямая, и ее можно, например, аппроксимировать выражением $p_{eq}(T) \approx 10^9 \text{ Па} \cdot 10^y$, где $y = \frac{0,17 \cdot (T/1\text{K}) - 42}{63}$. Вычисления (с большим «запасом» по количеству значащих цифр) вблизи точки пересечения дают:

r , км	3931	2200	2100	2062,4	2000
$T(r)$, К	400	439,34	443,60	445,30	448,28
$p(r)$, ГПа	0,00025	3,082	3,330	3,427	3,595
p_{eq} , ГПа	2,586	3,303	3,391	3,427	3,491

Конечно, реальная точность снятия данных с приведенной диаграммы намного ниже, так что разумными ответами на поставленные вопросы можно считать следующие: радиус внешней поверхности ледяного слоя $r_L \approx (2060 \pm 100)$ км, ее температура $T_L \approx (445 \pm 5)$ К.

Для определения радиуса ядра планеты r_2 можно воспользоваться значением массы планеты и известными значениями плотностей веществ:

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{4\pi}{3} [\rho_2 \cdot r_2^3 + \rho_1 (r_L^3 - r_2^3) + \rho (R^3 - r_L^3)] = \frac{4\pi\rho R^3}{3} \left[\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} x^3 + \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \left(\frac{r_L}{R} \right)^3 + 1 \right],$$

где $x \equiv \frac{r_2}{R}$. Следовательно, $x^3 = \frac{\rho}{\rho_2 - \rho_1} \left[\frac{3g}{4\pi G\rho R} - 1 - \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \left(\frac{r_L}{R} \right)^3 \right]$. Вычисления

приводят к результату $x \approx 0,4065$, то есть $r_2 \approx 1600$ км.

ОТВЕТЫ: $r_L \approx (2060 \pm 100)$ км, $T_L \approx (445 \pm 5)$ К, $r_2 \approx (1600 \pm 100)$ км.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Используется правильное уравнение постоянства потока тепла	1
Получена правильная зависимость $T(r) = T_s + \frac{P}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$	4
Используется правильное выражение для массы планеты через данные задачи	1
Записана правильная зависимость $g(r)$	2
Записано правильное уравнение, эквивалентное $\frac{dp}{dr} = -\rho \cdot g(r)$	1
Выполнено интегрирование и получена правильная зависимость	

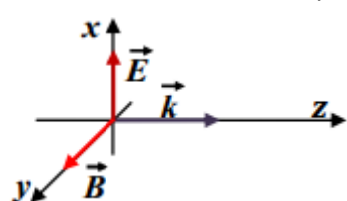
Действие	Макс. балл
давления от радиуса, эквивалентная $p(r) = p_s + \rho R(2\pi G\rho - g) + \frac{\rho R^2}{r} \left(g - \frac{4\pi G\rho R}{3} \right) - \frac{2\pi G\rho^2}{3} r^2$	3
Предложена корректная процедура (аналитическая или графическая) сравнения значений давления и температуры с равновесными на границе раздела «вода-лед VII»	3
Ответ для радиуса поверхности льда $r_L \approx (2060 \pm 100) \text{ км}^*$	3
Ответ для температуры поверхности льда $T_L \approx (445 \pm 10) \text{ К}^*$	2
Записано правильное уравнение для нахождения радиуса ядра	2
Ответ для радиуса ядра планеты $r_2 \approx (1600 \pm 100) \text{ км}^*$	2
Есть оценка точности большей части результатов (наличие)	1
ВСЕГО	25

*) Ответы засчитываются, только если они получены корректным образом. При попадании ответа не в заданный, а только в «удвоенный по ширине» интервал, за него выставляется **1 балл**.

3. («Очень толстая линза», 18 баллов) В одной из установок Харлана использовался Далее условие и решение совпадает с задачей 4 у 10 класса.

4. («Квантовая криптография», 16 баллов) Для передачи секретной информации руководству Вечности Эндрю Харлан использовал кодировку данных с помощью поляризационных состояний фотонов. Важной составляющей его установки было устройство, испускающее фотоны в заданном состоянии поляризации. Для его тестирования техник установил устройство так, что оно испускало фотоны в направлении оси z , и поставил на оси пучка детектор, регистрирующий фотоны, поляризованные вдоль оси x . Оказалось, что из серий по 1000 испущенных фотонов детектор в среднем регистрирует 800 фотонов. Затем Харлан изменил настройку детектора так, что теперь он должен был регистрировать фотоны, поляризованные линейно вдоль биссектрисы между осями x и y . Теперь детектор в среднем «замечал» 612 фотонов из 1000. Наконец, детектор был перенастроен на регистрацию фотонов с правой круговой поляризацией. Предполагая, что устройство на самом деле всегда испускает фотоны в одном и том же состоянии поляризации, предскажите, какое количество фотонов из серии в 1000 фотонов в среднем будет регистрировать детектор.

Указание: Перед решением задачи прочитайте справочный текст, посвященный *методу комплексных амплитуд и поляризациям фотонов*:



В классической волновой теории света для описания электромагнитной волны мы должны указать ее частоту ν (длину волны λ) и направление ее распространения (например, направив по нему вектор $\vec{n}$ с единичной длиной). Эту информацию можно объединить в одном объекте, если ввести волновой вектор $\vec{k} \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{2\pi}{c} \nu \vec{n}$

(где c – скорость света). Но при каждом значении $\vec{k}$ у такой волны возможны две независимых *поляризации*. Они соответствуют двум возможным взаимно

перпендикулярным направлениям, в которых происходят колебания вектора $\vec{E}$ напряженности электрического поля в волне (они всегда происходят в плоскости, перпендикулярной $\vec{k}$). Например, если $\vec{k}$ направлен вдоль оси z , то две возможных поляризации соответствуют колебаниям вдоль осей x и y , которые можно задавать единичными векторами $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$. Для примера на рисунке показано положение векторов $\vec{k}$, $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в волне, поляризованной вдоль оси x .

Конечно, у волны могут быть и другие состояния поляризации, но их можно получить при помощи наложения (*суперпозиции*) базисных состояний. Отметим, что при составлении суперпозиции мы можем строить не только другие *линейные* поляризации (для них вектор $\vec{E}$ в волне направлен вдоль оси, отличающейся от x и y , а проекции $\vec{E}$ на базисные оси имеют разные значения, но колеблются *синфазно*). Путем суперпозиции можно получить также *круговые* или *эллиптические* поляризации, при которых проекции вектора $\vec{E}$ на базисные оси совершают колебания со сдвигом по фазе относительно друг друга. Для описания таких колебаний можно использовать *метод комплексных амплитуд*.

Комплексные числа записываются в виде $z = x + iy$, в котором специальное число $i \equiv \sqrt{-1}$ называют «мнимой единицей», а x и y – два вещественных числа, называемых вещественной и мнимой частью комплексного числа z : $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$. Использование комплексных чисел позволяет расширить описание решений алгебраических уравнений (например, ясно, что с их помощью можно записывать корни квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом). Комплексные числа можно перемножать и делить друг на друга, получая снова комплексные числа. Эти операции определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Вообще, с комплексными числами можно проводить любые алгебраические операции. Можно определить на множестве комплексных чисел многие известные Вам функции. Например, для экспоненты справедлива *формула Эйлера*: $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot [\cos(y) + i \cdot \sin(y)]$.

Комплексное число $z^* \equiv x - iy$ называют сопряженным к числу z . Вещественная неотрицательная величина $|z| \equiv \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа. Если определить *фазу* φ комплексного числа с помощью формул $\cos(\varphi) \equiv \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\sin(\varphi) \equiv \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то можно ввести запись

комплексного числа, представленного в экспоненциальной форме $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$. Теперь мы видим, что в комплексной форме записи можно объединить информацию об амплитуде и фазе колебания. Таким образом, произвольную поляризацию волны можно описывать вектором $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y$, в записи которого α и β – это *комплексные числа*. Модуль каждого из этих чисел описывает величину вклада базисной поляризации, а фаза комплексного числа задает начальную фазу колебаний с этой поляризацией. Для физики существенна разность фаз двух складываемых колебаний, поэтому начальную фазу колебаний по оси x можно выбрать произвольно – например, равной 0. Тогда произвольное

состояние поляризации волны описывается вектором $\vec{e} = |\alpha| \cdot \vec{e}_x + |\beta| e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$. Например, состояние с $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2} \cdot \vec{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_y$ называют состоянием с *правой круговой поляризацией*. В этом состоянии вклады базисных поляризаций одинаковы по амплитуде, и сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$. В классической волне с такой связью базисных поляризаций конец вектора $\vec{E}$ при взгляде «навстречу» волновому вектору $\vec{k}$ при распространении волны описывает окружность, вращаясь подобно «правому» винту.

Согласно квантовой теории света, его можно рассматривать как совокупность дискретных «порций» энергии электромагнитного поля – *фотонов*. При этом для описания состояния отдельного фотона тоже можно использовать волновой вектор, который определяет импульс $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ и энергию $\mathcal{E} = h\nu = \hbar c |\vec{k}|$ фотона (здесь $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \approx 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка). Кроме того, у отдельного фотона тоже есть два независимых состояния поляризации, и для фотона с волновым вектором $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$ это могут быть состояния с поляризацией по x и y . Кроме того, фотон может находиться в поляризационном состоянии, являющимся *квантовой суперпозицией* этих состояний. Договоримся описывать состояние фотона в такой суперпозиции вектором $\vec{e} = |\alpha| \cdot \vec{e}_x + |\beta| e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$.

Отличие квантовой суперпозиции от классической состоит в том, что волны, отвечающие распространению отдельных фотонов, являются *волнами вероятности*. Поэтому и предсказания результатов измерений в квантовой теории носят вероятностный характер. Если фотон находится в поляризационном состоянии $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y$, то вероятность при измерении обнаружить его в состоянии $\vec{e}' = \alpha' \cdot \vec{e}_x + \beta' \cdot \vec{e}_y$ равна квадрату модуля скалярного произведения соответствующих векторов, причем для комплексных векторов определение скалярного произведения содержит комплексное сопряжение: с учетом перпендикулярности $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$

$$w(\vec{e}, \vec{e}') = |\vec{e}' \vec{e}|^2 = (\alpha' \cdot \vec{e}_x + \beta' \cdot \vec{e}_y) * (\alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y) = |\alpha'^* \cdot \alpha + \beta'^* \cdot \beta|^2.$$

Например, легко убедиться, что для состояния $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y$ измерение поляризации фотона должно с вероятностью $w_x = |\alpha|^2$ обнаруживать поляризацию вдоль оси x , и с вероятностью $w_y = |\beta|^2 = 1 - w_x = 1 - |\alpha|^2$ – поляризацию вдоль оси y . Как видно, для любого состояния должно выполняться требование нормировки $w_x + w_y = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Согласно справочному тексту, состояние фотонов пучка можно описать вектором $\vec{e} = |\alpha| \cdot \vec{e}_x + |\beta| e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$. При этом $w_x = |\alpha|^2$, и ясно, что вероятность обнаружить поляризацию вдоль x можно определить (пусть и с некоторой статистической неопределенностью) как $w_x \approx \frac{N_1}{N} = \frac{800}{1000} = 0,8$. Так как число фотонов в «порции» довольно велико, считаем, что статистический разброс мал

(на самом деле $w_x = 0,800 \pm 0,013$, но этот вывод требует «нескольких» знаний, и для зачета решения он не требуется), и $|\alpha| = \sqrt{0,8} \approx 0,894$. Из условия нормировки находим, что $w_y = |\beta|^2 = 1 - w_x \approx 0,2$, то есть $|\beta| = \sqrt{0,2} \approx 0,447$. Итак,

$\vec{e} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$. Во втором случае поляризация, которую должен

обнаруживать детектор, соответствует $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_y$. Значит, вероятность

регистрации во втором случае
 $w_2 = |\vec{e}_2^* \vec{e}|^2 = \left| \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} e^{i\varphi} \right|^2 = \frac{[2 + \cos(\varphi)]^2 + \sin^2(\varphi)}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cos(\varphi)$. С другой

стороны, результат второго эксперимента дает $w_2 \approx \frac{N_2}{N} = 0,612$ ($w_2 = 0,612 \pm 0,015$). Следовательно, $\cos(\varphi) \approx 0,28$, а это означает, что $\sin(\varphi) \approx \pm 0,96$.

Для третьего эксперимента, как следует из справочного текста $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_y$. Поэтому вероятность регистрации фотонов в этом эксперименте

$$w_3 = |\vec{e}_3^* \vec{e}|^2 = \left| \frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{i}{\sqrt{10}} e^{i\varphi} \right|^2 = \frac{[2 + \sin(\varphi)]^2 + \cos^2(\varphi)}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \sin(\varphi) \approx 0,5 \pm 0,384.$$

Следовательно, ожидаемое среднее значение зарегистрированных фотонов $N_3 = w_3 N \approx 500 \pm 384$, то есть 884 или 116. На самом деле ясно, что точность этих предсказаний не выше точности, с которой были определены $|\alpha|$, $|\beta|$ и φ , так что возможная ошибка в определении отклонения w_3 от 0,5 – около 5%. Значит, возможная ошибка в определении N_3 – около 20. Но анализ точности предсказания в задаче не требовался.

ОТВЕТ: 884 или 116.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Указано, что $w_x \approx \frac{N_1}{N} = 0,8$	1
Состояние фотонов пучка описано $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$	1
Правильно найдено $ \alpha = \sqrt{0,8} \approx 0,894$	1
Правильно найдено $ \beta = \sqrt{0,2} \approx 0,447$	1
Указано, что $w_2 \approx \frac{N_2}{N} = 0,612$	1
Правильно найдено $\cos(\varphi) \approx 0,28$	2
Указано, что $\sin(\varphi) \approx \pm 0,96$ (есть два знака)	1
Показано, что $w_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \sin(\varphi)$	2
Правильно найдены оба возможных ответа (884 и 116)	3+3=6
ВСЕГО	16

ЗАДАНИЕ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

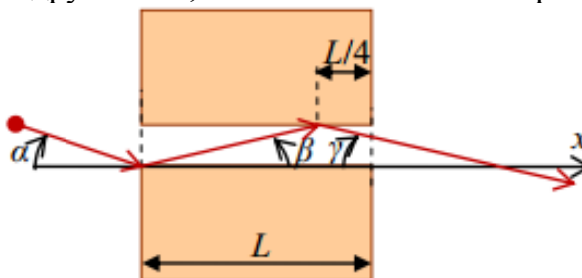
Максимальная оценка за вопрос – 5 баллов, максимальная оценка за задачу – 20 баллов.

БИЛЕТ № 07 (11 класс)

Задание 1:

Вопрос: Цилиндрическая однородная шайба, скользящая без вращения по гладкому горизонтальному льду, сталкивается с покоящимся гладким бруском. Будут ли вращаться шайба и брусок после удара? Ответ объяснить.

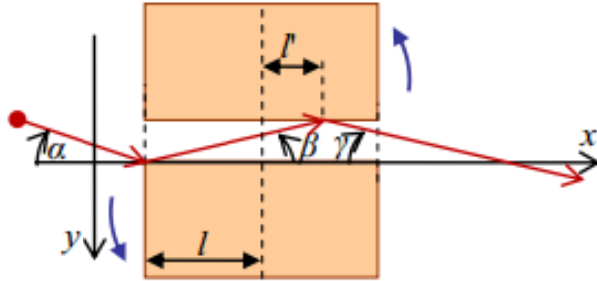
Задача: Два одинаковых гладких однородных бруска, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, лежат на гладкой горизонтальной поверхности строго «напротив» друг друга так, что их боковые грани параллельны. Масса каждого из брусков $M = 280$ г, их толщина (размер по вертикали) мал по сравнению с горизонтальными размерами. Маленькая однородная цилиндрическая шайба такой же высоты попадает в зазор между брусками (см. рисунок), скользя без вращения по поверхности в направлении под углом $\alpha = 2,6^\circ$ к соседним граням брусков (к оси x). Шайба ударяется о край одного бруска, отскакивает под углом $\beta = 2,2^\circ$ к его поверхности, ударяется о второй брусок в точке, расположенной на расстоянии четверти длины брусков от другого края и успевает, не коснувшись более ни одного из брусков, вылететь из зазора под углом $\gamma = 2,0^\circ$ к оси x . Найдите массу шайбы. Все соударения можно считать практически мгновенными и упругими.



Ответ на вопрос: Поскольку шайба и брусок гладкие, то в процессе удара они действуют друг на друга только силами нормальной реакции, так что линия удара (линия действия этих сил) проходит по радиусу шайбы и перпендикулярно боковой поверхности бруска. Так как шайба однородная, то ее центр масс совпадает с геометрическим центром, и поэтому линия удара обязательно проходит через него – удар для шайбы является центральным, момент внешней силы относительно центра масс равен нулю, и шайба не изменит состояния вращения – она после удара вращаться не будет. Для бруска ответ зависит от положения точки соударения на его боковой поверхности – если перпендикуляр к поверхности, проведенный из этой точки, проходит через проекцию центра масс бруска, то брусок тоже не будет вращаться после удара. В противном случае он обязательно начнет вращаться вокруг вертикальной оси. Можно также отметить, что в этих рассуждениях мы считали высоты шайбы и бруска почти одинаковыми, чтобы у сил их взаимодействия друг с другом и со льдом не возникло ненулевого момента, способного закрутить тела за время удара вокруг горизонтальной оси.

Решение задачи: Следует обратить внимание, что оба соударения являются *нецентральными*: линии действия сил упругости, возникающих при ударах

(ясно, что они перпендикулярны поверхностям гладких брусков), не проходят через центры масс брусков. Поэтому бруски после ударов приводятся во вращение (а вот шайба нет – ее центр масс лежит на линии удара в обоих случаях). Закон сохранения энергии для первого удара записывается в виде $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + E_{\text{вр}}$, где m – масса шайбы, v_0 и v – скорости шайбы до и после удара, V – скорость центра масс бруска после столкновения. Энергия



вращательного движения бруска $E_{\text{вр}}$ после удара зависит от набранной им угловой скорости (ясно, что $E_{\text{вр}} \propto \omega^2$), массы ($E_{\text{вр}} \propto M$) и размеров бруска. Отметим, что набор скорости центром масс бруска создается силой давления шайбы на брусок во время

удара ($MV = F \cdot \delta t$), а набор угловой скорости обеспечивается моментом этой же силы, плечо которой $l = \frac{L}{2}$. Из этих соображений понятно, что $\omega \propto V \cdot l$, и

поэтому $E_{\text{вр}} \propto Ml^2V^2$. Таким образом, можно прийти к заключению, что

$E_{\text{вр}} = k \cdot \frac{l^2}{L^2} \cdot \frac{MV^2}{2}$, где k – некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от формы бруска. Итак, закон сохранения энергии для первого удара имеет вид: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \left(1 + \frac{k}{4}\right) \frac{MV^2}{2}$ (здесь учтено, что $l = \frac{L}{2}$).

Далее можно действовать обычным образом. Если записать закон сохранения импульса в проекциях на оси x и y , то из них легко можно найти величины скоростей шайбы и бруска после удара:

$$\begin{cases} mv_0 \cos(\alpha) = mv \cos(\beta) \\ mv_0 \sin(\alpha) = MV - mv \sin(\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = v_0 \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \\ V = \frac{m}{M} v_0 \left(\sin(\alpha) + \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \sin(\beta) \right) = \frac{m}{M} v_0 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\beta)} \end{cases}$$

Подставим эти выражения в закон сохранения энергии, в котором используем выражение для энергии вращения и разделим обе части на $\frac{mv_0^2}{2}$:

$$1 = \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\beta)} + \left(1 + \frac{k}{4}\right) \frac{m}{M} \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\cos^2(\beta)} \Rightarrow \left(1 + \frac{k}{4}\right) \frac{m}{M} = \frac{\cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha + \beta)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Для второго удара соотношения точно такие же, только изменяются углы и значение $l' = \frac{L}{4}$. Поэтому $\left(1 + \frac{k}{16}\right) \frac{m}{M} = \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)}$. Исключая из этих соотношений

k , найдем:

$$m = \frac{M}{3} \cdot \left[4 \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right] \approx \frac{M}{3} \cdot \left[4 \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right] = 10 \text{ г}$$

(здесь учтена малость углов).

Примечание: Существует другой способ получить ключевое соотношение

$E_{\text{кр}} = k \cdot \frac{l^2}{L^2} \cdot \frac{MV^2}{2}$ – доступный для тех, кто знаком с понятиями момента инерции

и момента импульса. В этом случае достаточно просто отметить, что наряду с соотношением $MV = F \cdot \delta t$ есть также соотношение для момента импульса относительно центра масс $I\omega = Fl \cdot \delta t$, в котором I – момент инерции бруска относительно оси, проходящей через центр масс. Поэтому $\omega = \frac{MVl}{I}$, и

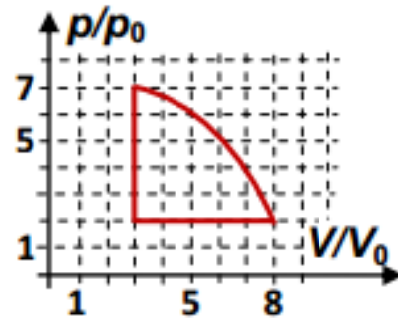
$$E_{\text{кр}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{Ml^2}{I} \cdot \frac{MV^2}{2}. \text{ Как видно, на самом деле } k \equiv \frac{ML^2}{I}.$$

Ответ: $m = \frac{M}{3} \cdot \left[4 \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right] \approx \frac{M}{3} \cdot \left[4 \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right] = 10 \text{ г.}$

Задание 2:

Вопрос: Диаграмма процесса над постоянным количеством идеального газа в координатах давление-объем имеет вид параболы. При каких условиях теплоемкость газа в этом процессе постоянна? Чему может равняться постоянная молярная теплоемкость, если газ – двухатомный?

Задача: Рабочее тело тепловой машины – постоянное количество двухатомного идеального газа, а его цикл в координатах давление-объем состоит из двух отрезков прямых и участка параболы $p = \frac{p_0}{6} \left[36 + 5 \frac{V}{V_0} - \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 \right]$. На каких



участках цикла газ получает и отдает тепло? Найдите КПД цикла.

Ответ на вопрос: Процессы над постоянным количеством идеального газа с постоянной теплоемкостью – *политропические процессы* в координатах p - V описываются уравнением $pV^n = \text{const}$, где *показатель политропы* $n = \frac{c_p - c_\mu}{c_v - c_\mu}$.

Здесь c_v и c_p – молярные теплоемкости газа в изохорном и изобарном процессах, а c_μ – в данном процессе. Диаграмма такого процесса является параболой при $n = -2$ ($c_\mu = \frac{c_p + 2c_v}{3}$) и при $n = -0,5$ ($c_\mu = \frac{2c_p + c_v}{3}$). Для

двухатомного идеального газа это соответствует $c_\mu = \frac{17}{6}R$ или $c_\mu = \frac{19}{6}R$.

Решение задачи: В первую очередь нужно определить, на каком из участков цикла газ получает и отдает тепло. Изохорное нагревание – процесс, когда тепло только подводится, а в изобарном сжатии – только отводится. Процесс, описываемый участком параболы не относится ни к одному из двух случаев, разобранных в вопросе, так что это процесс с переменной теплоемкостью, и нам нужно определить ее знак. Для бесконечно малого участка этого процесса, в

котором объем газа увеличивается на dV , изменение давления $dp = \frac{p_0}{6V_0} \left(5 - 2 \frac{V}{V_0} \right) dV$. Количество теплоты, получаемое газом на этом участке

$$\delta Q = pdV + d \left(\frac{5}{2} pV \right) = \frac{7}{2} pdV + \frac{5}{2} V dp = \frac{p_0}{12} \left[252 + 60 \frac{V}{V_0} - 17 \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 \right] dV.$$

Нетрудно заметить, что $\delta Q = 0$ при $V = 6V_0$ – это точка изменения направления теплообмена К. Тепло подводится к рабочему телу в изохорном процессе 1-2 и на параболическом участке 2-К слева от К ($6V_0, 5p_0$):

$$Q_H = Q_{12} + Q_{2K}. \quad \text{Ясно, что} \quad Q_{12} = \frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{75}{2} p_0 V_0, \quad \text{а}$$

$$Q_{2K} = A_{2K} + \frac{5}{2} (p_K V_K - p_2 V_2) = A_{2K} + \frac{45}{2} p_0 V_0. \quad \text{Вычислим работу:}$$

$$A_{2K} = \int_{3V_0}^{6V_0} p(V) dV = \frac{p_0 V_0}{6} \int_3^6 (36 + 5x - x^2) dx = \frac{75}{4} p_0 V_0 \Rightarrow Q_H = \frac{315}{4} p_0 V_0.$$

Полная работа рабочего тела в цикле

$$A = \int_{3V_0}^{8V_0} p(V) dV - 2p_0 \cdot 5V_0 = \frac{p_0 V_0}{6} \int_3^8 (36 + 5x - x^2) dx - 10p_0 V_0 = \frac{575}{36} p_0 V_0 \Rightarrow$$

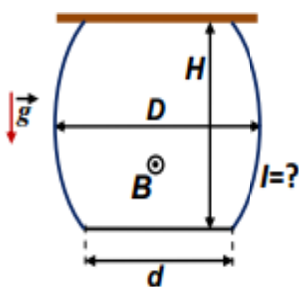
$$\Rightarrow \eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{115}{567} \approx 0,203.$$

Ответ: Газ получает тепло в изохорном процессе и на параболическом участке слева от К ($6V_0, 5p_0$), отдает тепло на параболическом участке справа от К и в изобарном процессе; КПД цикла $\eta = \frac{115}{567} \approx 20\%$.

Задание 3:

Вопрос: Легкий гибкий провод находится на гладкой горизонтальной поверхности и закреплен своими концами в фиксированных точках. Закрепление шарнирное – оно позволяет проводу уходить в любом горизонтальном направлении. В пространстве создано однородное постоянное вертикальное магнитное поле, а по проводу течет ток. Внешнее поле намного больше, чем поле, создаваемое этим током. Какую форму примет провод? Ответ обосновать.

Задача: Два одинаковых отрезка тонкого легкого гибкого провода прикрепили концами к потолку. На других концах подвесили (за края) тонкий металлический стержень длины $d = 0,8$ м с массой $m = 800$ г. Расстояние между



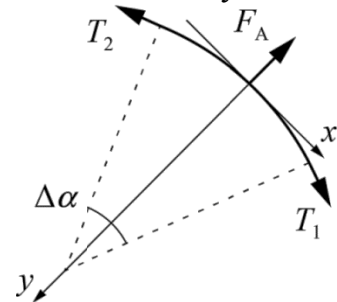
точками подвеса проводов к потолку точно равно длине стержня.

Когда в пространстве, в котором находилась система, создали однородное постоянное горизонтальное магнитное поле с индукцией $B = 3,5$ Тл, и на верхние концы проводов подали постоянное напряжение, провода приняли вид, показанный на рисунке. При этом расстояние между потолком и стержнем стало равно $H = 1$ м, а наибольшее

расстояние между проводами (см. рисунок) $D = 1$ м. Найдите величину силы тока, текущего по проводам. Магнитное поле, созданное токами в проводах, намного слабее внешнего. Ускорение свободного падения $g \approx 9,8$ м/с².

Ответ на вопрос: Рассмотрим равновесие бесконечно малого участка провода, имеющего радиус кривизны R и угловой размер $\Delta\alpha$. Запишем условия равновесия в проекциях на оси x (проходит по касательной к проводу в середине участка) и y (проходит через центр кривизны участка). Учтём, что сила Ампера $F_A = IB\Delta l = IBR\Delta\alpha$:

$$\begin{cases} T_1 \cos(\Delta\alpha / 2) = T_2 \cos(\Delta\alpha / 2); \\ T_1 \sin(\Delta\alpha / 2) + T_2 \sin(\Delta\alpha / 2) = IBR\Delta\alpha. \end{cases}$$



Из первого уравнения следует, что натяжение провода постоянно: $T_1 = T_2 \equiv T$, из второго (с учётом малости $\Delta\alpha$) – что радиус кривизны постоянен на участках провода, на которые не действуют другие силы (кроме сил Ампера и натяжения): $R = T / (IB) = \text{const}$. Значит, эти участки – дуги окружностей. Итак: провод – дуга окружности, соединяющая точки закрепления.

Решение задачи: В соответствии с ответом на вопрос ясно, что, если пренебречь действующей на провода силой тяжести, то оба отрезка провода – это дуги окружности. С учетом равенства длины стержня и расстояния между точками подвеса понятно, а также симметрии нагрузки (одинаковость сил натяжения означает одинаковость радиусов кривизны) что эти дуги симметричны относительно горизонтальной линии, проходящей через точки максимального удаления проводов. Значит, если обозначить угол отклонения проводов от вертикали в точках прикрепления к стержню β , то угловой размер каждого провода (как дуги окружности) равен 2β . Следовательно:

$$\begin{cases} H = 2R \cdot \sin(\beta) \\ D - d = 2R \cdot [1 - \cos(\beta)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4R^2 = H^2 + [2R - (D - d)]^2 \Rightarrow R = \frac{H^2 + (D - d)^2}{4(D - d)} = 1,3 \text{ м} \\ \sin(\beta) = \frac{2H(D - d)}{H^2 + (D - d)^2} = \frac{5}{13}, \cos(\beta) = \frac{H^2 - (D - d)^2}{H^2 + (D - d)^2} = \frac{12}{13} \end{cases}$$

Условие равновесия стержня $2T \cos(\beta) = mg + IBd$ с учетом того, что $T = IRR$, позволяет найти ответ на вопрос задачи:

$$IB[2R \cos(\beta) - d] = mg \Rightarrow I = \frac{2mg(D - d)}{B[H^2 + d^2 - D^2]} = 1,4 \text{ А.}$$

Ответ: $I = \frac{2mg(D - d)}{B[H^2 + d^2 - D^2]} = 1,4 \text{ А.}$

Задание 4:

Вопрос: Тонкая нить лампы длиной 4 мм расположена на расстоянии 90 см от экрана, параллельного нити. Найдите оптическую силу тонкой линзы, с помощью которой на этом экране можно получить четкое изображение нити длиной 8 мм. Ответ запишите с учетом знака.

Задача: Небольшой источник света находится на главной оси системы из двух одинаковых тонких линз, расположенных на расстоянии $L_1 = 20$ см друг от друга. Система создает изображение предмета с поперечным увеличением

$\Gamma_1 = -0,4$ (знак «-» указывает на то, что изображение перевернутое, увеличение прямых изображений будем считать положительным). Когда, не трогая источник и ближайшую к нему линзу, другую отодвинули так, что расстояние между линзами увеличилось до $L_2 = 40$ см, поперечное увеличение изображения стало равным $\Gamma_2 = -0,5$. Каким станет поперечное увеличение, если еще сдвинуть дальнюю линзу, чтобы расстояние между линзами стало равным $L_3 = 80$ см? Какова оптическая сила каждой линзы?

Ответ на вопрос: Поскольку изображение нужно получать на экране, то изображение должно быть действительным, а линза – собирающей. При этом изображение увеличенное (отношение расстояний b (от линзы до экрана) и a (от нити до линзы) равно $\frac{b}{a} = |\Gamma| = 2$. Их сумма равна 90 см, то есть $a = 30$ см и $b = 60$ см. По формуле линзы $D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = +5$ дптр.

Решение задачи: В системе из двух линз изображение источника, сформированное первой, является «источником» для второй. Пусть a – расстояние от источника до первой линзы, D – одинаковая оптическая сила линз. Тогда расстояние от первой линзы до изображения источника в ней определяется из формулы линзы: $D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{Da - 1}$. Поперечное увеличение этого изображения с учетом знака $\Gamma = -\frac{b}{a} = \frac{1}{1 - Da}$. Расстояние от этого изображения до второй линзы $a' = L - b = \frac{DaL - L - a}{Da - 1}$. Следовательно, $b' = \frac{a'}{Da' - 1} = a' \frac{Da - 1}{(Da - 1)DL - 2Da + 1}$ и $\Gamma' = -\frac{b'}{a'} = \frac{1 - Da}{1 - 2Da - (1 - Da)DL}$. Таким образом, увеличение системы двух одинаковых тонких линз как функция расстояния между линзами при неизменном положении источника относительно первой линзы описывается выражением $\Gamma(L) = \Gamma\Gamma' = \frac{1}{1 - 2Da - (1 - Da)DL}$, или $\frac{1}{\Gamma(L)} = 1 - 2Da - (1 - Da)DL \equiv \alpha L + \beta$ – обратное увеличение есть линейная функция этого расстояния. По двум заданным точкам находим коэффициенты этой зависимости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma_1} = \alpha L_1 + \beta \\ \frac{1}{\Gamma_2} = \alpha L_2 + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\Gamma_1 \Gamma_2 (L_2 - L_1)} = +2,5 \text{ дптр} \\ \beta = \frac{\Gamma_2 L_2 - \Gamma_1 L_1}{\Gamma_1 \Gamma_2 (L_2 - L_1)} = -3 \end{array} \right.$$

Подставляя третье значение, получаем:

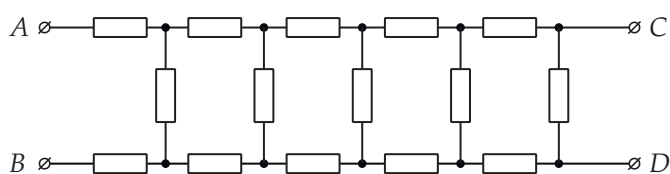
$$\Gamma_3 = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 (L_2 - L_1)}{(\Gamma_1 - \Gamma_2)L_3 + \Gamma_2 L_2 - \Gamma_1 L_1} = -1.$$

Из связи коэффициентов с параметрами системы $\alpha = (Da - 1)D$ и $\beta = 1 - 2Da$ находим, что $Da = 2$ и $D = \alpha = +2,5$ дптр.

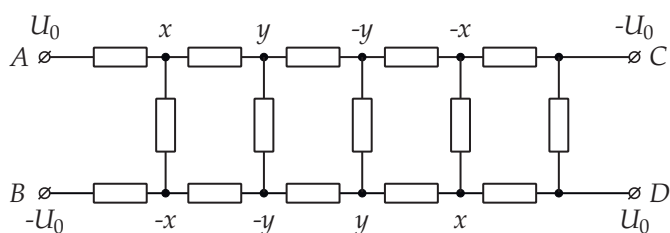
Ответ: $\Gamma_3 = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 (L_2 - L_1)}{(\Gamma_1 - \Gamma_2)L_3 + \Gamma_2 L_2 - \Gamma_1 L_1} = -1$, $D = \frac{2(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{\Gamma_1 L_1 - \Gamma_2 L_2 - \Gamma_1 \Gamma_2 (L_2 - L_1)} = +2,5$ дптр.

**3. Цепь из нескольких звеньев (8 баллов)****Бычков А. И.**

Электрическая цепь, показанная на рисунке, составлена из пяти одинаковых звеньев, в каждом из которых содержится три одинаковых резистора сопротивлением R . Выводы A и D , а также C и B соединяют проводниками пренебрежимо малого сопротивления попарно. Определите сопротивление между точками A и B образовавшейся цепи.

**Решение**

Представим себе, что клеммы A и B цепи соединены идеальными проводами с батареей, напряжение между выводами которой равно $2U_0$. Тогда в силу симметрии потенциалы узлов будут такими, как показано на рисунке ниже (x и y — некоторые неизвестные значения). Может показаться, что схема не обладает симметрией. Однако, отключив самый правый вертикально расположенный резистор, который на распределение потенциалов не влияет, вы можете убедиться в том, что это не так.



Считая известным значение U_0 , мы можем определить неизвестные x и y , далее найти токи через резисторы и ток через батарею. Разделив напряжение батареи на ток, получим сопротивление цепочки.

Для определения токов запишем для узлов с потенциалами x и y закон сохранения заряда, иначе говоря, уравнения, символизирующие равенство суммы втекающих в узел токов сумме истекающих. Например, для узла, потенциал которого равен x , можем записать соотношение

$$\frac{U_0 - x}{R} = \frac{2x}{R} + \frac{x - y}{R},$$

После преобразований это соотношение сводится к уравнению

$$U_0 = 4x - y. \quad (4)$$

Записав аналогичные соотношения для узла, потенциал которого равен y , получим уравнение

$$0 = 5y - x. \quad (5)$$

Решая уравнения (4) и (5), находим значения потенциалов

$$x = \frac{5U_0}{19}, \quad y = \frac{U_0}{19}.$$

Ток, текущий через батарею, равен

$$I = 2 \cdot \frac{U_0 - x}{R} + \frac{2U_0}{R} = 2 \cdot \frac{33}{19R}.$$

Тогда сопротивление между точками A и B равно

$$R_{AB} = \frac{2U_0}{I} = \frac{19R}{33}.$$

Ответ: $R_{AB} = \frac{2U_0}{I} = \frac{19R}{33}.$

Критерии

Правильный ответ, подкреплённый непротиворечивыми, доказательными рассуждениями, оценивается полным баллом, даже если решение отличается от авторского.

Если с физической точки зрения рассуждения полностью верные, но правильный ответ не получен из-за вычислительных ошибок — 7 баллов за всю задачу.

Если с физической точки зрения рассуждения верные, но правильный ответ не получен из-за ошибки в физической формуле — 4 балла.

Во всех других случаях промежуточные результаты, полученные в процессе решения, оцениваются по следующей схеме.

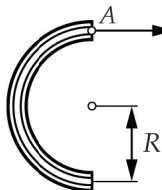
В том или ином виде высказываются разумные мысли об использовании при решении симметрии цепи — 1 балл.

Указываются узлы с равными потенциалами или приведено правильное распределение токов, учитывающее симметрию цепи, (но сами токи не найдены) — 1 балл.

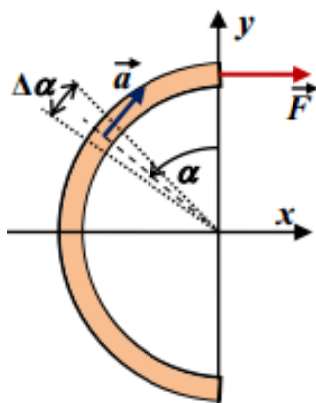
Правильное применение законов Кирхгофа или метода узловых потенциалов, приводящее к замкнутой системы уравнений — 3 балла.

**2. Тянут канат (6 баллов)****Бычков А. И.**

Внутри закреплённой горизонтальной тонкой трубки, изогнутой в форме полуокружности радиуса R , расположен однородный гибкий канат длиной πR , масса которого равна m . Канат начинают тянуть за свободный конец A , прикладывая силу по касательной, как показано на рисунке. Чему равна и куда направлена суммарная сила реакции трубки, действующая на канат, если ускорение точки A каната равно a ? Считайте внутренние стенки трубки гладкими, а канат нерастяжимым. Рассмотрите начальный момент времени, когда скорость каната равна нулю. Силой тяжести можно пренебречь.

**Решение**

Все части нерастяжимого каната в каждый момент времени движутся с одинаковыми скоростями и одинаковыми касательными компонентами ускорения, равными a . Рассмотрим малый интервал времени Δt после начала действия силы. За



это время канат наберет скорость $a \cdot \Delta t$, и его кинетическая энергия увеличится за счет работы внешней силы $\vec{F}$ (силы реакции стенок трубки работы не совершают): $\frac{m(a \cdot \Delta t)^2}{2} = F \cdot \Delta s = F \frac{a(\Delta t)^2}{2}$. Таким образом, величина внешней силы $F = ma$. По теореме о движении центра масс ускорение центра масс каната

$m\vec{a}_{\text{цм}} = \vec{F} + \vec{N}$, где $\vec{N}$ – искомая сила реакции трубки. Значит, $\vec{N} = m\vec{a}_{\text{цм}} - \vec{F}$. Для вычисления компонент ускорения центра масс в проекции на оси x и y разобьем канат на малые части с угловым размером $\Delta\alpha$ каждая (см. рисунок). Ясно, что масса каждой такой части $\Delta m = \frac{m}{\pi} \Delta\alpha$. Так как в нужный нам момент времени скорости всех частей равны нулю, то центростремительное ускорение у них отсутствует, и ускорение каждой части равно ее касательному ускорению, проекции которого $a_x = a \cdot \cos(\alpha)$ и $a_y = a \cdot \sin(\alpha)$ соответственно. Следовательно:

$$\begin{cases} a_{\text{цм}x} = \frac{1}{m} \sum \Delta m \cdot a_x = \frac{a}{\pi R} \sum R \Delta\alpha \cdot \cos(\alpha) = 0 \\ a_{\text{цм}y} = \frac{1}{m} \sum \Delta m \cdot a_y = \frac{a}{\pi R} \sum R \Delta\alpha \cdot \sin(\alpha) = \frac{2a}{\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_x = -ma \\ N_y = \frac{2}{\pi} ma \end{cases}$$

Здесь мы воспользовались тем, что для «бесконечно малых» частей каната суммируются проекции их длин на координатные оси:

$$\sum R \Delta\alpha \cdot \cos(\alpha) = \sum \Delta x = 0,$$

и аналогично

$$\sum R \Delta\alpha \cdot \sin(\alpha) = \sum \Delta y = 2R$$

(участники, знакомые с интегрированием, могут им воспользоваться: $\int_0^\pi \cos(\alpha) d\alpha = 0$ и $\int_0^\pi \sin(\alpha) d\alpha = 2$). Таким образом, величина искомой силы равна $N = ma \frac{\sqrt{4+\pi^2}}{\pi}$, а ее направление соответствует значению угла $\alpha = \arctg\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 57,5^\circ$.

Ответ: $N = ma \frac{\sqrt{4+\pi^2}}{\pi}$, $\alpha = \arctg\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 57,5^\circ$.

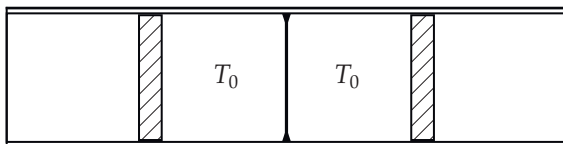


Условия задач, авторские решения и критерии оценивания

1. Разная работа (8 баллов)

Крюков П. А., Бычков А. И.

В горизонтально расположенной теплоизолированной трубе между двумя подвижными теплоизолирующими поршнями находятся в состоянии теплового равновесия при температуре 310 К две порции идеального одноатомного газа, разделённые жёсткой, неподвижной, хорошо проводящей тепло перегородкой (см. рисунок). Поршни могут двигаться вдоль оси трубы, не испытывая сопротивления. Снаружи поршней находится воздух при атмосферном давлении. Количество газа в каждой порции равно 1 моль. К правому поршню прикладывается сила (меняющаяся со временем), и поршень медленно перемещается, температура газа при этом квазистатически уменьшается на 30 К. Универсальная газовая постоянная R равна 8,3 Дж/(моль · К).



1а. (2 балла) Найдите теплоёмкость порции газа, располагающейся справа от перегородки, в начале и в конце процесса охлаждения.

1б. (6 баллов) Какую работу A_r совершает газ, располагающийся справа от перегородки, в процессе охлаждения? Какую работу A_F при этом совершает приложенная к поршню внешняя сила?

Решение

Изменение состояния газа слева и справа от перегородки происходит таким образом, что температура обеих порций остаётся одинаковой. Газ, располагающийся слева от перегородки, сжимается, поскольку его температура уменьшается при постоянном давлении, отдавая при изменении температуры на dT количество теплоты

$$\delta Q_L = c_p dT. \quad (1)$$

В формуле (1) считается, что $dT < 0$ и $\delta Q_L < 0$. Теплота (1) отдаётся порции газа в правом отсеке, которая получает количество теплоты, равное $\delta Q_R = -\delta Q_L = -c_p dT$ только от газа в левом отсеке, поэтому теплоёмкость этой порции в любой момент в процессе охлаждения равна

$$c = \frac{\delta Q_R}{dT} = \frac{-c_p dT}{dT} = -c_p = -\frac{5R}{2}. \quad (2)$$

Таким образом, с газом в правом отсеке совершается политропический процесс с показателем политропы

$$n = \frac{c - c_p}{c - c_v} = \frac{5R}{4R} = \frac{5}{4}.$$

Работа газа, находящегося в правом отсеке, может быть найдена из первого начал термодинамики. С учётом полученного значения теплоёмкости (2) имеем формулу

$$A_r = Q - \Delta U = -c_p \Delta T - c_v \Delta T \approx 1000 \text{ Дж}, \quad (3)$$

где $\Delta T = -30$ К. Для того, чтобы вычислить работу внешней силы, определим сначала конечный объём порции газа, расположенной справа от перегородки. Это можно сделать двумя способами.

Используя уравнение политропического процесса $pV^n = \text{const}$, где $n = \frac{5}{4}$ — показатель политропы, найденный выше, а также уравнение состояния идеального газа, имеем равенство

$$T^4 V = \text{const},$$

из которого следует формула для объёма в конце процесса охлаждения

$$V_1 = V_0 \left(\frac{T_0}{T_0 + \Delta T} \right)^4. \quad (4)$$

С другой стороны, можно было бы записать соотношение, отражающее первое начало термодинамики для газа, расположенного справа от перегородки

$$-c_p dT = c_v dT + \frac{RT}{V} dV,$$

Из этого соотношения после преобразований и подстановки значений теплоёмкостей следует дифференциальное уравнение

$$-4 \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V},$$

интегрируя которое, получаем равенство

$$-4 \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) = \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$$

и далее формулу (4) для объёма.

Теперь можно перейти к определению работы внешней силы. Поскольку правый поршень перемещается очень медленно, суммарная работа всех сил, действующих на него, равна нулю, следовательно справедливо равенство $A_r + A_F - p_0(V_1 - V_0) = 0$, подставляя в которое объём из формулы (4) и работу газа из формулы (3), получаем ответ

$$A_F = RT_0 \left(\left(\frac{T_0}{T_0 + \Delta T} \right)^4 - 1 \right) - A_r \approx 300 \text{ Дж},$$

Ответ: 1а. $c = -\frac{5R}{2}$; 1б. $A_r = -4R\Delta T \approx 1000$ Дж, $A_F = p_0\Delta V - A_r = RT_0 \left(\frac{T_0^4}{(T_0 + \Delta T)^4} - 1 \right) - A_r \approx 300$ Дж.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения. Оценка за ответ на любой из вопросов не снижается, если получены верные числовые ответы, но не приведены ответы в общем виде.

В пункте 1а найдена теплоёмкость в начале процесса охлаждения — 1 балл.

Найдена теплоёмкость порции газа, располагающейся справа от перегородки, в конце процесса охлаждения — 1 балл. Физически правильные рассуждения, не приводящие к верным ответам вследствие вычислительных ошибок, оцениваются из расчёта 0,5 балла за каждый из ответов.

В пункте 1b верно найденная работа газа A_r оценивается в 1,5 балла, верно найденная работа силы F в 4,5 балла.

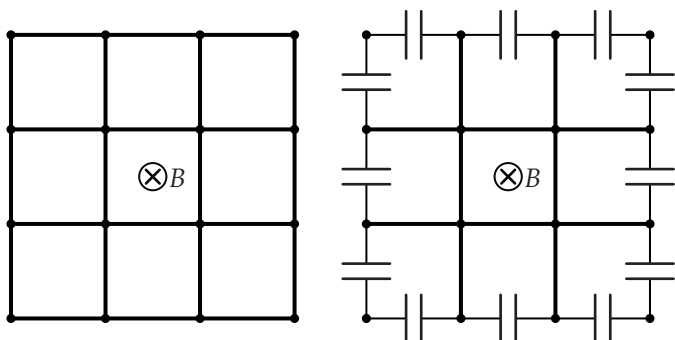
Если в пункте 1b на первый вопрос дан неверный ответ только вследствие вычислительных ошибок, то оценка за ответ на этот вопрос снижается до 1 балла. Если на второй вопрос дан неверный ответ только вследствие вычислительных ошибок, то такой ответ на второй вопрос оценивается в 3 балла. Если неверный ответ на второй вопрос является только следствием неверно найденной работы газа в первом вопросе, то оценка за ответ на второй вопрос не снижается.

Отдельные промежуточные результаты, полученные при ответе на второй вопрос, оцениваются по следующей схеме. Высказана мысль о том, что работа силы F есть разность работ сил атмосферного давления и работы газа — 1 балл. Указывается, что процесс политропический, записывается уравнение политропы — 0,5 балла. Если вместо уравнения политропы получено дифференциальное уравнение для определения изменения объёма, то тогда вместо баллов за уравнение политропы выставляется 0,5 балла за дифференциальное уравнение. Верно найдено изменение объёма — 1 балл. Если изменение объёма найдено неверно, но только вследствие вычислительных ошибок — 0,5 балла.

2. Токи и заряды (7 баллов)

Крюков П. А., Бычков А. И.

Внутри соленоида, ось которого вертикальна, располагается плоская проволочная сетка размером 3×3 ячейки. Ось соленоида перпендикулярна плоскости сетки и проходит через её центр (см. рисунок слева). Сопротивление перемычки, соединяющей два соседних узла, равно r . В соленоиде создаётся магнитное поле, направленное так, как показано на рисунке. Сила тока в витках соленоида равномерно увеличивается со временем, так что абсолютная величина скорости изменения магнитного потока через ячейку сетки оказывается равна $|\frac{d\Phi}{dt}| = 4\mathcal{E}_0$.



2а. (4 балла) Определите значения токов, текущих в перемычках, соединяющих узлы сетки. Сделайте рисунок, укажите направления этих токов.

2б. (3 балла) Все перемычки на границе сетки замени-

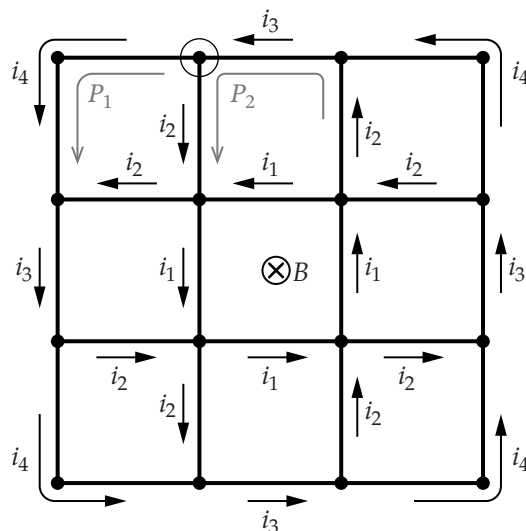
ли на конденсаторы одинаковой ёмкости (см. рисунок справа). Найдите напряжения на конденсаторах.

Решение

При повороте в плоскости рисунка вокруг оси соленоида на угол, кратный 90° (в любую сторону), схема переходит сама в себя. Отсюда следует, что по проводникам центральной ячейки текут одинаковые токи или, другими словами, по проводникам центральной ячейки циркулирует ток i_1 . Для определения этого тока можно записать закон электромагнитной индукции только для центральной ячейки, как будто всей остальной сетки не существует, тогда направление тока i_1 — против часовой стрелки — следует из правила Ленца. Значение тока даётся формулой

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}, \quad (5)$$

В каждом узле, лежащем в вершине центральной ячейки, соединяются 4 перемычки, по двум из которых текут токи i_1 , причём один из них втекает в узел, а другой — вытекает. Следовательно, по двум другим перемычкам тоже текут одинаковые токи, один из которых втекает в узел, а второй — вытекает. Обозначим эти одинаковые токи i_2 . Сделаем рисунок, на котором укажем направления токов в перемычках сетки, используя соображения «поворотной симметрии»: при повороте вокруг оси соленоида на угол, кратный 90° , картина распределения токов не должна изменяться.



Легко видеть, что в результате имеем 3 неизвестных тока: i_2 , i_3 , i_4 . Вообще говоря, направления этих токов могут быть выбраны произвольно, например так, как показано на рисунке. Если в процессе решения значение какого-либо из токов окажется отрицательным, это будет означать, что истинное направление этого тока противоположно указанному на рисунке. Отметим, что записывая второе правило Кирхгофа для контуров, состоящих из ячеек сетки, следует выбирать направление обхода против часовой стрелки (в ячейках, обозначенных P_1 и P_2 на рисунке, направление обхода указано серыми стрелками). Как следует из правила Ленца, при таком выборе направления обхода ЭДС индукции в правой части уравнений,

отражающих второе правило Кирхгофа, будет иметь положительное значение.

Перейдём непосредственно к расчёту токов. Записывая, для узла, помеченного окружностью на рисунке, первое правило Кирхгофа, имеем соотношение

$$i_4 = i_3 - i_2. \quad (6)$$

Второе правило Кирхгофа для контура P_1 даёт с учётом равенства (6) уравнение

$$i_3 - 2i_2 = \frac{2\mathcal{E}_0}{r}. \quad (7)$$

Аналогично, второе правило Кирхгофа для контура P_2 даёт равенство

$$i_3 + 2i_2 - i_1 = \frac{4\mathcal{E}_0}{r},$$

подставляя в которое ток i_1 из формулы (5), получаем уравнение

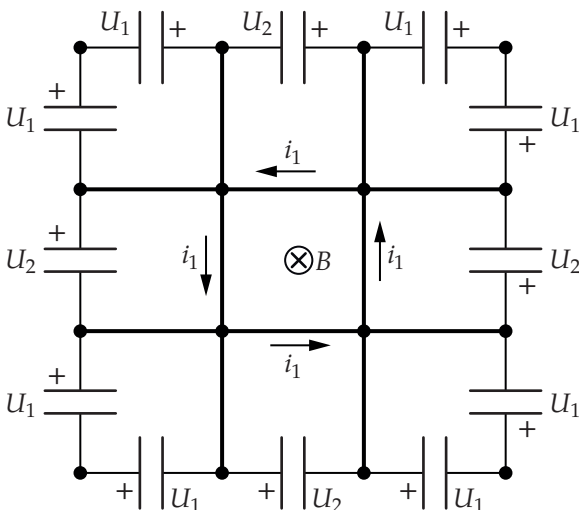
$$i_3 + 2i_2 = \frac{5\mathcal{E}_0}{r}. \quad (8)$$

Система уравнений (6)–(8) имеет решение

$$i_2 = \frac{3\mathcal{E}_0}{4r}, \quad i_3 = \frac{7\mathcal{E}_0}{2r}, \quad i_4 = \frac{11\mathcal{E}_0}{4r}. \quad (9)$$

Все значения в (9) получились положительными, следовательно направления токов на рисунке соответствуют реальности.

Во втором пункте, после замены перемычек на границе на конденсаторы, ток течёт только по проводникам центральной ячейки, этот ток равен $i_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}$. Будем считать полярность зарядов на обкладках конденсаторов такой, как обозначено на рисунке. Если для напряжения на каком-либо конденсаторе получится отрицательное значение, то это будет означать, что на самом деле помеченная «+» обкладка заряжена отрицательно.



Напряжения на конденсаторах, располагающихся в угловых ячейках, одинаковы и равны $U_1 = 2\mathcal{E}_0$, поскольку сумма напряжений на этих конденсаторах должна быть равна (с точностью до знака) скорости изменения магнитного потока через ячейку. Сумма напряжений на всех конденсаторах должна быть равна абсолютной величине скорости изменения магнитного потока через все ячейки сетки.

Таким образом, для определения напряжения U_2 имеем уравнение

$$8U_1 + 4U_2 = 9 \cdot 4\mathcal{E}_0,$$

решая которое получаем ответ $U_2 = 5\mathcal{E}_0$.

Ответ: 2a. $i_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}$, $i_2 = \frac{3\mathcal{E}_0}{4r}$, $i_3 = \frac{7\mathcal{E}_0}{2r}$, $i_4 = \frac{11\mathcal{E}_0}{4r}$; направления токов показаны на первом рисунке, приведённом в решении задачи. **2b.** $U_1 = 2\mathcal{E}_0$, $U_2 = 5\mathcal{E}_0$.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения. Оценка за ответ на любой из вопросов не снижается, если получены верные числовые ответы, но не приведены ответы в общем виде.

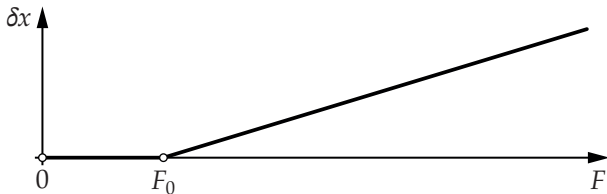
Если участник решал задачу, считая, что поток магнитного поля есть только через центральную ячейку сетки, а другие ячейки находятся вне области магнитного поля, то такое решение оценивается из расчёта 3 балла за всю задачу. При этом верные ответы для токов оцениваются в 2 балла, а правильно найденные напряжения конденсаторов в 1 балл.

В пункте 2a предполагается 4 ответа. Любой из верных ответов оценивается в 1 балл. Если получен неверный ответ, но только вследствие вычислительных ошибок или невнимательности, то это приводит к снижению оценки за этот ответ на 50%. Если токи найдены верно, но их направления (все, или для некоторых токов) указаны неверно, то такие ответы оценивают в 3 балла за этот пункт. Если ответы не получены (или получены, но неверны) вследствие принципиальных ошибок, однако в решении высказываются разумные мысли об использовании соображений симметрии, например указывается, что неизвестных токов 4, то это оценивается в 0,5 балла.

В пункте 2b предполагается 2 ответа. Верно найденное напряжение конденсаторов в угловых ячейках (U_1) оценивается в 1 балл. Верно найденное напряжение конденсаторов в средних ячейках (U_2) оценивается в 2 балла. Если получен неверный ответ, но только вследствие вычислительных ошибок или невнимательности, то это приводит к снижению оценки за этот ответ на 50%. Если неверный ответ является следствием только неверного определения тока i_1 при ответе на вопрос пункта 1a, то такой ответ оценивается полным баллом.

4. Поджатая пружина (11 баллов)**Власов А. И., Крюков П. А.**

Зависимость относительного удлинения δx поджатой пружины от силы F , растягивающей её в невесомости, изображена на графике, представленном ниже ($\delta x = \frac{x}{L_0}$, L_0 — начальная длина пружины, x — удлинение). Пружина не растягивается, пока выполняется неравенство $F \leq F_0$, если же сила F становится больше F_0 , то относительное удлинение δx начинает зависеть от силы F по линейному закону $\delta x = \frac{F-F_0}{\varepsilon}$, где $\varepsilon = \text{const}$.



Далее в задаче рассматриваются однородные пружины, для любого участка которых постоянные F_0 и ε такие же, как для исходной пружины длиной L_0 . В каждом из пунктов масса пружины обозначается M . Коэффициентом упругости k поджатой пружины считается коэффициент пропорциональности между изменением силы и удлинением $k = \frac{F(x)-F_0}{x}$ при $F > F_0$. Во всех пунктах задачи рассматривается статическое равновесие пружин.

Безразмерные параметры $\gamma = \frac{kL_0}{Mg}$ и $f_0 = \frac{F_0}{Mg}$ (разные в разных пунктах задачи) характеризуют относительные жёсткость и силу поджатия пружины, g — ускорение свободного падения.

4а. (1 балл) От поджатой пружины длиной L_0 отрезали участок длиной ΔL (в недеформированном состоянии), который стали растягивать силой F ($F > F_0$) в невесомости. Найдите длину y этого участка под нагрузкой как функцию силы F и параметров ΔL , k , L_0 .

4б. (3 балла) Поджатая пружина, параметры которой удовлетворяют соотношениям $f_0 > 1$, $\gamma = 1$, подвешена в поле тяжести к потолку за один из концов. К другому концу присоединяют груз массой $m = \mu M$ ($\mu > f_0$). Чему будет равна длина пружины в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0 , f_0 , μ .

4с. (4 балла) Пусть относительная сила поджатия удовлетворяет неравенству $f_0 < 1$. Пружина подвешена к потолку в поле тяжести за один из концов. Чему равна её длина в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0 , f_0 , γ .

4д. (3 балла) Поджатая пружина подвешена за один конец к потолку. К другому концу присоединяют грузы различной массы, снимая зависимость относительного удлинения $\delta L = \frac{L-L_0}{L_0}$ от относительной массы $\mu = \frac{m}{M}$ грузов (M — масса пружины). Результаты измерений представлены в таблице ниже.

μ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
δL , %	1,0	4,0	9,0	16,0	25,0	35,0	45,0

Определите относительную жёсткость γ и относительную силу поджатия f_0 этой пружины.

Решение

4а. В условии сказано, что параметры F_0 и ε остаются для любого куска пружины такими же, как для всей пружины, поэтому ответ на первый вопрос даётся формулой

$$y = \Delta L \left(1 + \frac{F - F_0}{kL_0} \right) \quad (14)$$

4б. В условиях этого пункта ($\mu > f_0$) любой элемент пружины деформируется под нагрузкой. Длину растянутой пружины можно найти, рассуждая следующими стандартным образом. Разделим всю недеформированную пружину на участки небольшой длины ΔL , пусть общее количество таких участков $N \gg 1$. Пусть участок с номером 1 будет самым верхним, тогда участок с номером n растягивается силой

$$F_n = Mg \left(\mu + \frac{L_0 - x_n}{L_0} \right), \quad (15)$$

где $x_n = n \cdot \Delta L$. Подставляя значение силы из формулы (15) в соотношение (14), и заменяя ΔL на dx , x_n на x , а y на dy , получаем равенство

$$dy = dx \left(1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{\mu - \frac{x}{L_0} - f_0}{\gamma} \right).$$

Поскольку $\gamma = 1$, определение длины пружины под нагрузкой сводится к интегрированию

$$L_1 = \int_0^{L_0} \left(2 + \mu - \frac{x}{L_0} - f_0 \right) dx = \left(\frac{3}{2} + \mu - f_0 \right) L_0.$$

Отметим, что интеграл может быть вычислен, как площадь под прямой.

4с. В этом пункте часть пружины не растягивается, на неё действует сила, меньшая, чем F_0 . Длина этого участка пружины равна

$$L' = L_0 \cdot f_0. \quad (16)$$

В этом случае формула, дающая связь силы и координаты x , аналогичная (15), имеет вид

$$F = Mg \left(1 - \frac{x}{L_0} \right), \quad (17)$$

Длина растягивающейся части пружины равна

$$L'_2 = \int_0^{L_0(1-f_0)} \left(1 + \frac{1}{\gamma} - \frac{x}{\gamma L_0} - \frac{f_0}{\gamma} \right) dx. \quad (18)$$

Вычисляя интеграл (18), и прибавляя длину нерастягивающейся части пружины (17), получаем ответ

$$L_2 = L' + L'_2 = L_0 \left(1 + \frac{(1-f_0)^2}{2\gamma} \right). \quad (19)$$

4д. Изучив таблицу, заметим, что при значениях относительной массы груза $\mu \geq 0,8$ зависимость $\delta L(\mu)$ линейная. Это означает, что при достаточно больших относительных массах груза все участки пружины удлиняются под нагрузкой (при малых μ) это не так. Рассуждая, как в пункте 4б, получим для больших относительных масс соотношение

$$\gamma = \frac{\delta L(\mu_2) - \delta L(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1},$$

из которого (с учётом значений, приведённых в таблице) следует ответ: $\gamma = 2$. Для определения относительной силы поджатия f_0 используем результат предыдущего пункта. При $\mu = 0$ из формулы (19) следует соотношение

$$\delta L(0) = \frac{(1 - f_0)^2}{2\gamma}.$$

Подставив найденное значение $\gamma = 2$ и $\delta L(0) = 0,01$ в эту формулу, находим второй ответ $f_0 = 0,8$.

Ответ: 4а. $y = \Delta L \left(1 + \frac{F - F_0}{kL_0}\right)$; 4б. $L_1 = \left(\frac{3}{2} + \mu - f_0\right)L_0$;

4с. $L_2 = L_0 \left(1 + \frac{(1 - f_0)^2}{2\gamma}\right)$; 4д. $f_0 = 0,8$, $\gamma = 2$.

Критерии

Оценивать решения предлагается на основе распределения баллов, данного в условии, с учётом следующих дополнительных соображений.

Верные ответы оцениваются полным баллом вне зависимости от того, как они получены.

За пункт 4а можно получить или 1 балл или 0 баллов.

В пункте 4б правильное с физической точки зрения решение, приводящее к неверным ответам вследствие вычислительных ошибок, оценивается в 2 балла. Если в той или иной форме высказывается идея о делении пружины на небольшие участки и суммировании удлинений этих участков, но больше ничего нет — 0,5 балла за этот пункт. Если произведено суммирование (или интегрирование), но допущены принципиальные ошибки — 1 балл за весь пункт.

В пункте 4с правильное с физической точки зрения решение, приводящее к неверным ответам вследствие вычислительных ошибок, оценивается в 3 балла. Промежуточные результаты оцениваются по следующей схеме. Высказывается в той или иной форме мысль о том, что часть пружины не растягивается — 1 балл. Произведено суммирование (или интегрирование), но верный ответ не получен, поскольку допущены ошибки принципиального характера — 1 балл.

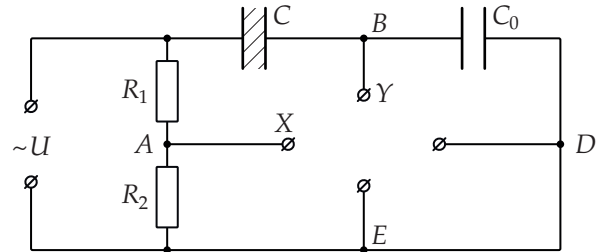
В пункте 4д верное определение относительной жёсткости оценивается в 2 балла. Верное определение относительной силы поджатия оценивается в 1 балл. Если правильные ответы не получены только вследствие вычислительных ошибок, а в остальном решение абсолютно верное, то ставится 2 балла за весь пункт. Если при нахождении относительной силы поджатия используется неверная формула, полученная при ответе на вопрос пункта 4с, то оценка за этот пункт не снижается.

5. Диэлектрический гистерезис (12 баллов)

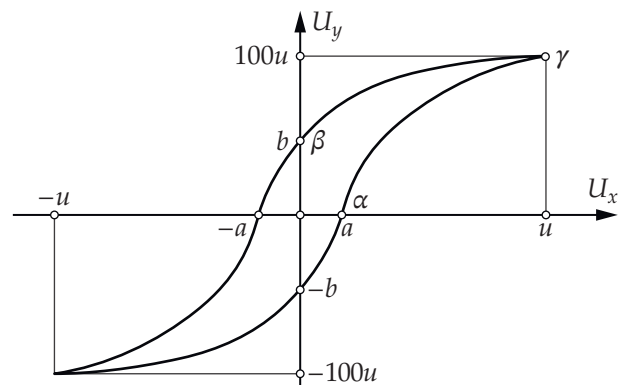
Крюков П. А.

В плоском нелинейном конденсаторе пространство между обкладками заполнено нелинейным диэлектриком, поэтому зависимость заряда конденсатора от напряжения между обкладками может быть более сложной, чем в линейном случае, для которого $q = CU$. При циклическом изменении напряжения зависимость $q(U)$ для нелинейного конденсатора имеет вид петли гистерезиса.

5а. (5 баллов) Для изучения свойств нелинейного конденсатора C собрали цепь, изображённую на рисунке.



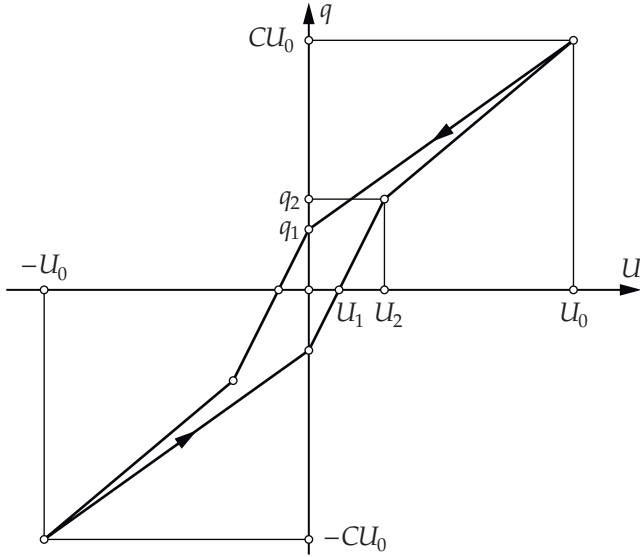
Ёмкость обычного (линейного) эталонного конденсатора C_0 удовлетворяет сильному неравенству $C_0 \gg \frac{100S\epsilon_0}{d}$, где d и S — расстояние между обкладками нелинейного конденсатора и их площадь. Сопротивления резисторов подобраны так, что выполняется равенство $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{S\epsilon_0}{dC_0}$. На вход цепи подаётся гармоническое напряжение $U(t)$. К точкам A и B подключены выводы пластин осциллографа, отклоняющих луч по горизонтали и вертикали соответственно. На экране осциллографа наблюдается зависимость напряжения $U_y = \varphi_B - \varphi_E$ между точками B и E от напряжения $U_x = \varphi_A - \varphi_D$ между точками A и D , изображённая на рисунке. Подключение осциллографа не меняет распределение токов и потенциалов в цепи.



Определите напряжённость поля E в диэлектрической пластине, а также абсолютную величину поверхностной плотности поляризационных зарядов $|\sigma_p|$ на одной из сторон пластины (соприкасающейся с обкладкой конденсатора) в точках графика, помеченных буквами α , β , γ . Параметры нелинейного конденсатора S и d , ёмкость C_0 эталонного конденсатора, а также обозначенные на графике параметры петли a , b , u считаются известными. Электрическая постоянная равна ϵ_0 .

5б. (7 баллов) Другой нелинейный конденсатор подключают последовательно с резистором сопротивлением R к генератору прямоугольных импульсов с частотой n , на-

пряжение между выводами которого в течение первой половины периода равно U_0 , а в течение второй половины периода равно $-U_0$. В установившемся режиме заряд одной из обкладок конденсатора q в зависимости от напряжения между обкладками U изменяется так, как показано на графике, приведённом на рисунке ниже.



Параметры петли гистерезиса, обозначенные на графике, равны $U_1 = 0,1U_0$, $U_2 = 0,25U_0$, $q_1 = 2CU_1$, $q_2 = q_1 + 0,1CU_0$. Значения U_0 и C известны, при этом $nRC \ll 1$. Найдите среднюю за период мощность, потребляемую цепью от генератора и среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе. Ответы выразите через параметры C , U_0 , n .

Решение

5а. Сначала рассмотрим точку γ графика зависимости U_y (U_x). Справедливы соотношения:

$$100u = \frac{q^{(\gamma)}}{C_0}, \quad u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (E^{(\gamma)}d + 100u), \quad (20)$$

где $q^{(\gamma)}$ — заряд эталонного конденсатора, $E^{(\gamma)}$ — напряжённость поля в диэлектрической пластине в данный момент. Из условия следует сильное неравенство

$$\frac{100R_2}{R_1 + R_2} \ll 1, \quad (21)$$

поэтому второе уравнение из (20) можно переписать так

$$u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E^{(\gamma)}d. \quad (22)$$

Таким образом, напряжение $U_x = 100u$ в точке γ пропорционально заряду $q^{(\gamma)}$ эталонного конденсатора, а следовательно (поскольку заряды конденсаторов равны) и заряду нелинейного конденсатора. Напряжение $U_y = u$ в точке γ пропорционально напряжению на нелинейном конденсаторе. Подставляя в формулу (22) соотношение из условия, имеем искомую напряжённость

$$E^{(\gamma)} = \frac{C_0 u}{S \varepsilon_0}. \quad (23)$$

Поверхностная плотность поляризационных зарядов найдётся из соотношения

$$\frac{q^{(\gamma)}}{S \varepsilon_0} - \frac{|\sigma_p^{(\gamma)}|}{\varepsilon_0} = E^{(\gamma)}.$$

Подставим в это соотношение заряд $q^{(\gamma)}$ из первого уравнения из (20), а напряжённость поля из формулы (23), после несложных преобразований получим ответ

$$|\sigma_p^{(\gamma)}| = \frac{100C_0 u}{S} - \frac{C_0 u}{S} = \frac{99C_0 u}{S}$$

Теперь рассмотрим точку β . Легко видеть, что сумма напряжений на нелинейном и обычном конденсаторе в состоянии, соответствующем этой точке на графике, равна нулю. Этот факт отражает уравнение

$$\left(\frac{C_0 b}{S \varepsilon_0} - \frac{|\sigma_p^{(\beta)}|}{\varepsilon_0} \right) d - b = 0, \quad (24)$$

ведь заряд нелинейного конденсатора в этом случае равен $C_0 b$ (с точностью до знака). Из условия следует сильное неравенство $\frac{C_0 d}{S \varepsilon_0} \gg 1$, поэтому пренебрегая последним слагаемым в уравнении (24), получаем искомую поверхностную плотность

$$|\sigma_p^{(\beta)}| = \frac{C_0 b}{S}.$$

Наконец рассмотрим состояние диэлектрика, соответствующее точке α . Заряды конденсаторов в этом состоянии, очевидно, равны нулю, поэтому напряжённость поля в диэлектрике создаётся только поляризационными зарядами, следовательно справедливо равенство

$$\frac{|\sigma_p^{(\alpha)}|}{\varepsilon_0} \cdot d \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = a. \quad (25)$$

Используя соотношение для сопротивлений, данное в условии, из равенства (25) имеем ответы:

$$|\sigma_p^{(\alpha)}| = \frac{C_0 a}{S}, \quad E^{(\alpha)} = \frac{C_0 a}{S \varepsilon_0}.$$

5б. Сильное неравенство $nRC \ll 1$, приведённое в условии, означает, что время, за которое заряды на обкладках конденсатора устанавливаются, значительно меньше периода колебаний напряжения.

Пусть в некоторый момент времени напряжение на выводах генератора и на конденсаторе равно $-U_0$. При изменении полярности напряжения на выводах генератора, последний перемещает заряд $Q = 2CU_0$, совершая работу $A_g^{(1/2)} = 2CU_0^2$. При обратном изменении полярности на выводах генератора, он совершает такую же работу по перемещению заряда. Таким образом, за период генератор совершает работу $A_g = 2A_g^{(1/2)} = 4CU_0^2$, следовательно средняя мощность, потребляемая цепью от генератора равна $P_g = 4CU_0^2 n$.

Заметим, что если бы зависимость заряда конденсатора от напряжения на нём была бы линейной ($q = CU$), то вся мощность, потребляемая цепью от генератора, выделялась бы в виде тепла на резисторе. В случае нелинейного конденсатора часть работы, совершаемой генератором, тратится на «переполаризацию диэлектрика». При увеличении заряда нелинейного конденсатора от значения

$-CU_0$ до значения CU_0 электрические силы совершают работу равную $A_p^{(1/2)} = \int U dq$, численно эта работа равна площади половины петли гистерезиса, располагающейся справа от оси ординат. Очевидно, что работа электрических сил по перезарядке конденсатора за период равна площади всей петли гистерезиса $A_p = 2A_p^{(1/2)}$ — это и есть потери энергии на переполяризацию диэлектрика. Таким образом, из закона сохранения энергии следует, что на резисторе за период выделяется количество теплоты равное $Q = A_g - A_p$. Определение A_p , как уже было сказано, сводится к расчёту площади петли гистерезиса, которая может быть найдена разными способами. Приведём здесь конечный ответ $A_p = 0,2CU_0^2$. Таким образом, искомая мощность равна $P_R = 3,8CU_0^2n$.

Ответ: 5a. $|\sigma_p^{(\alpha)}| = \frac{C_0 a}{S}$, $|\sigma_p^{(\beta)}| = \frac{C_0 b}{S}$, $|\sigma_p^{(\gamma)}| = \frac{99C_0 u}{S} \approx \frac{100C_0 u}{S}$; $E^{(\alpha)} = \frac{C_0 a}{S\varepsilon_0}$, $E^{(\gamma)} = \frac{C_0 u}{S\varepsilon_0}$. **5b.** $P_g = 4CU_0^2n$, $P_R = 3,8CU_0^2n$.

Критерии

Оценивать решения предлагается на основе распределения баллов, данного в условии, с учётом следующих дополнительных соображений.

Пункт 5a предполагает пять ответов. Каждый из верно найденных ответов оценивается в 1 балл вне зависимости от того, каким способом он был получен. При этом для $|\sigma_p^{(\gamma)}|$ верными считаются оба ответа и $\frac{99C_0 u}{S}$ и $\frac{100C_0 u}{S}$.

Правильное с физической точки зрения решение, приводящее к неверному ответу вследствие вычислительных ошибок, оценивается в 50 % от максимального количества баллов за соответствующий ответ. Если не один верный ответ не был получен, однако решение содержит отдельные разумные утверждения, то такое решение даёт оценку 0,5 за весь пункт.

В пункте 5b верный ответ на первый вопрос (о средней мощности генератора) оценивается в 2 балла, а верный ответ на второй вопрос — в 5 баллов. Если на первый вопрос дан неверный ответ, вследствие вычислительных ошибок или невнимательности (например, дан ответ в два раза меньше верного), то за этот вопрос — 1 балл. Верный ответ на второй вопрос оценивается полным баллом при любом способе решения. Если верный ответ не найден, только вследствие ошибки при вычислении мощности, потребляемой от генератора, второй вопрос оценивается полным баллом.

Промежуточные результаты при ответе на второй вопрос оцениваются по следующей схеме. Высказана мысль о том, что мощность, выделяющаяся на резисторе, равна разности мощности генератора и мощности потерь на переполяризацию в диэлектрике, — 1 балл. Указывается (тем или иным образом), что потери на переполяризацию за период численно равны площади петли гистерезиса — 2,5 балла. Верное вычисление площади петли — 1 балл.

**2. Излучает и падает (10 баллов)****Фольклор**

В соответствии с законами классической электродинамики заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Релятивистские эффекты в этой задаче не учитываются. Масса и модуль заряда электрона, скорость света в вакууме и электрическая постоянная равны m_e , e , c и ϵ_0 соответственно.

2а. (4 балла) Пусть электрон движется вокруг протона по орбите, близкой к круговой. Протон считаем неподвижным, поскольку его масса много больше m_e . Известно, что мощность излучения движущегося электрона даётся формулой

$$P = A \cdot e^\alpha c^\beta \epsilon_0^\gamma a^\delta,$$

где a — ускорение электрона, A — безразмерная константа. Определите показатели степени: α , β , γ , δ .

2б. (6 баллов) В процессе излучения энергия электрона уменьшается, поэтому он движется не по окружности, а по спирали и в некоторый момент времени должен упасть на протон. Предполагая, что за время, равное периоду обращения электрона, расстояние R между электроном и протоном изменяется незначительно, а также считая известной постоянную A в приведённой выше формуле, определите время Δt , за которое расстояние R уменьшается от известного значения R_0 на ΔR , при условии, что $\Delta R \ll R_0$. Найдите время $t_{1/2}$, за которое расстояние R уменьшается от значения R_0 до значения $\frac{R_0}{2}$.

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1.$$

Решение

2а. Основными в системе СИ являются единицы измерения заряда, массы, длины и времени. Выразим размерности мощности и электрической постоянной ϵ_0 через основные единицы. Справедливы формулы

$$[P] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}, \quad [\epsilon_0] = \left[\frac{q^2}{Fr^2} \right] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}.$$

Поскольку «килограммы» не входят в размерность скорости и ускорения, а входят только в размерность электрической постоянной и мощности можно сразу установить, что $\gamma = -1$. «Кулоны» есть только в размерностях заряда и электрической постоянной, поэтому справедливо уравнение $\alpha + 2\gamma = 0$, из которого следует, что $\alpha = 2$. Для определения постоянных β и δ на основе соображений размерности составим систему уравнений

$$\begin{aligned} \beta - 3\gamma + \delta &= 2, \\ -\beta + 2\gamma - 2\delta &= -3. \end{aligned}$$

После подстановки в эту систему найденного значения γ , решаем её и получаем $\beta = -3$, $\delta = 2$. Таким образом, для излучаемой мощности имеем формулу

$$P = A \cdot e^2 c^{-3} \epsilon_0^{-1} a^2. \quad (5)$$

2б. В условиях задачи электрон движется по траектории, близкой к круговой, поэтому его ускорение равно центростремительному ускорению $a = \frac{v^2}{r}$, где v — скорость движения электрона, r — расстояние от электрона до ядра. Подставляя ускорение в формулу (5) для мощности, имеем соотношение

$$P = A \cdot e^2 c^{-3} \epsilon_0^{-1} \cdot \frac{v^4}{R^2}. \quad (6)$$

Запишем второй закон Ньютона для кругового движения электрона:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = m \cdot \frac{v^2}{R}. \quad (7)$$

Для полной механической энергии электрона имеем формулу

$$E = W + T = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R},$$

дифференцируя которую, получаем соотношение

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{dR}{dt}. \quad (8)$$

Скорость изменения кинетической энергии электрона равна по абсолютной величине и противоположна по знаку мощности излучения. Этот факт отражает уравнение

$$\frac{dE}{dt} = -P. \quad (9)$$

Подставляем в уравнение (9) выражения для мощности (6) и скорости изменения энергии (8). После преобразований с учётом формулы (7) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{Ae^4}{2\pi c^3 \epsilon_0^2 m^2} \cdot \frac{1}{R^2}. \quad (10)$$

Из этого уравнения следует ответ на первый вопрос второго пункта: $\Delta t = \frac{2\pi c^3 \epsilon_0^2 m^2}{Ae^4} R_0^2 \Delta R$. Интегрируя уравнение (10), получаем ответ и на второй вопрос:

$$t_{1/2} = \frac{7}{12} \cdot \frac{\pi c^3 \epsilon_0^2 m^2}{Ae^4} \cdot R_0^3.$$

Ответ: 2а. $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = -1$, $\delta = 2$. **2б.** $\Delta t = \frac{2\pi c^3 \epsilon_0^2 m^2}{Ae^4} R_0^2 \Delta R$; $t_{1/2} = \frac{7}{12} \cdot \frac{\pi c^3 \epsilon_0^2 m^2}{Ae^4} \cdot R_0^3$.

Критерии

Верные, обоснованные ответы на вопросы задачи оцениваются полным баллом при любом способе решения.

В пункте 2а предполагается 4 ответа. Любой из верных ответов оценивается в 1 балл. Если в начале решения какая-то степень была найдена неверно, и только вследствие этого (!) другая степень в последующем решении была найдена неверно, то за нахождение этой другой степени выставляется полный балл.

В пункте 2b верные ответы даже при отсутствии подробных объяснений оцениваются полным баллом. Если верные ответы не были получены только вследствие вычислительных ошибок, то выставляется 4 балла за этот пункт. Если найден верно только первый ответ, но не произведено интегрирование и не найден второй ответ, то выставляется 4 балла за этот пункт.

При отсутствии правильного ответа отдельные продвижения в решении пункта 2b оцениваются по следующей схеме.

Указано, что ускорение можно считать приближённо равным центростремительному ускорению — 0,5 балла.

Записан второй закон Ньютона — 0,5 балла.

Записано выражение для энергии электрона $E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$ — 1 балл.

Указывается, что скорость изменения энергии электрона равна по абсолютной величине мощности излучения — 1 балл.

Список рекомендуемой литературы

Ниже приведен список пособий и ресурсов сети «Интернет», которые могут быть полезны при подготовке к олимпиадам по физике. Также очень полезно познакомиться с публикациями в журнале «Квант», в особенности – со статьями и задачами, опубликованными в рубриках «Задачник "Кванта"», «Физический факультатив», «Практикум абитуриента», «Варианты вступительных испытаний» и «Олимпиады».

1. Зубов В. Г., Шальнов В. П. Задачи по физике. – М.: Гостехиздат, 1952. – 320 с. (и все последующие издания до 11-го, М.: Новая волна, 2000).
2. Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б., Керженцев В. В., Мякишев Г. Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1980. – 384 с. (и все последующие издания до 10-го, М.: Физматлит, 2003).
3. Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Сборник задач по элементарной физике: Пособие для самообразования. – М.: Наука, 1964. – 440 с. (и все последующие издания до 7-го, М.: УНЦ ДО МГУ, 2004).
4. Буздин А. И., Ильин В. А., Кривченков И. В., Кротов С. С., Свешников Н. А. Задачи московских физических олимпиад / Под ред. С. С. Кротова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 192 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 60.) % 1968-1985 гг.
5. Варламов С.Д., Зинковский В.И., Семёнов М.В., Старокуров Ю.В., Шведов О.Ю., Якута А.А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005. Приложение: олимпиады 2006 и 2007. (изд. 2-е, испр. и доп.) / Под ред. Семёнова М.В., Якуты А.А. – М.: Изд-во МЦНМО, 2007. – 696 с.
6. Буздин А. И., Зильберман А. Р., Кротов С. С. Раз задача, два задача... – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 240 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 81.)
7. Слободецкий И. Ш., Асламазов Л. Г. Задачи по физике. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 176 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 5). А также 2-е изд. – М.: Бюро Квантум, 2001. – 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 86).
8. Балаш В. А. Задачи по физике и методы их решения. – М.: Просвещение, 1964 (и все последующие издания до 4-го, М.: Просвещение, 1983).
9. Задачи по физике: Учебное пособие / Под ред. О. Я. Савченко. – 4-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2001. – 368 с.
10. Лукашик В. И. Физическая олимпиада в 6--7 классах средней школы: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1987. – 192 с.
11. Гольдфарб Н. И. Физика. Задачник. 10--11 кл.: пособие для общеобразовательных учреждений. – М.: Дрофа, 2006. – 398 с. (и все предыдущие издания).
12. Страница Московской физической олимпиады на сервере Кафедры общей физики Физического факультета МГУ: <http://genphys.phys.msu.ru/ol/>
13. Веб-сайт «Олимпиады для школьников»: <http://info.olimpiada.ru/>
14. Материалы журнала «Квант» в интернете: <http://kvant.mccme.ru/>
15. Архив материалов газеты «Физика» (Издательский дом «Первое сентября»): <http://fiz.1september.ru>

-
16. Интернет-библиотека МЦНМО: <http://ilib.mccme.ru/>
 17. IPhO – International Physics Olympiads. Материалы международных физических олимпиад (на английском языке). <http://ipho.phy.ntnu.edu.tw/> /
 18. Задачи вступительных испытаний и олимпиад по физике в МГУ (сборники за 2001–2017 гг.). – М.: Физический ф-т МГУ.
 19. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. Практический курс для поступающих в университеты. – М.: Физматлит, 2006. – 544 с.
 20. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Подготовка к вступительным испытаниям в МГУ. Физика. 770 задач с подробными решениями. – М.: «Макс пресс», 2009. – 456 с.
 21. Вишнякова Е.А., Макаров В.А., Семенов М.В., Черепецкая Е.Б., Чесноков С.С., Якута А.А. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач. / Под ред. В.А. Макарова, М.В. Семёнова, А.А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект–Центр, 2010. – 368 с.
 22. Всероссийские олимпиады по физике. 1992--2004 / Под ред. С. М. Козела, В. П. Слободянина. – 2-е изд., доп. – М.: Вербум-М, 2005. – 534 с.

Содержание

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» 2023 г.	2
7-9 КЛАССЫ	
Задания отборочного этапа	2
Задания заключительного этапа	11
10 КЛАСС	
Задания отборочного этапа	17
Задания заключительного этапа	25
11 КЛАСС	
Задания отборочного этапа	29
Задания заключительного этапа	41
Московская олимпиада школьников по физике. 2023 г.	47
9 КЛАСС	47
10 КЛАСС	48..
11 КЛАСС, тур 1	49
11 класс, тур 2	56
Список рекомендуемой литературы	60

ОЛИМПИАДЫ
МГУ имени М.В. Ломоносова для школьников
ФИЗИКА
2023

«Покори Воробьевы горы»
Московская олимпиада школьников

Подписано в печать 02.10.2023 г.
 Объем 3,75 п.л. Тираж 500 экз
 Заказ _____

Отпечатано в отделе оперативной печати
 физического факультета МГУ