



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Физический факультет

# Олимпиады МГУ им. М.В. Ломоносова для школьников ФИЗИКА



Покори Воробьевы горы!



Московская олимпиада  
школьников по физике



Я верю: и сейчас в российской глубинке много талантливой молодежи, стремящейся к знаниям. Отбор, поиск талантливых ребят – стратегическая задача Московского университета. Россия всегда славилась своими талантами. Даже сегодня 60 % студентов МГУ – иностранцы. И это во многом благодаря нашему стремлению искать таланты по всей России. Ждем вас в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова!

*Председатель оргкомитета олимпиады школьников "Ломоносов"*

*Ректор МГУ имени М.В. Ломоносова  
академик В.А. Садовничий*



Наша олимпиада не случайно носит имя великого ученого Михаила Васильевича Ломоносова. Он пришел в Москву совсем молодым человеком и благодаря своей целеустремленности и глубокому разностороннему уму стал одним из самых выдающихся людей в истории России, прежде всего, блестящим физиком.

С той поры прошло почти три столетия. Но и сейчас наша страна богата талантливой молодежью. Я убежден, что олимпиада "Ломоносов" поможет нам найти самых достойных и самых талантливых учащихся. Успехов Вам, будущие физики - надежда и опора нашей Родины!

*Декан физического факультета  
МГУ имени М.В. Ломоносова  
профессор Н.Н. Сысов*

**Олимпиады школьников по физике,  
проводимые физическим факультетом  
МГУ имени М.В.Ломоносова**

Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова традиционно участвует в организации и проведении олимпиад школьников по физике «Ломоносов», «Покори Воробьевы горы!», «Московской олимпиады школьников», «Робофест».

В 2021-2022 учебном году в соответствии с Перечнем олимпиад школьников этим олимпиадам присвоены следующие уровни:

- «Московская олимпиада школьников» по физике – 1 уровень
- «Ломоносов» по физике – 2 уровень
- «Покори Воробьевы горы!» по физике – 1 уровень
- «Робофест» по физике – 2 уровень

Победители олимпиад 1 и 2 уровней, а также призеры олимпиад 1 зачислялись в 2022 году на физический факультет МГУ без вступительных испытаний, а призеры олимпиад 2 уровня получали 100 баллов за дополнительное вступительное испытание по физике. Всего в 2022 году на физический факультет было зачислено 123 человека, являющихся победителями и призерами олимпиад школьников, что составляет 34% от общего числа зачисленных на 1 курс абитуриентов. Из них четверть являются победителями и призерами олимпиад школьников, проводимых физическим факультетом.

# ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ 2021/22 учебный год

Олимпиада «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» по физике проводится с 2005 года, и традиционно входит в I уровень Перечня олимпиад школьников в РФ. Особенностью олимпиады являются творческие задания отборочного этапа олимпиады, требующие от участников высокой эрудиции, уверенного владения математическим аппаратом и отличного понимания сути физических процессов. У олимпиады есть ряд своих традиций. Каждый год в задание для старших (10 и 11 классов) включается задача, требующая построения и анализа модели явления, в которой авторское решение не считается единственным правильным, и в ходе проверки оцениваются и разумные «альтернативные» модели, анализ которых проведен корректно. Каждый год задание старших классов посвящено необычному персонажу (литературному или реальному), работавшему в области физики, каждый год одно из заданий связано с темой Нобелевской премии по физике, врученной в стартовом году проведения олимпиады.

Этот проект нацелен на поиск талантливых школьников из регионов России, и жюри очень внимательно относится к каждой работе, стараясь оценить все достижения участников.

В 2021-2022 учебном году олимпиада включала два обязательных этапа:

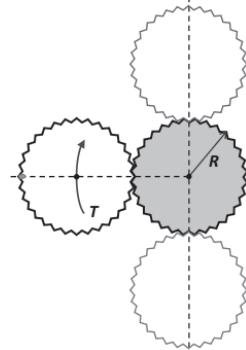
- первый этап – отборочный, который проводится в заочной форме с применением дистанционных образовательных технологий в период с ноября по декабрь;
- второй этап – заключительный, который проводился также в дистанционной форме в период с февраля по март.

Для участия в отборочном этапе необходимо пройти регистрацию на официальном портале Олимпиады, получить задания, отправить свои решения в электронном виде через личный кабинет на портале Олимпиады.

К участию в заключительном этапе допускались победители и призеры отборочного этапа, а также победители и призеры Олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!» предыдущего года по данному предмету, продолжающие освоение общеобразовательных программ среднего (полного) общего образования.

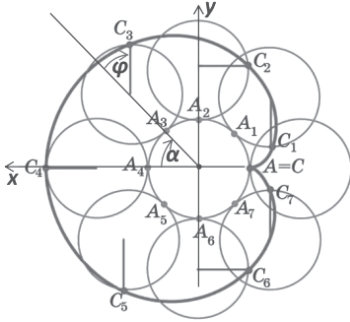
**ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА**  
**для 10 и 11 классов**  
**«РАБОТЫ ДОКТОРА САРТОРИУСА».**

1. («Замечательная кривая», 18 баллов) Однажды, во время краткого отдыха на станции вблизи Соляриса, доктор Сарториус рассеянно наблюдал за вращением шестеренок в демонстрационном часовом механизме. Его внимание привлекла шестеренка, вращающаяся вокруг точно такой же, но закрепленной шестеренки. Сбоку, на одном из ее зубчиков, сидела неподвижно (относительно шестеренки) небольшая букашка. Вращение происходило в вертикальной плоскости (поле тяжести на станции было такое же, как на Земле, и  $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ ). Из паспорта механизма доктор узнал радиус шестеренок  $R = 10 \text{ см}$  и период обращения оси подвижной шестеренки вокруг неподвижной  $T \approx 898 \text{ мс}$ . С помощью зоологического справочника он выяснил, что масса букашки  $m \approx 0,15 \text{ г}$ . В некоторый момент времени букашка, проходя точку наибольшего удаления от оси неподвижной шестеренки, оказалась на одной горизонтали с этой осью. «А с какой силой в этот момент букашка действует на шестеренку?» – подумал Сарториус. Исследуйте движение букашки, изобразите ее траекторию, вычислите радиус кривизны траектории в точке, в которой в этот момент времени находилась букашка, и ответьте на вопрос доктора. Размерами букашки и зубцов шестеренок по сравнению с радиусом можно пренебречь. Зубцы не проскальзывают друг по другу. В дополнение найдите радиус кривизны траектории букашки и величину силы, с которой букашка действует на шестеренку, для ее положений, которые соответствуют самому верхнему и самому нижнему положениям подвижной шестеренки.



**Возможное решение:** Схема построения траектории может быть такой, как показана на рисунке. Важно понимать роль отсутствия проскальзывания. Длины дуг прокатившихся друг по другу окружностей равны: если направление на ось подвижной шестеренки от оси неподвижной повернулось на угол  $\alpha$  от положения с максимальным удалением букашки, то, поскольку  $\varphi \cdot R = \alpha \cdot R$ , сама букашка повернулась от радиуса, проведенного от оси неподвижной шестеренки на угол  $\varphi = \alpha$  (см. рисунок). Поэтому за каждый оборот центра

подвижной шестеренки вокруг неподвижной букашка тоже совершает один оборот относительно радиуса – за пол-оборота доходит до точки касания неподвижной шестеренки, а затем возвращается на максимальное расстояние от ее оси.



Кроме того, в точке касания мгновенная скорость букашки обращается в ноль – траектория перпендикулярна поверхности неподвижной шестеренки. В геометрии эту кривую называют «кардиоида».

Для исследования движения букашки введем систему координат, показанную на рисунке, и запишем координаты букашки в момент времени  $t$ , когда ось подвижной шестеренки от оси неподвижной повернулось на угол  $\alpha = \omega t = \frac{2\pi}{T}t$  от положения с

максимальным удалением букашки. Так как расстояние от оси неподвижной шестеренки до оси подвижной равняется  $2R$ , а угол поворота радиуса подвижной шестеренки от оси  $x$  равен  $\alpha + \varphi = 2\alpha$ , то:

$$\begin{cases} x(t) = 2R \cdot \cos(\alpha) + R \cdot \cos(2\alpha) = R[2 \cos(\alpha) + \cos(2\alpha)] \\ y(t) = 2R \cdot \sin(\alpha) + R \cdot \sin(2\alpha) = R[2 \sin(\alpha) + \sin(2\alpha)] \end{cases}$$

Дифференцируя эти соотношения, находим компоненты скорости букашки

$$\begin{cases} v_x(t) = x'_t = -2\omega R[\sin(\alpha) + \sin(2\alpha)] \\ v_y(t) = y'_t = +2\omega R[\cos(\alpha) + \cos(2\alpha)] \end{cases}$$

Отметим, что модуль скорости букашки в момент времени  $t$  равен  $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\omega R \sqrt{2(1 + \cos(\alpha))} = 4\omega R |\cos(\alpha/2)|$ . После повторного дифференцирования находим и компоненты ускорения:

$$\begin{cases} a_x(t) = x''_t = -2\omega^2 R[\cos(\alpha) + 2 \cos(2\alpha)] \\ a_y(t) = y''_t = -2\omega^2 R[\sin(\alpha) + 2 \sin(2\alpha)] \end{cases}$$

Например, в момент наибольшего удаления ( $\alpha = 0$ )  $a_x = -6\omega^2 R$  и  $a_y = 0$  – ускорение равно  $6\omega^2 R$  по величине и

направлено горизонтально – перпендикулярно скорости  $v = 4\omega R$ .

Поэтому радиус кривизны траектории  $R_K = \frac{v^2}{a} = \frac{8}{3}R \approx 26,7$  см. Сила, с

которой букашка действует на шестеренку, равна по величине силе  $\vec{F}$ , с которой шестеренка действует на букашку, а уравнение движения букашки  $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$ . Из этого уравнения, с учетом перпендикулярности  $\vec{a}$  и  $\vec{g}$ , находим, что  $F = m\sqrt{g^2 + 36\omega^4 R^2} \approx 4,64$  мН.

В верхнем положении подвижной шестеренки ( $\alpha = 90^\circ$ )  $a_x = +4\omega^2 R$  и  $a_y = -2\omega^2 R$ , и из уравнения движения  $F = m\sqrt{(g - 2\omega^2 R)^2 + 16\omega^4 R^2} \approx 2,94$  мН.

В нижнем положении подвижной шестеренки ( $\alpha = 270^\circ$ )  $a_x = +4\omega^2 R$  и  $a_y = +2\omega^2 R$ , и из уравнения движения  $F = m\sqrt{(g + 2\omega^2 R)^2 + 16\omega^4 R^2} \approx 4,15$  мН.

Отметим, что  $2\omega^2 R \approx 9,791 \text{ м/с}^2$ , то есть отличается от  $g$  менее чем на 0,1 %. Допустимо все расчеты проводить в приближении  $2\omega^2 R \approx g$  – отличия появляются только в третьем знаке и не более чем на 1.

Для определения радиусов кривизны траектории в этих положениях по формуле  $R_K = v^2/a_n$  необходимо найти центростремительную (перпендикулярную скорости) компоненту ее ускорения. Например, в при верхнем положении подвижной шестеренки  $v_x = v_y = -2\omega R$ , то есть скорость  $v = 2\sqrt{2}\omega R$  направлена под углом  $45^\circ$  к горизонтали, и поэтому  $a_n = 4\omega^2 R \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\omega^2 R \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}\omega^2 R$ .

Значит,  $R_K = \frac{8}{3\sqrt{2}}R \approx 18,9$  см. Аналогично можно сделать и для нижнего положения, но из симметрии кардиоиды очевидно, что радиус кривизны в этом случае будет таким же.

**Примечание:** Все вычисления можно провести и без дифференцирования, используя прием представления движения букашки

как комбинации двух равномерных вращений – центра подвижной шестеренки вокруг центра неподвижной и букашки вокруг центра подвижной шестеренки. Реализация этого подхода разобрана в общем виде (для произвольного соотношения радиусов шестеренок) в решении задачи 4 части II задания для 7-9 классов.

**ОТВЕТЫ:** величины силы, действующей на шестеренку со стороны букашки в положении максимального удаления

$$F = m\sqrt{g^2 + 36\omega^4 R^2} \approx 4,64 \text{ мН,} \quad \text{в} \quad \text{верхнем} \quad \text{положении}$$

$$F = m\sqrt{(g - 2\omega^2 R)^2 + 16\omega^4 R^2} \approx 2,94 \text{ мН,} \quad \text{в} \quad \text{нижнем} \quad \text{положении}$$

$$F = m\sqrt{(g + 2\omega^2 R)^2 + 16\omega^4 R^2} \approx 4,15 \text{ мН. Радиусы кривизны траекто-$$

рии: в положении максимального удаления  $R_K = \frac{8}{3}R \approx 26,7 \text{ см,}$  в

«верхнем» и «нижнем» положении одинаковы и равны

$$R_K = \frac{8}{3\sqrt{2}}R \approx 18,9 \text{ см.}$$

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

Действие	Макс.балл
Правильно изображена траектория: <ul style="list-style-type: none"> <li>• правильный общий вид кривой – одна точка касания, одно удаление на максимальное расстояние от центра за период, замкнутость;</li> <li>• есть правильный «излом» в точке касания.</li> </ul>	<b>1+1=2</b>
Правильно найден закон изменения вектора ускорения букашки – как функция времени, или получены формулы для всех трех «нужных» положений (1+2+1 балла)	<b>4</b>
Записано (используется в решении) уравнение движения букашки в виде $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$	<b>1</b>
Правильно найдена величина силы, действующей на шестеренку со стороны букашки в положении максимального удаления (формула + число в мН с точностью до десятых)	<b>1+1=2</b>



Действие	Макс.балл
Правильно найден радиус кривизны траектории в положении максимального удаления (формула или число в см с точностью до десятых)	1
Правильно найдена величина силы, действующей на шестеренку со стороны букашки в «верхнем» положении (формула + число в мН)	1+1=2
Правильно найдена величина силы, действующей на шестеренку со стороны букашки в «нижнем» положении (формула + число в мН)	1+1=2
Правильно найден радиус кривизны траектории в «верхнем» положении (формула + число в см с точностью до десятых)	1+1=2
Правильно найден радиус кривизны траектории в «нижнем» положении (формула + число в см с точностью до десятых)	1+1=2
<b>ВСЕГО</b>	<b>18</b>

2. («Модель атмосферы», 25 баллов) До Соляриса доктор Сарториус изучал другую планету-океан – не такую удивительную, как Солярис, но тоже весьма необычную. Эту планету назвали Терма. Вся ее поверхность была покрыта химически однородным океаном, состоящим всего из одного вещества. Атмосфера Термы состояла только из паров этого же вещества. Молярная масса этого вещества  $\mu \approx 54$  г/моль, его пары в интересующем нас диапазоне температур похожи на многоатомный идеальный газ. Размеры планеты больше земных, и она вращалась по почти круговой орбите, значительно удаленной от своего Солнца, которое не могло существенно обогреть планету. Несмотря на это, на Терме поддерживалась довольно высокая по земным меркам температура за счет интенсивных радиоактивных распадов внутри твердой части планеты. Например, в период работы доктора Сарториуса температура поверхности океана Термы равнялась  $T_0 \approx 400$  К и практически не изменялась. Ускорение свободного падения вблизи поверхности океана на Терме  $g \approx 20$  м/с<sup>2</sup>. Сарториусу удалось построить реалистичную модель строения атмосферы, используя следующие предположения:

- в области, в которой пар не является насыщенным, атмосфера находится в квазиравновесном механическом состоянии, причем медленные перемещения пара по вертикали можно считать

адиабатическими (то есть происходящими практически без теплообмена);

- в области, в которой пар является насыщенным, он находится в механическом равновесии практически без конвекции, но условие адиабатичности нарушается;
- зависимость давления насыщенного пара вещества атмосферы от температуры хорошо описывается соотношением Клапейрона-

Клаузиуса  $p_H(T) = p_H(T_0) \cdot \exp\left(\frac{\mu r}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)$ , в котором удельную

теплоту парообразования  $r \approx 154$  кДж/кг можно считать не зависящей от температуры, а универсальная газовая постоянная  $R \approx 8,31$  Дж/(моль·К).

Используя те же предположения, постройте свою аналогичную модель, и получите формулы, описывающие зависимости температуры и давления пара от высоты над поверхностью океана. Определите диапазон высот, в котором пар в атмосфере Термы не насыщен. Учтите, что в реалистичной модели Вам понадобятся численные расчеты, и используйте для их проведения доступную Вам вычислительную технику. Например, удобно использовать возможности таблиц Excel.

Что изменилось бы в строении атмосферы (укажите наиболее важное, по Вашему мнению, качественное отличие), если бы при тех же температуре океана и силе тяжести веществом океана и атмосферы была бы обычная вода с  $\mu = 18$  г/моль и средней величиной  $r \approx 2300$  кДж/кг?

**Возможное решение:** Начнем с того, что изучим квазиравновесные состояния атмосферы. Пусть  $T(z)$  и  $p(z)$  – это функции, описывающие зависимости температуры и давления пара от высоты  $z$  над поверхностью океана. Условие механического равновесия для бесконечно малой порции газа высотой  $dz$  с площадью горизонтального сечения имеет вид  $\rho S dz g = [p(z) - p(z + dz)]S$ , то

есть  $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ . Так как пар по условию похож на идеальный газ, то его

плотность  $\rho$  связана с давлением соотношением  $\rho = \frac{\mu p}{RT}$ . Таким образом,

введенные функции связаны соотношением  $\frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g p}{RT}$ . Далее нам

нужно рассмотреть две возможности:

I. Пар не насыщен. Согласно модели Сарториуса, в соответствующей области медленные перемещения пара по вертикали можно считать адиабатическими. В адиабатическом процессе связь давления и температуры выражается формулой  $p = \text{const} \cdot T^\nu$ , где показатель степени выражается через молярные теплоемкости в изобарном и изохорном процессах  $\nu = \frac{c_p}{c_p - c_V} = \frac{c_p}{R} = 4$  (здесь

использовано соотношение Майера  $c_p - c_V = R$ , справедливое для всех идеальных газов и то, что для многоатомного идеального газа  $c_p = 4R$ ).

Поэтому  $\frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{R} \frac{p}{T} \frac{dT}{dz} = 4 \frac{p}{T} \frac{dT}{dz} = -\frac{\mu g p}{RT}$ , и в этой части атмосферы температура является линейной функцией высоты:  $\frac{dT}{dz} = -\frac{\mu g}{4R} \Rightarrow T(z) = T(z_0) - \frac{\mu g}{4R} (z - z_0)$ . Здесь  $z_0$  – нижняя граница слоя ненасыщенного пара. При этом

$$p(z) = p(z_0) \left[ \frac{T(z)}{T(z_0)} \right]^4 = p(z_0) \left[ 1 - \frac{\mu g}{4RT(z_0)} (z - z_0) \right]^4.$$

II. Пар – насыщенный. В этом случае условие адиабатичности не выполняется, но давление однозначно связано с температурой

$$p_H(T) = p_H(T_0) \cdot \exp\left(\frac{\mu r}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right). \quad \text{Уравнение механического}$$

равновесия превращается в уравнение на  $T(z)$ :

$$\frac{dp}{dz} = p_H(T_0) \cdot \frac{\mu r}{RT^2} \exp\left(\frac{\mu r}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right) \frac{dT}{dz} = \frac{\mu r}{RT} \frac{p}{T} \frac{dT}{dz} = -\frac{\mu g p}{RT} \Rightarrow \frac{dT}{dz} = -\frac{g}{r} T$$

Таким образом,  $\frac{dT}{T} = d[\ln(T)] = -\frac{g}{r} dz$ , то есть выше нижней границы области насыщенного пара  $z_1$  закон изменения температуры – экспоненциальный  $T(z) = T(z_1) \cdot \exp\left(-\frac{g}{r} (z - z_1)\right)$ , а давление определяется соотношением Клапейрона–Клаузиуса.

Ясно, что на уровне океана ( $z = 0$ ) пар насыщенный. Выясним, что будет происходить на небольших высотах. Пар станет не

насыщенным, если его давление будет падать с высотой быстрее, чем давление насыщенного пара, определяемое его температурой. Можно поступить так: предположим, что пар на небольших высотах не насыщенный. Тогда его температура убывает с высотой по закону

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right), \quad \text{а давление} \quad p(z) = p_H(T_0) \left(1 - \frac{z}{H}\right)^4,$$

где введено обозначение  $H \equiv \frac{4RT_0}{\mu g} \approx 12,31$  км. Если предположение справедливо, то

относительная влажность

$$\phi(z) = \frac{p(z)}{p_H(z)} = \left(1 - \frac{z}{H}\right)^4 \cdot \exp\left(\frac{\mu r}{R} \left(\frac{1}{T(z)} - \frac{1}{T_0}\right)\right)$$

в слое ненасыщенного пара должна быть меньше 1. С учетом формулы для  $T(z)$  это требование приводится к виду

$$\left(1 - \frac{z}{H}\right)^4 \cdot \exp\left(\frac{\mu r}{RT_0} \frac{z}{H - z}\right) < 1. \quad \text{Используя численное значение}$$

$$\frac{\mu r}{RT_0} \approx 2,502, \quad \text{для переменной } x \equiv \frac{z}{H} \text{ имеем } (1 - x)^4 \cdot \exp\left(\frac{2,5x}{1 - x}\right) < 1.$$

Это трансцендентное неравенство лучше анализировать численно – например, посчитав значения функции в левой части при разных  $x$ , и (это легко можно сделать в таблице Excel) особо выделить значение переменной, при которой функция достигает значение 1:

$x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	<b>0,5832</b>	0,6	0,7	0,8
$\phi$	0,866	0,765	0,701	0,686	0,761	<b>1,000</b>	1,089	2,766	35,24

Для этой же цели можно использовать многочисленные пакеты математических вычислений. Как видно, слой с ненасыщенным паром существует – он простирается от поверхности океана ( $z_0 = 0$  км) до высоты  $z_1 \approx 0,5832 \cdot H \approx 7,18$  км. При больших высотах температура

$$\text{убывает экспоненциально } T(z) \approx 167 \text{ К} \cdot \exp\left(-\frac{z - 7,18 \text{ км}}{7,7 \text{ км}}\right), \text{ а пар остается}$$

насыщенным. Отметим, что реалистичность модели, на которую указано в условии, означает, что вплоть до температур в районе 150 К и (возможно) даже ниже «вещество» океана Термы еще не замерзает – для него еще справедливо уравнение связи давления с температурой, соответствующее кривой фазового равновесия пар-жидкость!

Если бы вместо «вещества» океана Термы была бы обычная вода при тех же условиях, то для нее  $\frac{\mu r}{RT_0} \approx 12,45$ , и условие для выделения слоя

ненасыщенного пара имело бы вид  $(1-x)^4 \cdot \exp\left(\frac{12,45x}{1-x}\right) < 1$ , и это

неравенство в нужном диапазоне значений  $0 < x < 1$  не имеет решений.

Кроме того, вычислив производную  $\phi(x)$  в нуле  $\phi'_x(0) = \frac{\mu r}{RT_0} - 4$

можно заметить, что при  $\frac{\mu r}{RT_0} \geq 4$  относительная влажность не убывает

при подъеме от поверхности океана. Значит, в случае воды вся атмосфера в рамках модели Сарториуса состояла бы из насыщенного пара.

**ОТВЕТЫ:** Пар в атмосфере Термы не насыщен от поверхности океана ( $z_0 = 0$  км) до высоты  $z_1 \approx 7,18$  км. Если бы в тех же условиях океан и атмосфера состояли бы из воды, то весь пар в атмосфере был бы насыщенным.

#### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс.балл
Записано уравнение механического равновесия в виде $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ .	1
Уравнение равновесия приведено к виду $\frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g p}{RT}$ .	2
Для слоя ненасыщенного пара используется уравнение адиабаты для многоатомного идеального газа.	1
Показано, что в слое ненасыщенного пара температура с ростом высоты убывает линейно.	1
Правильно вычислен градиент температуры $\frac{dT}{dz} = -\frac{\mu g}{4R}$ .	2
Правильно найдена зависимость давления от высоты в слое ненасыщенного пара (в виде, эквивалентном $p(z) = p(z_0) \left[ 1 - \frac{\mu g}{4RT(z_0)} (z - z_0) \right]^4$ ).	3

Действие	Макс.балл
Правильно найдена зависимость температуры от высоты в слое насыщенного пара (в виде, эквивалентном $T(z) = T(z_1) \cdot \exp\left(-\frac{g}{r}(z - z_1)\right)$ ).	3
Указано (используется в решении), что давление в этом слое определяется по температуре соотношением Клапейрона–Клаузиса.	2
Предложен корректный алгоритм нахождения области, в которой пар не является насыщенным	2
Доказано, что нижней границей области ненасыщенного пара является поверхность океана.	3
Правильно найдена верхняя граница области ненасыщенного пара.	3
Указано, что в случае воды весь пар в атмосфере был бы насыщенным.	2
<b>ВСЕГО</b>	<b>25</b>

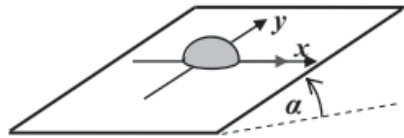
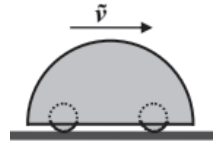
### 3.«Поездка по склону», 16 баллов)

Еще в школе будущий доктор Сарториус увлеченно занимался конструированием. Как-то раз он построил самодвижущегося робота-наблюдателя. Корпус робота имел форму полусферы с глубоко утопленными внутрь четырьмя ведущими колесами. Колеса могли синхронно (то есть так, что их плоскости оставались параллельны) поворачиваться в любом направлении.

При движении по горизонтальной поверхности, на которой коэффициент трения между колесами и поверхностью  $\mu = 0,6$ , робот мог разогнаться до скорости  $\tilde{v} = 5 \text{ м/с}$ , и при этом его колеса проскальзывали. Мог ли этот робот двигаться вдоль горизонтали по той же поверхности, наклоненной под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту (см. рисунок)? Найдите максимальную возможную скорость такого движения. Какой должна была быть угловая скорость вращения колес робота при таком движении с максимальной возможной скоростью, если радиус колес  $r = 6 \text{ см}$ ? Известно, что величина силы сопротивления воздуха для робота с хорошей точностью пропорциональна величине его скорости относительно воздуха (который можно считать неподвижным).

**Возможное решение:** При движении робота массы  $m$  по горизонтали в режиме проскальзывания колес с установившейся (максимальной) скоростью сила трения колес о поверхность уравнивает силу сопротивления воздуха:  $\mu mg = k\tilde{v}$ . Это уравнение позволяет выразить константу в формуле для силы сопротивления:  $k = \frac{\mu mg}{\tilde{v}}$ . При движении по наклонной поверхности

колеса робота не могут быть выставлены параллельно линии движения – иначе у силы трения не будет составляющей, направленной «вверх» вдоль плоскости (на рисунке – вдоль оси  $y$ ), и робот будет скользить вниз вдоль плоскости под действием силы тяжести. Кроме того, у силы трения должна быть составляющая, направленная «вперед» (вдоль оси  $x$ ). Ясно, что колеса должны быть ориентированы под углом к линии движения, и поэтому они обязательно проскальзывают при таком движении. Сила трения скольжения всегда направлена против относительной скорости поверхностей, а скорость точки колеса, касающейся поверхности, есть векторная сумма скорости робота и скорости вращения этой точки вокруг оси колеса. Отметим, что вектор линейной скорости вращения  $\vec{v}_{\text{вращ}}$  лежит в плоскости колеса. Как видно из построения (рисунок справа, где  $\beta$  – угол между направлением движения и проекцией плоскости колеса, а  $\gamma$  – угол между направлением движения и направлением силы трения), необходимо, чтобы «опускающаяся к плоскости» часть каждого колеса была спереди и выше линии движения. При движении с постоянной скоростью  $x$  – составляющая силы трения должна уравнивать силу сопроти-

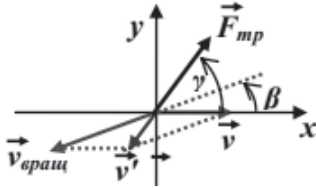


вления воздуха  $F_{\text{мр}x} = F_{\text{мр}} \cos(\gamma) = kv = \frac{\mu mg}{\tilde{v}}v$ , а  $y$  – составляющая – компоненту силы тяжести вдоль плоскости  $F_{\text{мр}y} = F_{\text{мр}} \sin(\gamma) = mg \sin(\alpha)$ . Как видно из этих уравнений, для обеспечения такого движения сила трения должна иметь величину  $F_{\text{мр}} = mg \sqrt{\sin^2(\alpha) + \mu^2 \frac{v^2}{\tilde{v}^2}}$ . С другой стороны, ее величина ограничена:

$F_{mp} \leq \mu mg \cos(\alpha)$ . Поэтому  $v \leq \tilde{v} \sqrt{\cos^2(\alpha) - \frac{\sin^2(\alpha)}{\mu^2}} = \frac{\tilde{v}}{3\sqrt{2}} \approx 1,18$  м/с. Таким

образом, робот действительно мог так двигаться, хотя его максимальная возможная скорость при этом невелика по сравнению со скоростью движения по горизонтальной поверхности.

Кроме того, из уравнений для компонент силы следует, что  $\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{\tilde{v} \sin(\alpha)}{\mu v}$ , и при движении с максимальной скоростью



$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{\mu^2 \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Теперь посмотрим на треугольник скоростей  $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_{ep}$  на рисунке. Ясно, что модуль  $v_{ep} = \omega r$ , где  $\omega$  – угловая скорость вращения колес. Проекция

равенства на ось  $y$  дает соотношение  $\omega r \sin(\beta) = v' \sin(\gamma) = v' \frac{5}{\sqrt{27}}$ , а

теорема косинусов для этого треугольника  $v'^2 = v^2 + \omega^2 r^2 - 2v\omega r \cos(\beta)$ . Из этих соотношений получаем уравнение для определения угла поворота плоскости колес:  $\frac{27}{25} \omega^2 r^2 [1 - \cos^2(\beta)] = v^2 + \omega^2 r^2 - 2v\omega r \cos(\beta)$ . Таким образом,

$$\cos^2(\beta) - \frac{50}{27} z \cdot \cos(\beta) + \frac{25z^2 - 2}{27} = 0, \quad \text{где} \quad z \equiv \frac{v}{\omega r}, \quad \text{и}$$

$$\cos(\beta) = \frac{25z + \sqrt{2(27 - 25z^2)}}{27} \quad (\text{корень со знаком «+» выбран, так как для}$$

правильного направления силы трения необходимо, чтобы  $\omega r \cos(\beta) > v$ , то есть  $\cos(\beta) > z$ ). Однако в любом случае (даже без проведенного анализа поиска необходимого значения  $\beta$ ) ясно, что такое направление существует только в том случае, когда  $\omega r > v$ . Анализ был нужен только для того, чтобы окончательно убедиться, что при любом  $z < 1$  решение с ненулевым  $\beta$  действительно существует.

Значит, требование к угловой скорости – это  $\omega > \frac{v}{r} = \frac{\tilde{v}}{3\sqrt{2}r} \approx 19,64$  с<sup>-1</sup>.



**ОТВЕТЫ:** робот может двигаться по наклонной поверхности горизонтально, максимальная возможная скорость такого движения

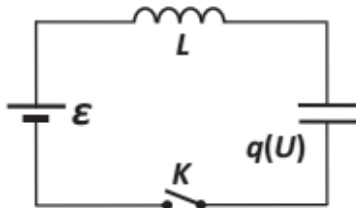
$$v_m = \tilde{v} \sqrt{\cos^2(\alpha) - \frac{\sin^2(\alpha)}{\mu^2}} = \frac{\tilde{v}}{3\sqrt{2}} \approx 1,18 \text{ м/с, для этого угловая скорость}$$

вращения его колес должна быть больше  $\frac{\tilde{v}}{3\sqrt{2}r} \approx 19,64 \text{ с}^{-1}$ .

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

Действие	Макс.балл
Записано (используется в решении) правильное выражение для константы в формуле для силы сопротивления воздуха (эквивалентное $k = \frac{\mu mg}{\tilde{v}}$ ).	1
Указано (используется в решении), что при движении по наклонной поверхности плоскости колес должны быть повернуты относительно линии движения.	2
Указано, что сила трения колес направлена против относительной скорости движения поверхностей.	1
Правильно описана связь ориентации плоскости колес и направления силы трения (например, построен векторный треугольник скоростей $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_{ep}$ ).	2
Найдено правильное выражение для силы трения колес при заданной скорости (эквивалентное $F_{mp} = mg\sqrt{\sin^2(\alpha) + \mu^2 v^2/\tilde{v}^2}$ ).	2
Правильно найдена максимальная возможная скорость такого движения (формула и численное значение)	3+1=4
Указано (используется в решении), то для осуществления такого движения угловая скорость должна удовлетворять условию $\omega > v/r$ .	2
Правильно найдено численное значение нижней границы угловой скорости	1
Обосновано, что решение для угла поворота колес существует при любой угловой скорости, превышающей полученное граничное значение.	1
<b>ВСЕГО</b>	<b>16</b>

4. («Нелинейные колебания», 16 баллов) Однажды, еще будучи студентом, будущий доктор Сарториус выполнял лабораторную работу по изучению нелинейных колебаний. В



работе рассматривался колебательный контур, схема которого показана на рисунке. Источник имел ЭДС  $\varepsilon = 24 \text{ В}$ , а катушка – индуктивность  $L = 0,05 \text{ Гн}$ . Сопротивление всех элементов контура очень

мало, и потерями на выделяющееся тепло на изучаемых отрезках времени можно пренебречь. Вместо обычного конденсатора в контур был включен *вариконд* – конденсатор с переменной емкостью. Свойства такого конденсатора обычно задают КВХ (*кулонвольтной характеристикой*), и для конденсатора в контуре КВХ с хорошей точностью описывалась выражением  $q(U) = \alpha \cdot \sqrt{U}$ , причем константа  $\alpha = \frac{\tau^2 \sqrt{\varepsilon}}{2L}$ , где  $\tau = 2 \text{ мс}$ . Изначально конденсатор разряжен, и колебания запускаются замыканием ключа. Определите амплитуды колебаний напряжения на вариконде и силы тока в катушке. Найдите период колебаний в мс, с точностью до сотых.

**Указание:** считайте известной константой  $\beta \equiv \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \approx 1,311$ .

**Возможное решение:**

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора после замыкания ключа. За счет работы источника будут увеличиваться энергия магнитного поля в катушке и энергия электрического поля в конденсаторе. В рамках естественного предположения о малости потерь на излучение и с учетом заданной в условии возможностью пренебречь тепловыми потерями, запишем закон сохранения энергии для момента времени, к которому заряд конденсатора увеличился до  $q$ :  $\varepsilon q = \frac{LI^2}{2} + W_C(q)$ . Здесь  $I \equiv \frac{dq}{dt}$  – сила тока в катушке, а энергия поля в конденсаторе равна  $W_C(q) = \int_0^q U(q')dq' = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^q q'^2 dq' = \frac{q^3}{3\alpha^2}$ . Следовательно, изменение силы тока в процессе зарядки описывается формулой

$$I^2(q) = \frac{2}{L} q \left( \mathcal{E} - \frac{q^2}{3\alpha^2} \right). \text{ Сила тока равна нулю в начальный момент } (q = 0)$$

и в момент достижения максимальной величины заряда, поэтому  $q_m = \alpha\sqrt{3\mathcal{E}}$ . Эта величина заряда соответствует максимальному напряжению на конденсаторе, равному  $U_m = 3\mathcal{E}$ . Максимальная величина силы тока в процессе зарядки находится по максимуму функции  $I^2(q)$ . Как видно, он достигается при  $q_0 = \alpha \cdot \sqrt{\mathcal{E}}$ , и

$$I_m = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3L} \mathcal{E}^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\tau \mathcal{E}}{L}. \text{ После окончания зарядки конденсатора ток}$$

обращается в ноль, но контур не переходит в стационарное состояние, так как теперь напряжение на конденсаторе больше (в три раза) ЭДС источника, и конденсатор разряжается через источник. Закон сохранения энергии для процесса разряда  $\frac{q_m^3}{3\alpha^2} + \mathcal{E}(q - q_m) = \mathcal{E}q = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^3}{3\alpha^2}$

демонстрирует нам, что связь величины силы тока с зарядом остается прежней, только изменяется знак  $I \equiv \frac{dq}{dt}$ . Поэтому заряд конденсатора

убывает до нуля «симметричным» по сравнению с процессом зарядки образом, и в его конце напряжение на конденсаторе и сила тока в катушке опять становятся нулевыми – схема вернулась в начальное состояние, и начинается новый период колебаний. Таким образом, напряжение на конденсаторе колеблется между значениями  $U_n = 0$  и

$$U_m = 3\mathcal{E}, \text{ а сила тока – между } +I_m = +\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\tau \mathcal{E}}{L} \text{ и } -I_m = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\tau \mathcal{E}}{L}.$$

Равновесное состояние схемы соответствует  $U_0 = \mathcal{E}$  и  $I_0 = 0$ . Поэтому амплитуды (максимальные отклонения от равновесного значения) напряжения и силы тока равны  $U_a = 2\mathcal{E} = 48 \text{ В}$  и

$$I_a \equiv I_m = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\tau \mathcal{E}}{L} \approx 0,784 \text{ А}.$$

Ясно, что время зарядки конденсатора составляет половину от периода колебаний, и его можно найти, пользуясь законом изменения

силы тока:  $\frac{dq}{dt} = I = \sqrt{\frac{2}{L}} q \left( \mathcal{E} - \frac{q^2}{3\alpha^2} \right)$ . Используя соотношение

$q_m = \alpha\sqrt{3\mathcal{E}}$  и определение  $\alpha = \frac{\tau^2\sqrt{\mathcal{E}}}{2L}$ , эту формулу можно переписать

в виде  $\frac{dq}{dt} = \frac{q_m}{\tau} \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{q}{q_m} \left(1 - \frac{q^2}{q_m^2}\right)} \Rightarrow dt = \frac{4\sqrt{3}}{2} \tau \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$ , где введено

обозначение  $x = \frac{q}{q_m}$ . Ясно, что за половину периода  $x$  изменяется от 0

до 1, то есть  $\frac{T}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \tau \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$ . Подстановкой  $x = y^2$  приводим это

выражение к виду  $T = 2^4\sqrt{3}\tau \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 2^4\sqrt{3}\beta\tau \approx 6,9$  мс.

**ОТВЕТЫ:** Амплитуды колебаний  $U_a = 2\mathcal{E} = 48$  В и

$I_a = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\tau\mathcal{E}}{L} \approx 0,784$  А, период колебаний  $T = 2^4\sqrt{3}\beta\tau \approx 6,9$  мс.

**Примечание:** Так как в школьных учебниках встречаются разные варианты определения амплитуды, ответ про амплитуду напряжения засчитывается, если участник явно указал диапазон изменения напряжения (от 0 до 72 В) или привел ответ  $U_a = \frac{3}{2}\mathcal{E} = 36$  В с соответствующим обоснованием.

### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс.балл
Получено правильное выражение для энергии вариконда.	<b>1</b>
Записан закон сохранения энергии для процесса зарядки вариконда.	<b>3</b>
Получено правильное значение для максимального значения напряжения на вариконде $U_m = 3\mathcal{E}$ .	<b>2</b>
Получено правильное значение для максимальной величины силы тока $I_m = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3L}\mathcal{E}^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\tau\mathcal{E}}{L}$ .	<b>2</b>
Показано, что в процессе разряда вариконда связь величины силы тока с зарядом останется такой же, как в процессе зарядки.	<b>1</b>

Действие	Макс.балл
Правильно найдена амплитуда напряжения $U_a = 2\mathcal{E} = 48 \text{ В}$ , или указан диапазон изменения, или в качестве амплитуды указана половина ширины диапазона (формула и численное значение)	<b>1+1=2</b>
Правильно найдено численное значение амплитуды силы тока	<b>1</b>
Правильно найден период колебаний (формула* и численное значение)	<b>3+1=4</b>
<b>ВСЕГО</b>	<b>16</b>

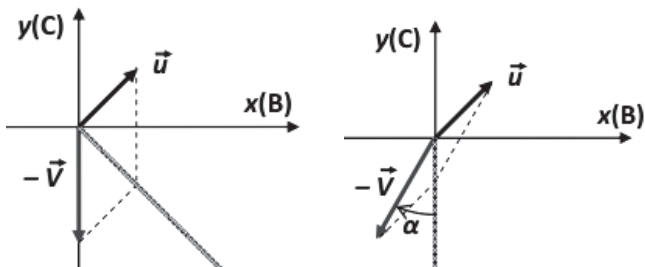
\*При арифметической ошибке в правильном по содержанию выводе формуле, в результате которой ответ отличается от правильного только на безразмерный числовой множитель, отличающийся от 1 менее чем в три раза, за формулу ставится 2 балла, численный ответ не оценивается; если безразмерный числовой множитель отличается от 1 в три и более раз, но менее, чем в 6 раз, то за формулу ставится 1 балл, численный ответ не оценивается.

## ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА для 7, 8 и 9 классов.

**1.** («Куда дует ветер?», 12 баллов) Теплоход двигался по морю, держа курс строго на север. При этом «хвост» дыма от его трубы вытянулся вдоль прямой линии, идущей от теплохода строго на юго-восток. Когда теплоход изменил свой курс, повернув на угол  $\alpha = 30^\circ$  к востоку, то линия дыма после поворота стала уходить от теплохода на юг. Отметим, что ветер не изменялся в течение всего времени наблюдений. Также постоянной оставалась и величина скорости теплохода. Определите направление ветра. Во сколько раз величина скорости ветра отличается от величины скорости теплохода?

*Возможное решение:* Обозначим величину скорости ветра символом  $u$ , а величину скорости теплохода – символом  $V$ . В первую очередь нужно отметить, что шлейф дыма вытягивается в направлении скорости ветра относительно теплохода, то есть вдоль вектора  $\vec{u} - \vec{V}$ . Поэтому, построив примерную диаграмму для первого случая (теплоход движется на север, шлейф вытягивается на юго-восток), и используя

систему координат, в которой ось  $x$  направлена на восток, а ось  $y$  – на север, замечаем, что должно быть выполнено требование  $u_y - V_y = -(u_x - V_x)$ , то есть  $u_x + u_y = V$ . Аналогичное построение для



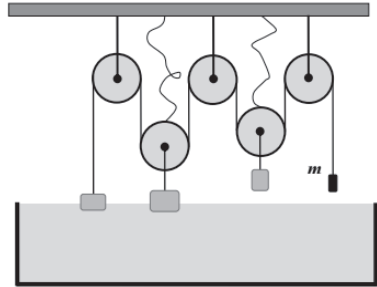
второго случая (после поворота теплохода) демонстрирует нам, что должно выполняться требование  $-V \sin(\alpha) + u_x = 0$ . Из двух полученных уравнений находим, что  $u_x = V \sin(\alpha) = V/2$  и  $u_y = V[1 - \sin(\alpha)] = V/2$ . Это означает, что ветер дует с юго-запада, и его скорость  $u = V/\sqrt{2}$ , то есть она в  $\sqrt{2}$  раз меньше скорости теплохода.

**ОТВЕТЫ:** Ветер – юго-западный, его скорость в  $\sqrt{2}$  раз меньше скорости теплохода.

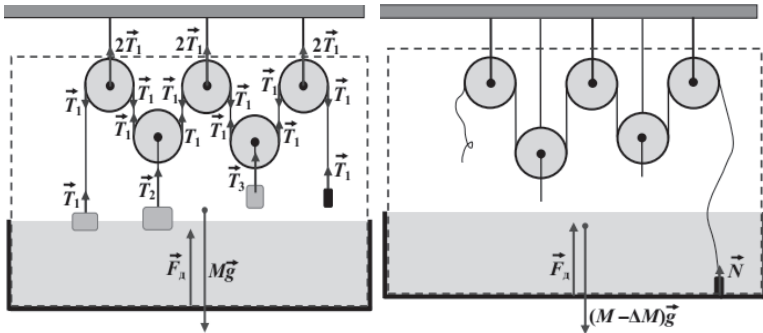
**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

Действие	Макс.балл
Указано (используется в решении), что шлейф дыма вытягивается в направлении скорости ветра относительно теплохода, то есть вдоль вектора $\vec{u} - \vec{V}$ .	3
Есть правильная векторная диаграмма (либо правильная запись соотношений для проекций векторов $\vec{u}$ , $\vec{V}$ и $\vec{u} - \vec{V}$ ) для первого случая.	2
Есть правильная векторная диаграмма (либо правильная запись соотношений для проекций векторов $\vec{u}$ , $\vec{V}$ и $\vec{u} - \vec{V}$ ) для второго случая.	2
Верно определено направление скорости ветра	3
Верно найдено отношение скоростей ветра и теплохода.	2
<b>ВСЕГО</b>	<b>12</b>

2. («До краев», 15 баллов) С помощью системы блоков над большой открытой сверху емкостью с водой подвешены три ледяных брикета и небольшой груз массой  $m = 50$  г (см. рисунок). Изначально система находится в равновесии, причем два брикета плавают в воде, а третий висит над поверхностью воды, как и груз. В этом положении вода заполняет сосуд по края. Известно, что груз изготовлен из сплава, плотность которого в  $n = 5$  раз больше плотности воды. Все нити в системе можно считать невесомыми и нерастяжимыми, все блоки – невесомые и не имеют трения в осях. Подвижные блоки «пристрахованы» невесомыми нитями, которые не позволяют этим блокам опуститься в сосуд даже при полной разгрузке системы блоков. Далее система медленно прогревается, и весь лед постепенно тает, груз медленно опускается в воду (брызг или волн, бегущих по поверхности воды, при этом не возникает). Выливающаяся через край сосуда вода покидает систему и больше не оказывает влияния на нее. Найдите массу воды, которая выльется из сосуда за все время таяния льда.



**Возможное решение:** Сначала рассмотрим равновесие системы в начальном состоянии, когда таяние льда еще не началось. Из условия равновесия груза ясно, что сила натяжения нити  $T_1 = mg$ . Укажем все внешние силы, действующие на выделенную систему (вода в сосуде + все ледяные брикеты + груз + все блоки): сила тяжести, сила реакции дна сосуда, силы натяжения трех нитей, прикрепленных к «потолку» (красные стрелки, левый рисунок). Отдельно (синие стрелки) частично указаны силы натяжения нитей – в качестве иллюстрации, объясняющей их значения. Так как в состоянии равновесия векторная сумма внешних сил должна равняться нулю, то  $6T_1 + F_{\text{д}} = Mg$ . Учтем величину силы натяжения нити и то, что сила реакции дна равна силе давления воды на дно, то есть  $F_{\text{д}} = \rho_0 SHg$ , (где  $\rho_0$  – плотность воды,  $H$  и  $S$  – высота и площадь дна сосуда) и найдем из этого уравнения, что  $M = 6m + \rho_0 SH$ .



Проведем аналогичные рассуждения для конечного состояния равновесия системы, когда весь лед уже растаял (правый рисунок). Теперь нить практически не натянута, высота столба воды осталась прежней, а размерами площади опоры груза можно пренебречь по сравнению с площадью дна сосуда. Сила реакции дна, действующая на груз, может найдена из условия равновесия груза:

$$N = mg - F_A = mg - \rho_0 \frac{m}{\rho} g = \frac{n-1}{n} mg. \text{ Здесь } \rho = n \cdot \rho_0 \text{ - плотность}$$

материала груза. Масса нашей системы уменьшилась на  $\Delta M$  за счет выливания воды из сосуда, так что

$$N + F_d = (M - \Delta M)g \Rightarrow M - \Delta M = \frac{n-1}{n} m + \rho_0 SH. \text{ Вычитая это}$$

соотношение из полученного при анализе начального состояния,

$$\text{находим, } \Delta M = \frac{5n+1}{n} m = \frac{26}{5} m = 260 \text{ г.}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \Delta M = \frac{5n+1}{n} m = \frac{26}{5} m = 260 \text{ г.}$$

### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс.балл
Правильно записано условие равновесия груза в начальном состоянии	1
Правильно найдена сила натяжения нити, на которой подвешен груз	1
Правильно найдены силы натяжения всех нитей, используемые в решении	1



Действие	Макс.балл
Правильно записано условие равновесия «системы», <b>либо</b> правильно записано выражение для объема под поверхностью жидкости через начальную массу жидкой воды, массы плавающих ледяных брикетов и массу груза	<b>2</b>
Получена формула, эквивалентная* $M = 6m + \rho_0 SH$ .	<b>2</b>
Правильно записано условие равновесия груза в конечном состоянии	<b>1</b>
Правильно найдена сила реакции дна, действующая на груз	<b>1</b>
Указано (используется в решении), что сила реакции дна, действующая на воду, практически не изменилась.	<b>1</b>
Правильно записано условие равновесия «системы», <b>либо</b> правильно записано выражение для объема под поверхностью жидкости через конечную массу жидкой воды в сосуде и массу груза	<b>1</b>
Получена формула, эквивалентная $M - \Delta M = \frac{n-1}{n} m + \rho_0 SH .$	<b>2</b>
Правильно найдена масса вылившейся воды	<b>2</b>
<b>ВСЕГО</b>	<b>15</b>

**3.** («Управляемый нагрев», 24 балла) Лабораторная электроплитка работает от источника постоянного напряжения. Регулировка мощности плитки производится с помощью регулятора напряжения источника – на панели источника есть регулятор и цифровой датчик выходного напряжения, причем максимальное возможное напряжение равно  $U_m = 200$  В. Известно, что сопротивление спирали плитки довольно существенно зависит от ее температуры. Было установлено, что при выходном напряжении источника  $U_1 = 100$  В выделяемая плиткой в установившемся режиме тепловая мощность равна  $P_1 = 854$  Вт. При повышении выходного напряжения до  $U_2 = 150$  В эта мощность увеличивается до  $P_2 = 1869$  Вт. Какова максимальная возможная мощность тепловыделения этой плитки в установившемся режиме? Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь по сравнению с сопротивлением спирали плитки. Можно также считать, что поток тепла от спирали плитки с

хорошей точностью пропорционален разности температур спирали и окружающей среды, которая практически неизменна.

**Возможное решение:** Пусть  $t_0$  – температура окружающей среды, а коэффициент пропорциональности между потоком тепла от спирали плитки и разностью температур обозначим  $\kappa$ . Температура спирали  $t$  при заданном напряжении источника  $U$  определяется из условия теплового баланса  $\frac{U^2}{R} = \kappa(t - t_0)$ . Зависимость сопротивления

спирали от температуры описывается соотношением  $R(t) = R_0(1 + \alpha t)$ , где зависящая от материала спирали константа  $\alpha$  называется температурным коэффициентом сопротивления. Выразим из этого соотношения  $t = \frac{R - R_0}{\alpha R_0}$  и запишем уравнение баланса в виде

$$\frac{\alpha R_0}{\kappa} U^2 = R[R - R_0(1 + \alpha t_0)].$$

Для сокращения записей введем обозначение  $\bar{R} \equiv R_0(1 + \alpha t_0)$ , и найдем зависимость сопротивления спирали от напряжения источника как положительный корень

получившегося квадратного уравнения: 
$$R = \frac{\bar{R}}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha R_0}{\kappa \bar{R}^2} U^2} \right].$$

Следовательно, зависимость мощности тепловыделения от напряжения источника описывается выражением 
$$P = \frac{2U^2}{\bar{R}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha R_0}{\kappa \bar{R}^2} U^2} \right]^{-1}.$$

Удобно ввести безразмерный параметр  $x \equiv \frac{U}{U_m}$ , безразмерную

константу 
$$A \equiv \frac{4\alpha R_0 U_m^2}{\kappa \bar{R}^2} = \frac{4\alpha U_m^2}{\kappa R_0(1 + \alpha t_0)^2}$$
 – комбинацию параметров

системы, и константу размерности мощности 
$$\bar{P} \equiv \frac{2U_m^2}{\bar{R}} = \frac{2U_m^2}{R_0(1 + \alpha t_0)}.$$

Тогда эта зависимость переписывается в виде 
$$P = \bar{P} \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + Ax^2}}.$$
 Две

точки этой зависимости нам известны: при  $x_1 = 1/2$  мощность равна

$$P_1 = \bar{P} \frac{1}{2(2 + \sqrt{4 + A})}, \text{ а при } x_2 = 3/4 \text{ мощность } P_2 = \bar{P} \frac{9}{4(4 + \sqrt{16 + 9A})}.$$

Разделив эти соотношения друг на друга, получаем уравнение для определения константы  $A$ :  $\frac{9P_1}{4P_2} = \frac{183}{178} = \frac{1 + \sqrt{1 + 9A/16}}{1 + \sqrt{1 + A/4}} \approx 1,028$ . Это

уравнение можно решить точно, но проще сразу заметить, что отличие от 1 здесь очень мало, и поэтому  $\frac{1 + \sqrt{1 + 9A/16}}{1 + \sqrt{1 + A/4}} \approx 1 + \frac{5}{64}A$ , то есть

$$A \approx \frac{32}{89} \approx 0,36. \text{ Значит, } P \approx \bar{P} \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + 0,36 \cdot x^2}}. \text{ Теперь по любому из}$$

двух известных значений можно определить  $\bar{P}$ :  
 $\bar{P} \approx 4[1 + \sqrt{1,09}]P_1 \approx 6982 \text{ Вт.}$  Итак,  $P \approx \frac{6982 x^2}{1 + \sqrt{1 + 0,36 \cdot x^2}} \text{ Вт,}$

максимальное значение достигается при максимальном напряжении  $U = U_m$ , то есть при  $x = 1$ :  $P_m \approx 3225 \text{ Вт.}$

**Комментарий:** Для точного расчета можно ввести переменную  $y \equiv \sqrt{1 + A/4}$ , и тогда  $\sqrt{1 + 9A/16} = \sqrt{9y^2 - 5/2}$ . Уравнение на  $y$  имеет вид  $\frac{2 + \sqrt{9y^2 - 5}}{2(1 + y)} = \frac{183}{178}$  и приводится к квадратному уравнению

$$1260y^2 - 61y - 1321 = 0. \text{ Его положительный корень } y = \frac{1321}{1260}$$

приводит к значению  $A = \frac{157441}{396900} \approx 0,397$ , то есть ошибка

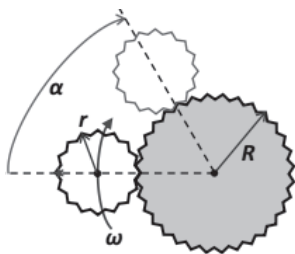
«упрощенного» подхода здесь около 10%. Значение  $\bar{P}$  с точностью до сотых долей  $\bar{P} = 4[1 + \sqrt{1 + A}]P_1 \approx 6997,38 \text{ Вт}$ , и максимальная мощность плитки в Вт с точностью до целого значения  $P_m \approx 3207 \text{ Вт}$ . Как видно, ошибка конечного результата оказалась значительно меньше (менее 1%).

**ОТВЕТ:**  $P_m \approx 3207 \text{ Вт.}$

### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс.балл
Указано (используется в решении), что зависимость сопротивления спирали от температуры описывается соотношением вида $R(t) = R_0(1 + \alpha t)$	1
Правильно записано уравнение теплового баланса	2
Получена правильная зависимость температуры или сопротивления спирали от напряжения источника	3
Зависимость мощности плитки от напряжения источника записано в виде, эквивалентном	3
$P = \frac{2U^2}{R} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha R_0}{\kappa R^2} U^2} \right]^{-1}$	
Используется процедура определения констант в этой зависимости по двум точкам	1
Найдены обе независимые константы в этой зависимости	2×3=6
Получена корректная формула, описывающая зависимость мощности плитки от напряжения источника с точностью не хуже 10%.	4
Получен численный ответ в интервале <b>3190 – 3230 Вт</b>	4
<b>ВСЕГО</b>	<b>24</b>

4. («Замечательная кривая», 24 балла) Однажды некий девятиклассник, прочитав статью «Замечательные кривые», решил построить одну из них. Закрепив на горизонтальном листе шестеренку радиуса  $R = 6$  см с мелкими зубчиками, он с помощью электромотора и специального привода стал прокатывать по ней шестеренку



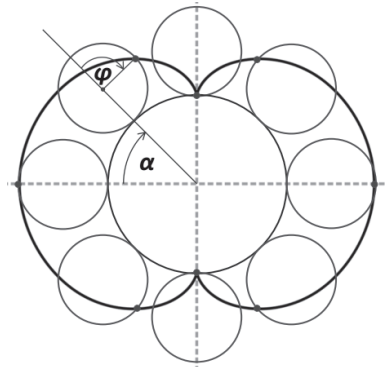
вдвое меньшего радиуса  $r = 3$  см с постоянной угловой скоростью вращения оси подвижной шестеренки вокруг неподвижной, равной  $\omega = 5 \text{ с}^{-1}$ . При этом специальная маленькая метка на краю одного из зубчиков «рисовала» на листе свою траекторию. Изобразите эту траекторию. Определите величины скорости и ускорения метки в тот момент, когда она находится на максимальном расстоянии от оси неподвижной шестеренки (см. рисунок). В дополнение найдите величины скоростей и ускорений, а также радиусы кривизны

в тот момент, когда она находится на максимальном расстоянии от оси неподвижной шестеренки (см. рисунок). В дополнение найдите величины скоростей и ускорений, а также радиусы кривизны

траектории метки в точке, соответствующей положению подвижной шестеренки, в котором направление на ее ось от оси неподвижной повернулось на угол  $\alpha = 60^\circ$  от положения с максимальным удалением метки.

**Возможное решение:** Начнем с построения траектории метки. Зацепление зубцов шестеренок обеспечивает отсутствие проскальзывания. Следовательно, длины дуг прокатившихся друг по другу «малой» и «большой» окружностей равны: если направление на ось подвижной шестеренки от оси неподвижной повернулось на угол  $\alpha$  от положения с максимальным удалением метки, то сама метка повернулась от радиуса, проведенного от оси неподвижной шестеренки на угол  $\varphi$  (см. рисунок), определяемый из соотношения  $\varphi \cdot r = \alpha \cdot R$ ,

то есть  $\varphi = \frac{R}{r} \alpha = n \alpha$ , где введено обозначение  $n \equiv \frac{R}{r}$ . При  $n = 2$  получаем  $\varphi = 2\alpha$ , и поэтому за каждый оборот центра подвижной шестеренки вокруг неподвижной метка совершает два оборота относительно радиуса – дважды уходит на максимальное расстояние и дважды касается поверхности неподвижной шестеренки. Кроме того, в точках касания неподвижной шестеренки отсутствие проскальзывания будет означать, что мгновенная скорость метки в этих точках обращается в ноль, то есть траектория перпендикулярна поверхности неподвижной шестеренки. Из этих (или подобных) рассуждений ясно, что траектория метки имеет вид, показанный на рисунке. Эту «замечательную кривую» в геометрии называют «нефроида». Для исследования кинематических характеристик движения удобно заметить, что движение метки можно рассматривать как комбинацию двух равномерных вращений: (1) вращение центра подвижной шестеренки вокруг центра неподвижной с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиуса  $R + r = \frac{n+1}{n} R$  и (2) вращение метки вокруг центра подвижной шестеренки с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  по окружности радиуса  $r = \frac{1}{n} R$ . Угловую



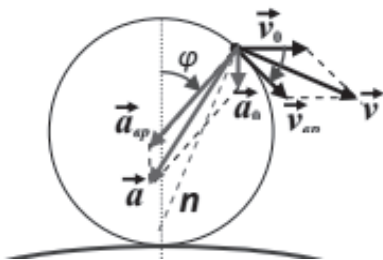
скорость второго вращения можно найти все из того же условия отсутствия проскальзывания: скорость метки в точках касания шестеренок, равная разности линейных скоростей вращения, должна быть равна нулю:  $\omega(R+r) - \Omega r = 0 \Rightarrow \Omega = (n+1)\omega$ . Тогда скорость метки в точках наибольшего удаления ее от оси неподвижной шестеренки, равная сумме линейных скоростей вращений, равна  $v_m = 2\omega(R+r) = 2\frac{n+1}{n}\omega R$ . Для данных задачи  $v_m = 0,9 \text{ м/с}$ .

Ускорение метки в этих точках тоже определяется как сумма двух центростремительных ускорений, которые оказываются сонаправлены:

$$a_m = \omega^2(R+r) + \Omega^2 r = \frac{(n+1)(n+2)}{n} \omega^2 R = 9 \text{ м/с}^2.$$

Теперь рассмотрим движение метки в окрестности момента времени, когда направление на ось подвижной шестеренки от оси неподвижной повернулось на угол  $\alpha = 60^\circ$  от положения с максимальным удалением метки.

Ясно, что скорость центра подвижной шестеренки по-прежнему направлена перпендикулярно радиусу вращения, а направление скорости метки повернулась от этого направления на угол  $\varphi = n\alpha$ .



Поэтому вектор скорости метки равен сумме между которыми  $\varphi = n\alpha$ . Ясно, что модуль суммарного вектора

$$v(\alpha) = 2\frac{n+1}{n}\omega R \left| \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right) \right| = 0,45 \text{ м}$$

/с. Точно также ускорения этих составляющих движений, которые в точке максимального удаления были сонаправлены, теперь образуют угол  $\varphi = n\alpha$  при тех же модулях  $\omega^2(R+r) = \frac{n+1}{n}\omega^2 R$  и

$\Omega^2 r = \frac{(n+1)^2}{n} \omega^2 R$ . Значит, величина ускорения (согласно теореме косинусов):

$$a(\alpha) = \sqrt{\omega^4(R+r)^2 + \Omega^4 r^2 + 2\omega^2 \Omega^2 (R+r)r \cos(\varphi)} = \frac{n+1}{n} \omega^2 R \sqrt{1 + (n+1)^2 + 2(n+1)\cos(n\alpha)}.$$

Для нашей задачи  $a(\alpha) = 3\omega^2 R \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos(2\alpha)} \approx 5,95 \text{ м/с}^2$ . Для определения радиуса кривизны траектории метки в этой точке можно воспользоваться формулой  $R_K = \frac{v^2}{a_n}$ , но для этого нам необходимо найти центростремительную (перпендикулярную скорости) компоненту ее ускорения

$$a_n = \frac{n+1}{n} \omega^2 R \left| \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + (n+1) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right| = \frac{(n+1)(n+2)}{n} \omega^2 R \left| \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right) \right|$$

(ось нормали проходит по биссектрисе угла, образованного ускорениями движений (1) и (2)). Таким образом,

$$R_K = \frac{4(n+1)}{n(n+2)} \left| \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right) \right| R = \frac{3}{4} R = 4,5 \text{ см.}$$

**ОТВЕТЫ:** траектория – на рисунке,  $v_m = 2 \frac{n+1}{n} \omega R = 0,9 \text{ м/с}$ ,

$$a_m = \frac{(n+1)(n+2)}{n} \omega^2 R = 9 \text{ м/с}^2, \quad v(\alpha) = 2 \frac{n+1}{n} \omega R \left| \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right) \right| = 0,45 \text{ м/с},$$

$$a(\alpha) = 3\omega^2 R \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos(2\alpha)} \approx 5,95 \text{ м/с}^2,$$

$$R_K = \frac{4(n+1)}{n(n+2)} \left| \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right) \right| R = 4,5 \text{ см.}$$

### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

Действие	Макс. балл
Правильно изображена траектория метки: <ul style="list-style-type: none"> <li>• правильный общий вид кривой – нужное количество «арок» между точками касания, замкнутость;</li> <li>• правильный угловой размер «арки» эпициклоиды;</li> <li>• есть правильные «изломы» в точках касания.</li> </ul>	2+2+1=5
Записана (используется в решении) правильная связь углов поворота ( $\varphi = n\alpha$ ) в общем виде или для выбранного $n$ .	2
Используется идея комбинирования двух равномерных вращений для описания движения метки.	2

Действие	Макс. балл
Найдена (используется в решении) правильная связь угловых скоростей комбинируемых вращений – в общем виде или для выбранного $n$ .	2
Правильно найдена величина скорости метки в максимально удаленной точке ( $v_m = 0,9 \text{ м/с}$ )	2
Правильно найдена величина ускорения метки в максимально удаленной точке ( $a_m = 9 \text{ м/с}^2$ )	2
Правильно найдена величина скорости метки в точке с $\alpha = 60^\circ$ ( $v = 0,45 \text{ м/с}$ )	2
Правильно найдена величина ускорения метки в точке с $\alpha = 60^\circ$ ( $a \approx 5,95 \text{ м/с}^2$ )	3
Правильно найден радиус кривизны траектории в точке с $\alpha = 60^\circ$ ( $R_K = 4,5 \text{ см}$ )	4
<b>ВСЕГО</b>	<b>24</b>

2021/22 учебный год

## ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Задания заключительного этапа олимпиады «Покори Воробьевы Горы!» по физике – олимпиадные задания высокого уровня сложности по основным темам школьной программы (механика, молекулярная физика, электродинамика и – для старших классов – оптика). Каждое задание состоит из «предварительного» вопроса, тестирующего понимание физических процессов и знание принципов их теоретического описания, и основной задачи. Максимальная оценка ответа на предварительный вопрос – 5 баллов, максимальная оценка за задачу – 20 баллов.

### 10 и 11 классы: БИЛЕТ № 03

#### Задание 1:

**Вопрос:** Гантель из двух маленьких шариков, соединенных прямым жестким стержнем длиной  $L = 60 \text{ см}$ , скользит по ровной поверхности. В некоторый момент времени один из шариков движется со скоростью  $v = 1,5 \text{ м/с}$  под углом  $60^\circ$  к





стержню, а скорость другого направлена под углом  $30^\circ$  к стержню. Найти угловую скорость вращения гантели в этот момент времени.

**Задача:** Кот Леопольд добрался до середины длинной лестницы, один из концов которой опирался о горизонтальный пол, а другой – о стену, составляющую с полом прямой двугранный угол, и остановился передохнуть. В этот момент мыши потащили нижний конец лестницы от стены с постоянным ускорением  $a_0$ . Найти скорость  $\vec{v}$  и ускорение  $\vec{a}$

кота Леопольда в момент времени  $t = \sqrt{\frac{L}{2a_0}}$  (время отсчитывается от

начала движения лестницы,  $L$  – длина лестницы), когда лестница проходила положение, в котором она составляла угол  $\alpha = 45^\circ$  с полом.

**Ответ на вопрос:** Описанная гантель является твердым телом, совершающим плоскопараллельное движение. Проекция скоростей двух точек твердого тела на соединяющую их прямую обязательно должны быть одинаковы, поэтому для шариков А ( $v_A = v$ ) и В:

$v_A \cos(60^\circ) = v_B \cos(30^\circ) \Rightarrow v_B = v / \sqrt{3}$ . Ясно, что за малый интервал времени все точки такого тела должны поворачиваться на один и тот же угол, поэтому угловую скорость твердого тела можно считать характеристикой, относящейся ко всему телу. Скорости А и В можно представить как сумму скоростей поступательного движения ( $\vec{v}_{пост}$

одинакова для всех точек тела) и вращательного движения:

$\vec{v}_A = \vec{v}_{пост} + \vec{v}_{Aвр}$  и  $\vec{v}_B = \vec{v}_{пост} + \vec{v}_{Bвр}$ , и поэтому

$|\vec{v}_A - \vec{v}_B| = |\vec{v}_{Aвр} - \vec{v}_{Bвр}|$ . Модуль каждой из вращательных скоростей

равен произведению величины угловой скорости на радиус, а угол между векторами вращательных скоростей  $\varphi$  равен углу между радиусами. Поэтому

$$|\vec{v}_{Aвр} - \vec{v}_{Bвр}| = \sqrt{v_{Aвр}^2 + v_{Bвр}^2 - 2v_{Aвр}v_{Bвр}\cos(\varphi)} = \omega\sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_Ar_B\cos(\varphi)} = \omega l_{AB} = \omega L.$$

Таким образом,  $\omega = \frac{|\vec{v}_A - \vec{v}_B|}{L}$ . В нашем случае для шариков, скорости

которых взаимно перпендикулярны,  $\omega = \frac{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}}{L} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{v}{L} \approx 2,9$  рад/с.

**Примечание:** У твердого тела существует мгновенный центр (мгновенная ось) вращения. При плоском движении его можно найти как

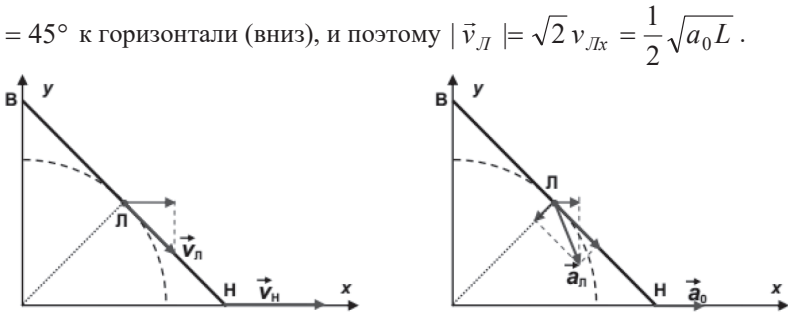
точку пересечения перпендикуляров к скоростям двух точек. Поэтому МЦВ гантели находится на расстоянии  $r_A = L \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} L$  от шарика А. Значит, угловая скорость вращения гантели  $\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{v}{L} \approx 2,9$  рад/с. Такой метод обоснования ответа в данном вопросе также допустим.

**Решение задачи:** Поскольку Леопольд (точка Л) находится на середине лестницы, то его координата в проекции на горизонтальную ось  $x$  он всегда равна половине координаты нижнего конца (Н), который движется с постоянным ускорением от нулевой начальной скорости. Поэтому проекции на эту ось его скорости и ускорения известны:

$v_{Лx} = \frac{1}{2} v_H = \frac{a_0 t}{2}$ ,  $a_{Лx} = \frac{1}{2} a_H \equiv \frac{a_0}{2}$ . С другой стороны, в процессе движения расстояние между Л и вершиной угла неизменно и равно  $L/2$ ,

то есть Леопольд движется по окружности (см. рисунок), и его скорость направлена по касательной к этой окружности. В указанный момент времени  $v_{Лx} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_0 L}{2}}$ , вектор скорости Л направлен под углом

$\alpha = 45^\circ$  к горизонтали (вниз), и поэтому  $|\vec{v}_{Л}| = \sqrt{2} v_{Лx} = \frac{1}{2} \sqrt{a_0 L}$ .



Ускорение Леопольда можно разложить в сумму касательного и центростремительного ускорений, причем величина

центростремительного ускорения  $a_n = \frac{v_L^2}{L/2} = \frac{a_0}{2}$ . Значит, проекция на

ось  $x$  касательного ускорения  $a_{\tau x} = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}} a_0 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} a_0$ .

Следовательно,  $a_\tau = \sqrt{2}a_{\tau x} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}a_0$ , и

$|\vec{a}_{Л}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_0\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$ . Направление вектора

ускорения кота Леопольда можно задать величиной угла его наклона к вертикали:

$\sin(\beta) = \frac{a_{Лx}}{|\vec{a}_{Л}|} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ . Некоторые участники могут даже заметить

(из геометрии или тригонометрии), что это в точности угол

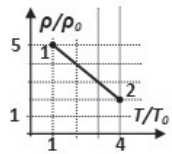
$$\beta = \frac{\pi}{8} \text{ рад} = 22,5^\circ.$$

**Ответ:**  $|\vec{v}_{Л}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_0L}$ , эта скорость направлена вдоль лестницы (вниз),

$|\vec{a}_{Л}| = a_0\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$ , ускорение направлено под углом

$\beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right) = \frac{\pi}{8} \text{ рад} = 22,5^\circ$  к вертикали (вправо-вниз по

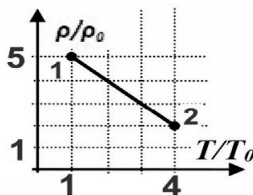
рисунку).



## Задание 2:

**Вопрос:** Температура с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Абсолютная шкала температур.

**Задача:** Постоянное количество гелия участвует в процессе, диаграмма которого в координатах плотность газа – температура изображается участком прямой (см. рисунок). Во сколько раз максимальное давление гелия в этом процессе больше минимального? Координаты точки 1: (1;5), точки 2: (4;2).



**Ответ на вопрос:** Исходно температура определялась эмпирически как «мера нагретости» тела. Для измерения температуры тела оно приводится в тепловое равновесие с термометром – стандартным телом с индикацией температуры, проградуированным в соответствии с некоторой температурной шкалой по двум «реперным» точкам. Например, для градуировки термометра по шкале Цельсия температура плавления льда при нормальном атмосферном давлении принимается за  $0^{\circ}\text{C}$ , а температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении принимается за  $100^{\circ}\text{C}$ . Между этими точками шкала разделяется на градусы равномерно, и от них в обе стороны распространяется с таким же шагом. В рамках МКТ прекращение (в среднем) обмена энергией между молекулами тела и термометра при соударениях означает, что средние кинетические энергии молекул совпадают. Поэтому температура тела в любой разумной шкале должна быть монотонной функцией от средней кинетической энергии его молекул  $t = f(\bar{E}_K)$ . Значит, и сама  $\bar{E}_K$  может рассматриваться как температура, измеренная по некоторой шкале (такую температуру называли «термодинамической»). При использовании газовых термометров было обнаружено, что изменение объема газа с хорошей точностью является линейной функцией его температуры по шкале Цельсия, причем для разных количеств разных газов при экстраполяции графиков в область «очень низких» температур температура обращения объема в ноль оказывается примерно одинаковой – около  $t_0 = -273^{\circ}\text{C}$ . Эта температура была названа «абсолютным нулем», и была введена в использование абсолютная шкала температур (шкала Кельвина), в которой начало отсчета  $T \equiv 0\text{ K}$  совмещалось с абсолютным нулем, а один градус этой шкалы приравнен к градусу шкалы Цельсия. С точки зрения МКТ абсолютный ноль интерпретируется как температура, при которой прекращается тепловое движение молекул. Изучение свойств газов и развитие статистических методов позволило установить, что термодинамическая и абсолютная температура для любого вещества пропорциональны друг другу: в соответствии с тепловой теоремой Больцмана, в состоянии теплового равновесия при абсолютной температуре  $T$  в молекулярной системе на каждую степень свободы молекулы в среднем приходится энергия, равная  $\frac{kT}{2}$ , где постоянная Больцмана  $k$  выражается через универсальную газовую постоянную и число Авогадро  $k = \frac{R}{N_A}$ . Сейчас

известно, что молекулы являются квантовыми объектами – их движение не описывается корректно законами механики Ньютона, и на самом деле состояние покоя для них невозможно. Поэтому состояние вещества с температурой, равной абсолютному нулю, определенное как состояние с неподвижными молекулами, принципиально невозможно.

**Решение задачи:** Используя для гелия приближение идеального газа, можно выразить его давление через плотность и температуру:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{\mu} = \frac{R\rho_0 T_0}{\mu} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0}.$$

Из вида диаграммы (с учетом информации из условия) можно установить, что ее уравнение – это  $p/\rho_0 = 6 - T/T_0$ . Значит, зависимость давления гелия от его температуры

$$\text{в данном процессе описывается выражением } p = \frac{R\rho_0 T_0}{\mu} \frac{T}{T_0} \left( 6 - \frac{T}{T_0} \right).$$

Ясно, что это квадратичная зависимость (график – парабола ветвями вниз), и ее максимум лежит посередине между корнями, то есть в точке  $T/T_0 = 3$ . Значит, максимальное значение давления в этом процессе,

равное  $p_{\max} = 9 \frac{R\rho_0 T_0}{\mu}$ , достигается внутри интервала изменения

температуры. Ясно (при удалении в обе стороны от этой точки давление падает), что минимальное значение достигается на одной из границ

интервала. Сравнивая  $p_1 = 5 \frac{R\rho_0 T_0}{\mu}$  и  $p_2 = 8 \frac{R\rho_0 T_0}{\mu}$ , находим, что

$$p_{\min} = p_1 = 5 \frac{R\rho_0 T_0}{\mu}. \text{ Таким образом, } \frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

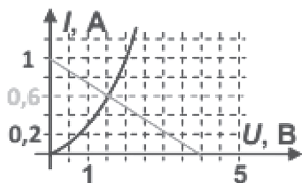
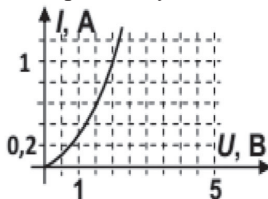
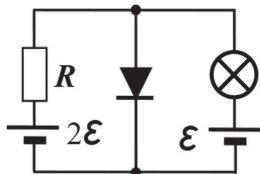
**Ответ:**  $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{9}{5} = 1,8.$

### Задание 3:

**Вопрос:** Какой будет сила тока, текущего через диод, ВАХ (вольт-амперная характеристика) которого изображена в задаче на рисунке справа, если его подключить к источнику с ЭДС 4 В и внутренним сопротивлением 4 Ом?

**Задача:** На рисунке слева показана схема с диодом, ВАХ которого в открытом состоянии

изображена на рисунке справа. У лампы ВАХ описывается выражением  $I = I_0 \cdot \sqrt{\frac{U}{\mathcal{E}}}$ , где  $I_0 = 0,5$  А. Внутренние сопротивления обоих источников пренебрежимо малы, величина  $\mathcal{E} = 5$  В, сопротивление резистора  $R = 20$  Ом. Найдите мощность, потребляемую диодом.

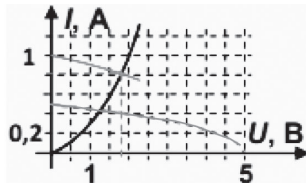
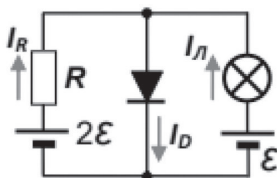


**Ответ на вопрос:** Напряжение на диоде при таком подключении равно напряжению на источнике, то есть  $U_D = \mathcal{E} - Ir$ . Следовательно, ток через диод и напряжение на нем определяются пересечением графика ВАХ диода с «нагрузочной прямой» источника, определяемой выражением

$$I = \frac{\mathcal{E} - U_D}{r}. \text{ Выполнив построение, находим, что } I_D \approx 0,6 \text{ А.}$$

**Решение задачи:** Пусть  $U$  – напряжение на диоде. Положительные направления токов в схеме выберем так, как показано на рисунке слева. Зависимость силы тока через диод от напряжения на нем задается некоторой функцией, график которой – это вольтамперная характеристика. Обозначим ее  $I_D = f(U)$ . Тогда напряжение на лампе

$$U_{\text{л}} = \mathcal{E} - U, \text{ и поэтому } I_{\text{л}} = I_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{U}{\mathcal{E}}}.$$



Кроме того, по закону Ома для участка цепи с ЭДС

$$U = 2\mathcal{E} - I_R R \Rightarrow I_R = \frac{2\mathcal{E} - U}{R}. \text{ Учитывая, что по закону}$$

непрерывности тока  $I_D = I_L + I_R$ , получим уравнение для определения

$$U: f(U) = \frac{2\varepsilon - U}{R} + I_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{U}{\varepsilon}}. \text{ Так как функция } f \text{ задана нам}$$

графически, то и решать это уравнение нужно графически. Для этого построим график функции из правой части уравнения (пунктиром показаны графики прямой и параболы, построенные для обоих слагаемых в этой части, красной линией – требуемый график). Затем найдем точку пересечения этого графика с графиком  $I = f(U)$  (см. рисунок справа). Как видно,  $U \approx 1,77 \text{ В}$  и  $I_D \approx 0,81 \text{ А}$ . Следовательно, мощность, потребляемая диодом в этой схеме  $P_D = UI_D \approx 1,43 \text{ Вт}$ .

**Ответ:**  $P_D \approx (1,43 \pm 0,02) \text{ Вт}$  (зачетный диапазон для численного ответа: от 1,38 Вт до 1,48 Вт, и для частичного зачета – от 1,34 Вт до 1,53 Вт).

**Комментарий:** Конечно, графическое решение по «нарисованному» графику предполагает некоторый разброс ответов. Но в действительности для нахождения корня уравнения с хорошей точностью достаточно было нанести на график три точки для правой части уравнения в окрестности корня с «удобными» для расчета числами, например, при  $U = 1 \text{ В}$  ( $I \approx 0,9 \text{ А}$  с высокой точностью и считается без калькулятора),  $U = 1,8 \text{ В}$  ( $I = 0,81 \text{ А}$ , считается без калькулятора, причем эта точка на графике лежит очень близко «справа» от ВАХ диода и сама по себе уже попадает в «узкий» зачетный диапазон -  $P_D = 1,458 \text{ Вт}$ , так что можно считать это значение гарантированным ограничением «сверху» на значение мощности!) и  $U = 2,5 \text{ В}$  ( $I \approx 0,73 \text{ А}$  с высокой точностью и считается без калькулятора всяким, кто помнит значение  $\sqrt{2}$  или  $\sqrt{1/2}$ ), провести через эти три точки кривую и посмотреть пересечение с ВАХ диода – все, кто так делал во время «тестирования», получали (не зная ответа) ответ в диапазоне от 1,40 Вт до 1,45 Вт.

**PS:** ВАХ диода – не парабола. По построению это участок дуги эллипса. Но для решения это неважно. Аккуратная аппроксимация нарисованной кривой параболой по трем точкам приводит к ответам 1,45-1,46 Вт, но заметно усложняет расчеты. Аппроксимация параболой по двум точкам не вполне корректна.

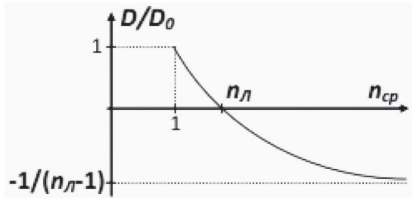
#### Задание 4:

**Вопрос:** Как изменится (по сравнению со значением в воздухе) оптическая сила тонкой линзы, если погрузить ее в прозрачную жидкость, показатель преломления которой больше, чем у воздуха?

**Задача:** Тонкая плосковыпуклая линза немного погружена в воду своей горизонтальной плоской стороной (выпуклая поверхность линзы находится в воздухе). На линзу падает сверху узкий вертикальный пучок света, ось которого проходит точно через вершину выпуклой поверхности. Этот пучок фокусируется в воде на глубине  $h = 20$  см. Оптическая сила линзы в воздухе  $D = 7$  дптр. Найти показатель преломления воды.

**Ответ на вопрос:** В рамках приближения тонкой линзы оптическая сила линзы, помещенной в однородную среду, определяется формулой

$D = (n - 1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , где  $n = \frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{ср}}}$  – показатель преломления вещества



линзы относительно окружающей среды, а радиусы поверхностей линзы  $R_{1,2}$  считаются положительными для выпуклой поверхности и отрицательными для вогнутой\*. Показатель преломления воздуха можно считать равным 1, так что отношение

оптической силы линзы в среде к ее оптической силе в воздухе  $D_0$  равно

$\frac{D}{D_0} = \frac{n_{\text{л}} - n_{\text{ср}}}{n_{\text{ср}}(n_{\text{л}} - 1)}$ . Как видно, при  $1 < n_{\text{ср}} < n_{\text{л}}$  оптическая сила линзы

убывает по модулю, сохраняя тот же знак, что и в воздухе, при  $n_{\text{ср}} = n_{\text{л}}$  оптическая сила обращается в ноль, а при  $n_{\text{ср}} > n_{\text{л}}$  оптическая сила меняет знак (то есть собирающая линза превращается в рассеивающую и наоборот), а по модулю растет, и для  $n_{\text{ср}} \gg n_{\text{л}}$  оптическая сила

$D \approx -\frac{D_0}{n_{\text{л}} - 1}$ . Можно описать все эти изменения с помощью графика (см.

рисунок).

\*Ответ не обязательно обосновывать с помощью этой формулы. Достаточно указать, что оптическая сила тонкой линзы линейно зависит от



показателя преломления ее вещества относительно среды (это можно легко обосновать, если сослаться на закон преломления и использование параксиального приближения, хотя само обоснование не является необходимым для участника) и обращается в ноль при совпадении его с 1. Ясно, что это приводит к выводу, что  $D = C \cdot (n - 1)$ , где  $C$  зависит только от геометрических параметров линзы, и этого достаточно для построения ответа.

**Решение задачи:** Из условия ясно, что ось пучка совпадает с главной оптической осью линзы и пучок является параксиальным (угол падения крайнего луча на выпуклую поверхность линзы, как и угол преломления его для плоской поверхности, малы). Преломление луча на выпуклой поверхности и ход луча внутри линзы не зависит от того, погружена плоская сторона в воду или нет, поэтому крайний луч в обоих случаях выйдет из линзы в одной и той же точке (обозначим расстояние от этой точки до оси  $r$ ) и попадет в фокус линзы, то есть в воздухе он пересечет оптическую ось на расстоянии  $F = 1/D$  от линзы, а в воде – на расстоянии  $h$ . Поэтому тангенс угла преломления этого луча для плоской

поверхности равен  $tg(\beta) = \frac{r}{F} = Dr$  в воздухе и  $tg(\beta') = \frac{r}{h}$  в воде. Для малых углов ( $r \ll F$ ) тангенсы примерно равны самим углам в радианной мере, как и синусы, поэтому  $\frac{tg(\beta')}{tg(\beta)} = \frac{1}{Dh} \approx \frac{\sin(\beta')}{\sin(\beta)}$ . С другой

стороны, по закону преломления:  $\sin(\beta') = \frac{n_{л}}{n} \sin(\alpha)$ ,

$\sin(\beta) = n_{л} \sin(\alpha)$ , где  $n_{л}$  – показатель преломления материала линзы,  $n$  – воды, а  $\alpha$  – одинаковый в обоих случаях угол падения крайнего луча на плоскую поверхность (показатель преломления воздуха мы приняли равным 1). Следовательно,  $n \approx Dh = 1,4$ .

**Ответ:**  $n \approx Dh = 1,4$ .

## 7, 8 и 9 классы: БИЛЕТ № 12

### Задание 1.

**Вопрос:** Рассмотрите разгон по горизонтальной прямой дороге автомобиля с нейтральным аэродинамическим профилем (при его движении сила, действующая на него со стороны воздуха, не имеет ни подъемной, ни прижимающей к дороге компоненты), для которого сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату его скорости относительно воздуха. В безветренную погоду он может разогнаться до скорости 100 км/ч, и на такой скорости колеса автомобиля уже проскальзывают. До какой скорости сможет разогнаться этот автомобиль, если мощность его двигателя увеличить на 20% (при тех же форме и размерах корпуса и массе автомобиля)? Считайте, что КПД двигателя от скорости не зависит.

**Задача:** У модели самолета винт установлен на носу корпуса, и сила его тяги направлена «вперед» вдоль корпуса. Силу взаимодействия корпуса модели с воздухом при движении со скоростью, направленной вдоль корпуса, можно разложить на две компоненты: силу лобового сопротивления, направленную против скорости модели, и подъемную силу крыльев, направленную «вверх» перпендикулярно плоскости крыльев (она всегда параллельна оси корпуса). Величины обеих компонент пропорциональны квадрату скорости самолета относительно воздуха (коэффициенты пропорциональности – постоянные величины для данной конструкции модели). Для горизонтального полета по прямой в безветренную погоду модели необходимо двигаться со скоростью  $v_0 = 10 \text{ м/с}$ , и при этом двигатель модели должен развивать мощность, равную 51,2% от максимальной. Найдите радиус окружности, по которой будет лететь эта модель в горизонтальной плоскости при максимальной мощности двигателя (в отсутствие ветра). Ускорение свободного падения  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ .

**Ответ на вопрос:** Максимальная скорость останется равной примерно 100 км/ч. Здесь важно обратить внимание, что на максимальной скорости колеса автомобиля проскальзывают. В этом режиме сила трения ведущих колес о поверхность дороги уравнивает силу сопротивления воздуха, а сама сила трения является силой трения скольжения – практически не зависит от скорости и примерно равна  $\mu mg$ , то есть она не изменяется при изменении мощности двигателя без изменения массы автомобиля. Поскольку форма и размеры корпуса автомобиля не изменились, то коэффициент пропорциональности  $k$  между величиной

силы сопротивления и квадратом скорости не изменяется. Значит, максимальная скорость, определяемая условием  $\mu mg = kv_{\max}^2$ , практически не изменится при увеличении мощности – увеличится лишь угловая скорость вращения колес, что приведет к более сильному проскальзыванию и более интенсивному разогреву и износу шин.

**Решение задачи:** Пусть, согласно условию, величина силы лобового сопротивления при скорости модели  $v$  относительно воздуха  $F_c = k \cdot v^2$ , а величина подъемной силы  $F_n = \gamma \cdot v^2$ , где  $k$  и  $\gamma$  – постоянные для данной модели величины. При горизонтальном полете по прямой в безветренную погоду с постоянной скоростью подъемная сила уравнивает силу тяжести модели  $\gamma v_0^2 = mg \Rightarrow \gamma = mg/v_0^2$ , а сила тяги двигателя уравнивает силу лобового сопротивления  $F_m = kv_0^2$ . Мощность, развиваемая двигателем (полезная мощность) равна  $P = F_m v_0 = kv_0^3 = 0,512 \cdot P_{\max}$ , откуда находим, что  $k = 0,512 \cdot \frac{P_{\max}}{v_0^3}$ .

При полете по горизонтальной окружности с постоянной расходуемой мощностью модуль скорости тоже должен быть постоянен – сила тяги двигателя, направленная по касательной к окружности, по-прежнему уравнивает силу лобового сопротивления, и  $P_{\max} = kv^3 = 0,512 \cdot P_{\max} (v/v_0)^3$ . Значит, величина скорости модели при

таком полете  $v = \frac{1}{\sqrt[3]{0,512}} v_0 = \frac{5}{4} v_0$ . Ясно, что подъемная сила

увеличилась:  $F_n = \gamma \cdot v^2 = \frac{25}{16} \gamma v_0^2 = \frac{25}{16} mg$ , но ее вертикальная

компонента по-прежнему уравнивает силу тяжести. Поэтому при полете по окружности на такой скорости модель должна повернуть плоскость крыльев так, чтобы она составляла угол  $\alpha$  с горизонтом (а подъемная сила при этом отклонится на угол  $\alpha$  от вертикали), причем

$F_n \cdot \cos(\alpha) = \frac{25}{16} mg \cdot \cos(\alpha) = mg \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{16}{25}$ . Заметим, что

$\sin(\alpha) = \frac{3\sqrt{41}}{25}$ . Горизонтальная компонента подъемной силы должна

создавать центостремительное ускорение:

$$F_n \cdot \sin(\alpha) = \frac{25}{16} mg \cdot \frac{3\sqrt{41}}{25} = m \frac{v^2}{R} = m \frac{25}{16} \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{25}{3\sqrt{41}} \frac{v_0^2}{g} \approx 13 \text{ м.}$$

**Ответ:**  $R = \frac{25}{3\sqrt{41}} \frac{v_0^2}{g} \approx 13 \text{ м.}$

## Задание 2.

**Вопрос:** Как изменится температура плавления льда, если добавить к нему поваренной соли? Приведите пример известного Вам явления, подтверждающего Ваш ответ.

**Задача:** В три одинаковых стакана с толстыми стенками, в которых налили одинаковые количества горячей воды, после установления равновесия бросают одинаковые кубики мокрого льда (то есть покрытые очень тонким слоем воды, находящейся в равновесии со льдом). В первый стакан бросили один кубик, и после повторного установления равновесия температура в нем оказалась равна  $t_1 = 42,5^\circ\text{C}$ . Во второй стакан бросили два кубика, и установившаяся температура воды в этом стакане  $t_2 = 25,0^\circ\text{C}$ . Какой будет установившаяся температура воды в третьем стакане, в который бросили три кубика? Изначально стаканы имели комнатную температуру. Удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда в кубиках  $\lambda = 336$  кДж/кг. Теплообменом с окружающими телами и испарением воды пренебречь.

**Ответ на вопрос:** При добавлении поваренной соли молекулы соли диссоциируются (распадаются на ионы, собирающие около себя молекулы воды), и ионы натрия и хлора, взаимодействуя с молекулами воды, способствуют разрушению структуры ледяных кристаллов. В результате температура плавления льда при том же внешнем давлении понижается. В качестве примера явления, в котором этот эффект проявляется, можно привести известный школьный демонстрационный опыт, когда мокрую кастрюлю с влажным снегом ставят на картонку, снег солят и интенсивно перемешивают. Температура плавления льда уменьшается, и ледяные кристаллы снега плавятся, забирая у окружающих тел теплоту плавления, и в результате содержимое кастрюли становится жидким, а она сама настолько охлаждается, что

примерзает к картонке. Другой пример – использование соли (и других веществ, способных к диссоциации на ионы в воде) в качестве антиобледенителей, которыми посыпают дороги и тротуары зимой – лед на дорогах после такого посыпания тает даже при температуре ниже  $0^{\circ}\text{C}$ .

**Решение задачи:** Нам изначально неизвестно, какую температуру имели стаканы с водой перед добавлением туда кубиков (ясно только, что, поскольку стаканы имели перед наливанием воды комнатную температуру, а вода была горячей, то после установления равновесия температура явно была больше  $0^{\circ}\text{C}$  и меньше  $100^{\circ}\text{C}$ ) – обозначим эту температуру  $t_0$ . Так как лед в кубиках был «мокрый», то его температура равнялась  $0^{\circ}\text{C}$ . Поэтому после добавления кубиков лед плавился, и образовавшаяся вода нагревалась до равновесной температуры за счет охлаждения стакана с изначально жидкой водой до той же температуры. Запишем уравнение теплового баланса для стакана, в который добавили один кубик (обозначим  $C$  – теплоемкость стакана вместе с водой,  $m$  – массу одного

кубика):  $C(t_0 - t_1) = \lambda m + cmt_1$ . Аналогичное уравнение для стакана с двумя добавленными кубиками  $C(t_0 - t_2) = 2\lambda m + 2cmt_2$ .

Вычитая из второго уравнения первое, находим, что  $C(t_1 - t_2) = mc\left(\frac{\lambda}{c} + 2t_2 - t_1\right) \Rightarrow C = mc\frac{T + 2t_2 - t_1}{t_1 - t_2}$ , где введено обозначение  $T \equiv \lambda/c = 80^{\circ}\text{C}$ . Видно, что  $C = 5mc$ . С другой стороны,

если разделить эти равенства друг на друга, получим  $\frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_2} = \frac{1}{2} \frac{T + t_1}{T + t_2}$ .

Из этого уравнения можно определить  $t_0 = \frac{t_1 t_2 + T(2t_1 - t_2)}{T + 2t_2 - t_1} = 67^{\circ}\text{C}$ .

Теперь мы можем записать уравнение теплового баланса для стакана с тремя кубиками:  $C(t_0 - t_3) = 3\lambda m + 3cmt_3$ . Подставляя в него найденные выражения для  $C$  и  $t_0$ , находим:

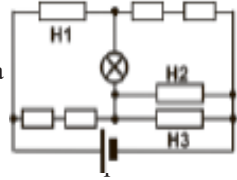
$$t_3 = \frac{t_1 t_2 + T(2t_2 - t_1)}{T + 2t_1 - t_2} = 11\frac{7}{8}^{\circ}\text{C} = 11,875^{\circ}\text{C}.$$

**Ответ:**  $t_3 = \frac{ct_1t_2 + \lambda(2t_2 - t_1)}{\lambda + c(2t_1 - t_2)} = 11\frac{7}{8}^\circ\text{C} = 11,875^\circ\text{C}.$

### Задание 3.

**Вопрос:** Сформулируйте закон Джоуля–Ленца.

**Задача:** Три одинаковых нагревательных элемента Н подключены к аккумулятору вместе с сигнальной лампочкой и четырьмя одинаковыми резисторами по схеме, показанной на рисунке. Известно, нагревательного элемента в  $n = 5$  раз больше сопротивления резистора. Нагревательный элемент Н1 потребляет мощность  $P_1 = 972$  Вт. Каковы мощности потребления элементов Н2 и Н3?



**Ответ на вопрос:** Согласно закону Джоуля–Ленца, мощность, потребляемая элементом электрической цепи, через который течет ток с силой  $I$  при напряжении на этом элементе  $U$ , равна  $P = U \cdot I$ . Этот закон связан с тем, что работа электростатических сил по перемещению заряда  $\Delta q$  через наш элемент за время  $\Delta t$  равна  $\Delta A = U \cdot \Delta q$ , в то время как  $\Delta q = I \cdot \Delta t$ . В результате действительно, потребляемая элементом мощность  $P = \Delta A / \Delta t = U \cdot I$ . Для элемента, для которого справедлив закон Ома,  $I = U/R$ , где  $R$  – постоянное сопротивление данного элемента. С учетом этого потребляемую мощность можно выразить еще двумя способами:  $P = U \cdot I = I^2 R = U^2 / R$ .

**Решение задачи:** Пусть  $R$  – сопротивление резистора и соответственно  $nR$  – сопротивление нагревательного элемента. Обозначим  $I_1$  силу тока через Н1, а очевидно одинаковые силы токов через Н2 и Н3  $I_2$ . Пусть также  $I'_1$  – это сила тока через «нижнюю» (по схеме) пару резисторов, а  $I'_2$  – через «верхнюю». Тогда можно заметить, что силу тока в ветви с источником можно выразить двумя способами:  $I_{ист} = I_1 + I'_1 = 2I_2 + I'_2$ . Двумя способами можно выразить и напряжение на ветви с источником:  $U_{ист} = nRI_1 + 2RI'_2 = 2RI'_1 + nRI_2$ , откуда  $nI_1 + 2I'_2 = 2I'_1 + nI_2 \Rightarrow \frac{n}{2}I_1 - I'_1 = \frac{n}{2}I_2 - I'_2$ . Складывая последнее уравнение с полученным из

выражения для тока, приходим к соотношению  $\frac{n+2}{2}I_1 = \frac{n+4}{2}I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{n+2}{n+4}I_1$ . Так как нагревательные элементы одинаковы, то, согласно закону Джоуля-Ленца, отношение потребляемых мощностей  $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^2$ . Ясно, что Н3 потребляет такую же мощность,

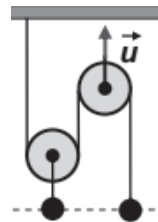
как и Н2, и в результате  $P_2 = P_3 = \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^2 P_1 = 588 \text{ Вт}$ .

**Ответ:**  $P_2 = P_3 = \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^2 P_1 = 588 \text{ Вт}$ .

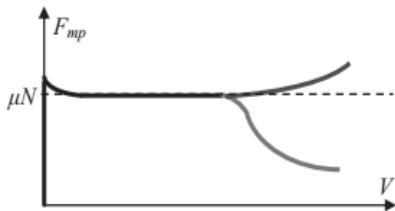
#### Задание 4.

**Вопрос:** Опишите различия между силами трения покоя и трения скольжения.

**Задача:** Одна из двух одинаковых небольших тяжелых шайб прикреплена легкой нерастяжимой нитью к оси подвижного блока, другая – к концу еще одной легкой нерастяжимой нити, которая перекинута через два подвижных блока (см. рисунок) и прикреплена к неподвижной стенке. Обе шайбы находятся на горизонтальной поверхности таким образом, что участки нитей, не лежащие на блоках, в натянутом состоянии параллельны. Блоки практически невесомы и нить скользит по ним без трения. Сначала система покоилась, и центры шайб находились на одной прямой, перпендикулярной нитям. Затем, удерживая «левую» шайбу, «правый» блок потянули так, что далее он двигался с постоянной скоростью  $u = 1,6 \text{ м/с}$ , и практически сразу после этого «левую» шайбу отпустили. Блок движется параллельно нитям, коэффициент трения каждой из шайб о поверхность  $\mu = 0,3$ . Через какое время после начала движения центры шайб вновь окажутся на одной прямой, перпендикулярной нитям? Считать, что блоки и шайбы не касаются друг друга. Ускорение свободного падения  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ .



**Ответ на вопрос:** Все силы сухого трения есть результат межмолекулярных взаимодействий, но обычно разделяют силы трения покоя и силы трения скольжения. Сила трения покоя препятствует проскальзыванию поверхностей и всегда направлена против силы, пытающейся вызвать скольжение (то есть параллельной поверхности соприкосновения составляющей внешней силы, действующей на тело). Она равна этой силе по величине и ее момент уравнивает (вместе с моментом силы нормальной реакции) момент внешней силы (чтобы обеспечить выполнение условий равновесия). При этом сила трения покоя не может быть произвольной – она принимает значения в интервале от нуля до некоторого максимального значения, зависящего от свойств поверхностей и силы прижатия их друг к другу (от величины действующей между ними силы нормальной реакции). Если внешняя сдвигающая сила превосходит это максимальное значение, покой нарушается и начинается скольжение. Сила трения скольжения – сила, направленная против скорости относительного движения поверхностей (она препятствует скольжению, которое уже существует). Величина силы трения скольжения в некотором интервале скоростей относительного движения слабо зависит от этой скорости и вычисляется по формуле  $F = \mu N$ , где  $N$  – сила нормальной реакции, а величина  $\mu$  –



коэффициент трения, который зависит от свойств поверхностей. Обычно считается, что максимальная величина силы трения покоя примерно совпадает с величиной силы трения скольжения, но на самом деле для большинства поверхностей она несколько больше  $\mu N$  (этот эффект носит название «эффект застоя»), поэтому в области малых скоростей в зависимости величины силы трения скольжения от скорости бывает участок, на котором сила трения скольжения падает с ростом скорости. При больших относительных скоростях поверхности могут начать разрушаться и даже плавиться (как лед под скользящим лезвием конька), и тогда сила трения может существенно измениться – как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения. Примерный график зависимости силы трения скольжения от относительной скорости поверхностей показан на рисунке.

**Решение задачи:** Заметим, что скорости «левой» и «правой» шайб ( $v_1$  и  $v_2$ ) связаны со скоростью движения «правого» блока условием нерастяжимости нити. Изменение суммы длин участков нити, не



лежащих на блоках, за малое время  $\Delta t$  должно быть равно нулю:  $-v_1\Delta t + (u - v_1)\Delta t + (u - v_2)\Delta t = 0$ , поэтому  $2v_1 + v_2 = 2u$  в любой момент времени движения. Во время «разгона» системы «левую» шайбу удерживали. Значит, начальная скорость «левой» шайбы  $v_1(0) = 0$ , а «правой» —  $v_2(0) = 2u$ . Пусть массы шайб равны  $m$ . Уравнения движения шайб в проекции на направление движения «правого» блока во время скольжения имеют вид:

$$\begin{cases} ma_1 = 2T - \mu mg \\ ma_2 = T - \mu mg \end{cases},$$

и, с учетом уравнения связи для ускорений  $2a_1 + a_2 = 0$ , решение этой системы уравнений относительно ускорений имеет вид  $a_1 = +\mu g/5$  и  $a_2 = -2\mu g/5$ . Следовательно, скорости шайб изменяются по законам  $v_1 = +t\mu g/5$  и  $v_2 = 2u - 2\mu g t/5$ . При этом сила натяжения нити  $T = \frac{3}{5}\mu mg$ . Как видно, сначала вперед выходит «правая» шайба, но к

моменту времени  $t_1 = \frac{5u}{\mu g}$  она останавливается. Так как сила натяжения нити меньше  $\mu mg$ , то эта шайба останется на месте (сила натяжения при

этом еще уменьшится до  $T' = \frac{1}{2}\mu mg$ ), а первая шайба продолжит движение с постоянной скоростью  $u$ . До остановки «правая» шайба пройдет путь  $s_2 = \frac{2u + 0}{2}t_1 = \frac{5u^2}{\mu g}$ , а «левая» — путь

$$s_1 = \frac{0 + u}{2}t_1 = \frac{5u^2}{2\mu g}. \text{ Значит, «левая» шайба отстала на } s_2 - s_1 = \frac{5u^2}{2\mu g},$$

и для возвращения на одну линию с «правой» ей понадобится время  $t_2 = \frac{s_2 - s_1}{u} = \frac{5u}{2\mu g}$ . Полное время движения до момента, когда шайбы

вновь оказываются на одной прямой  $t = t_1 + t_2 = \frac{15u}{2\mu g} \approx 4$  с.

$$\text{Ответ: } t = \frac{15u}{2\mu g} \approx 4 \text{ с.}$$



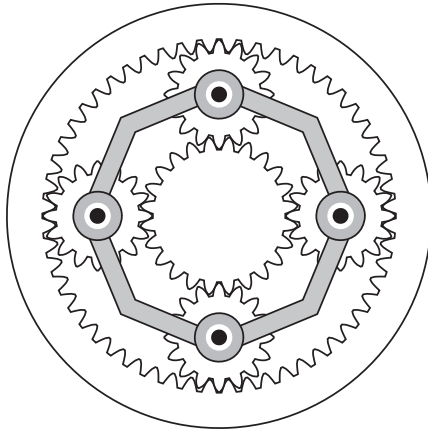
## 1. Планетарная передача

Крюков П. А.

Внешняя шестерня *планетарной передачи* (см. приведённый ниже рисунок из «Википедии») называется *коронной*, внутренняя — *солнечной*, жёсткое подвижное звено, на котором закреплены оси маленьких *планетарных шестерёнок*, называется *водилом*.

А. (3 балла) Если водило неподвижно, а солнечная шестерня вращается с частотой  $n$  оборотов в секунду, то с какой частотой вращается коронная шестерня?

В. (5 баллов) Пусть солнечная и коронная шестерни вращаются в одну сторону, делая  $n$  и  $N$  оборотов в секунду соответственно. Чему равна частота вращения водила?



### Решение

Сначала следует посчитать количество зубьев шестерёнок по рисунку. У солнечной шестерни их 24, у коронной — 56, а у маленьких планетарных шестерёнок — 16. Далее можно предложить модель, в которой шестерёнки считаются дисками (при движении один диск не проскальзывает по другому). Радиусы дисков относятся как число зубьев шестерёнок, иначе говоря, как  $3 : 2 : 7$ . Впрочем, можно дать решение, и не прибегая к этому модельному представлению.

Рассмотрим две шестерёнки: маленькую с количеством зубьев, равным  $a \cdot k$ , и большую с количеством зубьев, равным  $b \cdot k$ . Пусть натуральные числа  $a$  и  $b$  взаимно простые.

Пусть оси шестерёнок зафиксированы. Представим себе, что зубья шестерёнок, находящиеся в контакте в начальный момент, помечены, например, краской. Тогда шестерёнки вернутся в исходное положение, при котором помеченные зубья будут опять касаться друг друга, после того, как большая шестерёнка совершит  $a$  оборотов, а маленькая  $b$  оборотов.

В нашем случае, если водило зафиксировано, и оси шестерёнок неподвижны, то за время двух оборотов солнечной шестерёнки, любая планетарная сделает три оборота. С другой стороны, время двух оборотов коронной шестерёнки равно времени 7 оборотов планетарной шестерёнки.

Из этих рассуждений следует, что при неподвижном водиле время 21 оборота планетарной шестерёнки равно времени 14 оборотов солнечной шестерёнки и 6 оборотов планетарной шестерёнки, следовательно, отношение частот вращения солнечной и коронной шестерёнок (при неподвижном водиле) равно  $14 : 6$  или  $7 : 3$ . Таким образом, ответ на вопрос части А:  $N_A = \frac{3n}{7}$ . Обратите внимание на то, что при этом солнечная и коронная шестерни вращаются в разные стороны!

Чтобы ответить на вопрос части В, рассмотрим движение коронной и солнечной шестерёнок относительно водила. Обозначим частоту обращения водила  $N_B$ . Предположим, что водило, солнечная и коронная шестерёнки вращаются в одну сторону. Тогда относительно водила частота вращения солнечной шестерёнки равна  $n - N_B$ , а частота вращения коронной шестерёнки равна  $N - N_B$ . Из ответа на вопрос части А следует, что при неподвижном водиле отношение частот вращения солнечной и коронной шестерёнок равно  $\frac{7}{3}$ , при этом они вращаются в разные стороны, так что уравнение для определения частоты водила будет таким:

$$\frac{n - N_B}{N - N_B} = -\frac{7}{3}. \quad (1)$$

Решая уравнение (1) относительно неизвестной частоты  $N_B$ , получаем равенство

$$N_B = \frac{3n + 7N}{10}, \quad (2)$$

дающее ответ на вопрос части В.

Покажем, как получить ответ на вопрос части А, представив солнечную и планетарные шестерёнки дисками с радиусами  $3R$  и  $2R$  соответственно, проскальзывание между которыми отсутствует.

Коронную шестерёнку представим в виде кольца с внутренним радиусом  $7R$ . Пусть солнечная шестерёнка вращается с угловой скоростью  $\omega$ , тогда линейная скорость края соответствующего диска равна  $v_1 = \omega \cdot 3R$ . Поскольку проскальзывание между маленьким диском, соответствующим планетарной шестерёнке, и кольцом также отсутствует, линейная скорость точек, лежащих на внутренней окружности кольца, равна  $v_2 = \omega \cdot 3R$  и направлена противоположно скорости  $v_1$ . С другой стороны, эта скорость равна  $v_2 = \Omega \cdot 7R$ . Отсюда следует, что угловые скорости коронной и солнечной шестерёнок относятся как  $3 : 7$ , а следовательно и частоты относятся также.

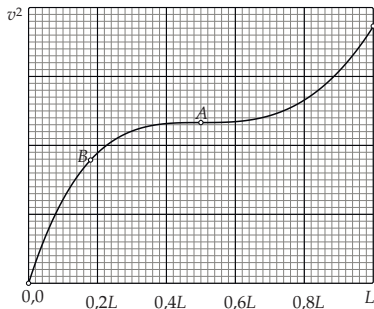
Ответ на вопрос части В также можно получить, заменив шестерёнки на диски. Можно рассмотреть движение шестерёнок во вращающейся системе отсчёта, в которой водило неподвижно. То же самое можно сделать во вращающейся системе, в которой неподвижна солнечная шестерёнка или коронная. В любом случае получится формула (2) в качестве ответа.

**Ответ:** А)  $N_A = \frac{3n}{2}$ ; В)  $N_B = \frac{3n+7N}{10}$ .

## 2. Падение аппарата

Крюков П. А.

В поле тяжести Земли вниз по вертикали из состояния покоя движется летательный аппарат, на который кроме силы тяжести может действовать только подъёмная сила, создаваемая двигателем, направленная вертикально и сложным образом меняющаяся со временем. На рисунке представлен график зависимости квадрата скорости аппарата от пройденного расстояния на начальном участке его движения длиной  $L$ . Числовые значения цены деления сетки по каждой из осей неизвестны. В нулевой момент времени двигатель аппарата не работает. Известно, что если бы двигатель вообще не включался, то аппарат прошёл бы расстояние  $L$  за время, равное  $7,75$  с.



Можно считать, что на рассматриваемом участке ускорение свободного падения равно  $10 \text{ м/с}^2$ , а сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала. Найдите скорость и ускорение аппарата при его движении с включённым двигателем в моменты времени, соответствующие точкам А и В графика.

### Решение

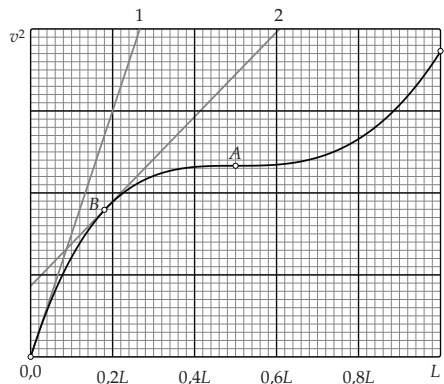
Рассмотрим очень маленькое изменение квадрата скорости аппарата  $\Delta(v^2)$ , соответствующее изменению скорости  $\Delta v$  и пройденному пути  $\Delta L$ . Справедливо равенство

$$\Delta(v^2) = (v + \Delta v)^2 - v^2 = 2v\Delta v = 2 \frac{\Delta L \Delta v}{\Delta t} = 2a\Delta L,$$

при выводе которого мы пренебрегаем слагаемым  $(\Delta v)^2$ , поскольку оно значительно меньше произведения  $v\Delta v$ . Из этого равенства следует соотношение

$$a = \frac{\Delta(v^2)}{2\Delta L}. \quad (3)$$

Геометрический смысл формулы (3) состоит в том, что тангенс угла наклона касательной к графику зависимости  $v^2$  от  $L$  пропорционален ускорению аппарата. В начале движения двигатель ещё не работает, поэтому ускорение аппарата равно ускорению свободного падения  $g$ . Этот факт позволяет восстановить цену деления сетки по оси ординат. Действительно, построив касательную к графику в начале отсчёта, можно вычислить какому делению по оси ординат соответствует точка этой касательной, имеющая координату  $L$  по оси абсцисс. Как следует из условия, скорость в этой точке должна быть равна  $v(L) = gt = 10 \cdot 7,75 \text{ м/с}$ . Построенная касательная показана на рисунке, приведённом ниже, — это линия серого цвета, обозначенная цифрой 1.



Из построения следует, что ордината точки с абсциссой  $L$  соответствует 15 делениям основной сетки (линии чёрного цвета большей толщины) по оси ординат. Следовательно, одно деление соответствует значению квадрата скорости

$$v_1^2 = \frac{(77,5)^2}{15} \approx 400 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Теперь можно определить скорости, соответствующие точкам  $A$  и  $B$ . Судя по графику, для точки  $A$  скорость равна  $v_A = \sqrt{2,3 \cdot 400} \text{ м/с} \approx 30 \text{ м/с}$ , а для точки  $B$  равна  $v_B = \sqrt{1,8 \cdot 400} \text{ м/с} \approx 27 \text{ м/с}$ .

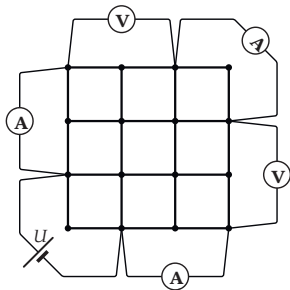
Как уже было сказано ранее, ускорение аппарата пропорционально тангенсу угла наклона касательной, поэтому ускорение в момент времени, соответствующий точке  $A$  на графике, равно нулю. Определив по графику тангенс угла наклона касательной, проведённой в точке  $B$ :  $\text{tg } \beta \approx \frac{31}{30}$  и учитывая, что ускорению свободного падения соответствует значение  $\text{tg } \alpha_0 \approx 3$ , находим  $a_B = 10 \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{1}{3} \approx 3,4 \text{ м/с}^2$ .

Ответ:  $v_A = (30 \pm 3) \text{ м/с}$ ,  $v_B = (27 \pm 3) \text{ м/с}$ ;  $a_A = 0$ ,  $a_B = (3,5 \pm 0,5) \text{ м/с}^2$ .

### 3. Опять приборы

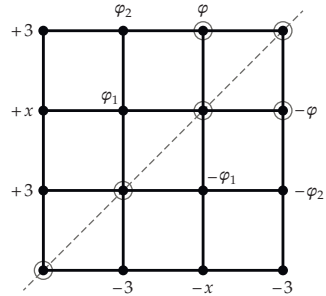
Крюков П. А.

В схеме, изображённой на рисунке, все приборы идеальные. Батарейка, напряжение между выводами которой равно  $U = 6 \text{ В}$ , тоже идеальная. Сопротивление любого проводника, соединяющего соседние узлы сетки, равно  $200 \text{ Ом}$ . Сопротивление подводящих проводов, изображаемых тонкими линиями чёрного цвета, равно нулю. Найдите показания приборов.



#### Решение

Существуют разные способы решения этой задачи, тем или иным образом использующие симметрию рассматриваемой цепи. Покажем способ, основанный на симметрии распределения потенциалов узлов относительно диагонали сетки.



Рассмотрим рисунок, приведённый выше. Пусть потенциал узла, к которому подключен положительный полюс батареи, равен  $+3$ , а потенциал узла, соединённого с отрицательным полюсом батареи, равен  $-3$ . Тогда в силу симметрии потенциалы узлов на диагонали (обведённые окружностями на рисунке) будут равны нулю. Потенциалы узлов, располагающихся симметрично относительно плоскости, перпендикулярной рисунку, равны по модулю и противоположны по знаку.

Потенциалы двух узлов, ближайших к правому верхнему узлу, равны, ведь они соединены через идеальный амперметр. С другой стороны, если потенциал одного из этих узлов равен  $\varphi$ , то потенциал другого равен  $-\varphi$ . Оба утверждения выполняются одновременно только в случае  $\varphi = 0$ .

Пусть неизвестный потенциал узла на левой вертикальной стороне сетки равен  $x$  (считаем, что значения потенциалов имеют размерность Вольт). Сумма токов, втекающих в узел с потенциалом  $x$ , равна нулю, поэтому справедливо равенство

$$\frac{\varphi_1 - x}{R} + \frac{(3 - x)}{R} + \frac{(3 - x)}{R} = 0, \quad (4)$$

где  $R$  — сопротивление проводника, соединяющего соседние узлы. Из уравнения (4) находим

$$\varphi_1 = 3(x - 2). \quad (5)$$

Аналогично определяется потенциал  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = x - 1. \quad (6)$$

Сумма токов, втекающих в узел с потенциалом  $\varphi_1$  равна нулю, отсюда имеем уравнение

$$\varphi_2 + x = 4 \cdot \varphi_1. \quad (7)$$

Подставив в уравнение (7) выражения (5) и (6) для потенциалов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , находим значение неизвестного потенциала

$$x = \frac{23}{10}. \quad (8)$$

Из формул (8) и (6) получаем потенциал  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = x - 1 = \frac{13}{10}. \quad (9)$$

Теперь можно определить показания амперметров. Ток через амперметр на левой вертикальной стороне сетки равен сумме токов, текущих через проводники сопротивлением  $R$ , присоединённые к этому узлу:

$$I_A^{(1)} = \frac{3-x}{R} + \frac{3-\varphi_2}{R} = 12 \text{ мА}. \quad (10)$$

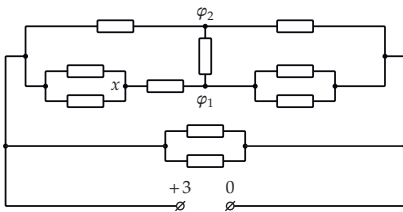
Такое же значение тока показывает амперметр на нижней горизонтальной стороне сетки. Амперметр, соединяющий узлы, ближайшие к правому верхнему узлу, показывает ток, равный

$$I_A^{(2)} = \frac{\varphi_2 - \varphi}{R} = \frac{\varphi_2}{R} = 6,5 \text{ мА}. \quad (11)$$

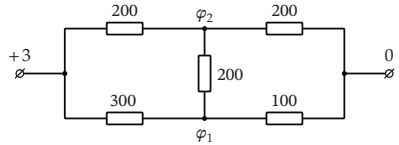
Вольтметры показывают напряжение  $U_V = 3 \text{ В}$ .

Можно несколько иначе использовать симметрию распределения токов и потенциалов в этой сетке и предложить другое решение задачи.

Попробуем перерисовать исходную цепь, состоящую из двух одинаковых половинок, располагающихся симметрично относительно диагонали. Верхняя половина эквивалентна цепи, показанной на рисунке, приведённом ниже, при условии что выводы подключены к источнику с напряжением  $\frac{U_0}{2} = 3 \text{ В}$ . Сопротивление каждого резистора в представленной цепи равно  $R = 200 \text{ Ом}$ .



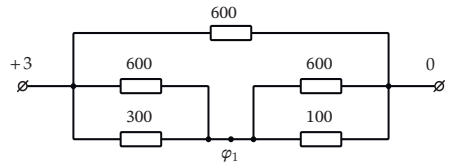
Задача сводится к определению потенциалов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , поэтому параллельное соединение в нижней части схемы можно не рассматривать. Верхняя часть цепи представляет собой несбалансированный мост. На рисунке, приведённом ниже, значения сопротивлений указаны в Ом.



В верхней части цепи, показанной на рисунке, три одинаковых резистора сопротивлением  $200 \text{ Ом}$  соединены «звездой». Потенциал в центре звезды, состоящей из одинаковых резисторов равен среднему арифметическому потенциалов её концов, поэтому справедливо соотношение

$$\varphi_2 = \frac{3 + \varphi_1}{3}. \quad (12)$$

Теперь задача сводится к определению потенциала  $\varphi_1$ . Используем преобразование звездотрехугольник. Звезда, составленная из резисторов сопротивлением  $R$  эквивалентна треугольнику, состоящему из резисторов сопротивлением  $3R$ . После преобразования имеем цепь, показанную на рисунке, приведённом ниже.



Сопротивление левого параллельного соединения в нижней части цепи равно  $200 \text{ Ом}$ , а правого равно  $\frac{600}{7} \text{ Ом}$ . Отношение этих сопротивлений составляет  $\frac{7}{3}$ , поэтому потенциал  $\varphi_1$  равен  $\frac{3}{10} \cdot 3 \text{ В}$ . Потенциал  $\varphi_2$ , как следует из формулы (12), оказывается равен

$$\varphi_2 = \frac{3 + \varphi_1}{3} = \frac{3 + 0,9}{3} = 1,3,$$

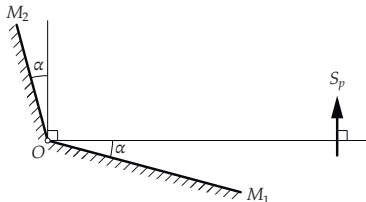
что совпадает со значением (9), подсчитанным ранее другим способом. Дальнейшее решение не представляет особой сложности.

Ответ: показания амперметров равны  $12 \text{ мА}$ ,  $6,5 \text{ мА}$  и  $12 \text{ мА}$ ; показания вольтметров равны  $3 \text{ В}$ .

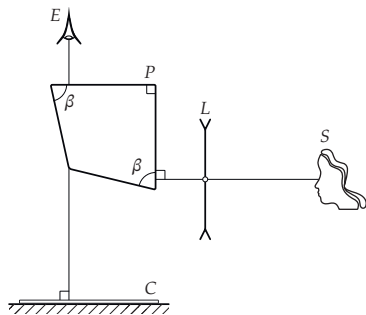
## 4. Камера-люцида

Крюков П. А.

А. (3 балла) Два плоских зеркала  $M_1O$  и  $M_2O$  образуют двугранный угол (см. рисунок), при этом плоскость зеркала  $M_1O$  составляет неизвестный угол  $\alpha$  с горизонтальной прямой, а плоскость зеркала  $M_2O$  такой же угол  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ ) с вертикальной прямой. Найдите такое значение (или значения, если их несколько) угла  $\alpha$ , что изображение плоского предмета  $S_p$ , расположенного вертикально, лежит в горизонтальной плоскости.



В. (4 балла) На рисунке ниже изображена оптическая схема камеры-люциды — устройства, которое раньше применялось для перерисовывания предметов, людей, пейзажей с натуры. Размеры на схеме непропорционально изменены. Глаз рисовальщика обозначен на схеме буквой  $E$ , а перерисовываемый объект — буквой  $S$ . В устройстве используется рассеивающая линза  $L$ , а также призма  $P$  из стекла с показателем преломления  $n = \frac{3}{2}$ , имеющая в сечении четырёхугольник с одним прямым углом и двумя одинаковыми острыми углами, равными  $\beta$ . Рисовальщик смотрит вертикально вниз на лист бумаги  $C$  (на котором рисует).

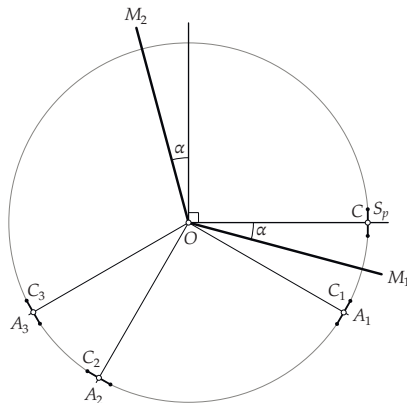


Считайте, что расстояние от линзы  $L$  до изображаемого объекта  $S$  значительно больше, чем расстояние между  $E$  и  $C$ . Линейные размеры призмы существенно меньше расстояния от  $L$  до  $S$  и расстояния от глаза рисовальщика до листа.

Объясните, как работает это устройство. Чему равен угол  $\beta$  призмы, которая использовалась в этом устройстве, по вашему мнению? Какую роль играет рассеивающая линза?

## Решение

А. В системе зеркал  $M_1OM_2$  может наблюдаться не более трёх изображений плоского предмета  $S_p$ . Эти изображения располагаются так, как показано на рисунке, приведённом ниже. Если точка  $A$  — середина плоского предмета  $S_p$ , то изображения предмета  $S_1, S_2$  и  $S_3$  будут повернуты относительно него на углы:  $\gamma_1 = \angle COC_1 = 2\alpha$ ,  $\gamma_2 = \angle COC_2 = \pi - 4\alpha$ ,  $\gamma_3 = \angle COC_3 = \pi - 2\alpha$ .



Изображение  $S_i$  лежит в горизонтальной плоскости, если выполняется условие  $\gamma_i = \frac{\pi}{2}$ . Составив соответствующие уравнения, находим два значения угла  $\alpha$ , удовлетворяющие условию:  $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ . Легко видеть, что в случае  $\alpha = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$  двугранное зеркало «вырождается» в плоское.

В. В камере-люциде рассеивающей линзой создаётся уменьшенное изображение перерисовываемых предметов. Если эти предметы находятся на большом расстоянии от линзы (по сравнению с фокусным расстоянием), то можно считать, что изображения предметов располагаются в фокальной плоскости линзы. Боковые грани призмы, составляющие тупой угол, играют роль зеркал, разворачивая изображение, полученное в вертикальной фокальной плоскости так, чтобы оно располагалось в горизонтальной плоскости листа, на котором рисует человек. Таким образом, как следует из решения части А, угол  $\beta$  должен быть равен  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$ . При таком угле параксиальные лучи лучей, формирующие изображение в линзе, па-

дают изнутри на грани призмы, образующие тупой угол, под углами, большими, чем угол полного внутреннего отражения для материала призмы, равный

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \approx 42^\circ \approx \frac{10}{43}\pi.$$

Глядя через призму сверху вниз, рисовальщик видит уменьшенное изображение предмета на листе бумаги. С другой стороны, через призму также виден и сам лист. Таким образом, контуры изображения могут быть перенесены на лист.

Ответ: А)  $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ . В) Рассеивающая линза создаёт уменьшенное изображение предмета вблизи фокальной плоскости. Грани призмы, составляющие тупой угол, играют роль зеркал, поворачивая изображение на угол  $\frac{\pi}{2}$ , так что человек видит это изображение в плоскости листа, на котором он рисует.  $\beta = \frac{3\pi}{8}$ .

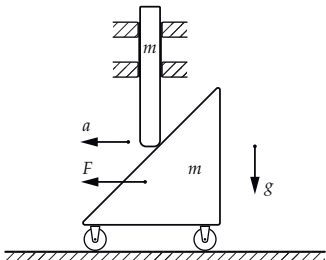
## 5. Клин и стержень

Варламов С. Д.

Верхняя грань клина массой  $m = 3$  кг составляет угол  $\alpha = 45^\circ$  с горизонтом. Клин снабжен лёгкими колёсиками и стоит на горизонтальной поверхности (см. рисунок). Стержень массой  $m$ , расположенный вертикально, может двигаться только вверх-вниз вдоль вертикальных направляющих, не испытывая трения. Между стержнем и клином имеется трение, характеризующееся неизвестным коэффициентом  $\mu$ . Если на клин действуют горизонтальной силой  $F = 102$  Н (как показано на рисунке), то клин и стержень движутся так, что касаются друг друга; ускорение клина сонаправлено силе и равно  $a = 1$  м/с<sup>2</sup>. Ускорение свободного падения  $g$  считайте равным  $10$  м/с<sup>2</sup>.

А. Найдите коэффициент трения  $\mu$ .

В. Какую горизонтальную силу  $F_1$  нужно прикладывать к клину, чтобы он двигался с ускорением  $a$  в противоположную сторону?



## Решение

А. Из анализа геометрии задачи (угол клина равен  $45^\circ$ ) следует вывод о том, что абсолютные величины ускорений клина и стержня равны. В точке контакта клина и стержня на них действуют силы трения и нормальной реакции. Если клин движется влево, то стержень движется вверх и действующая на клин сила трения направлена вдоль его наклонной плоскости вверх. Второй закон Ньютона для клина, записанный в проекциях на горизонтальную ось, даёт уравнение

$$F - \frac{N}{\sqrt{2}}(1 + \mu) = ma. \quad (13)$$

В формуле (13) учтено, что  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Второй закон Ньютона, записанный для стержня, даёт уравнение

$$mg + \frac{N}{\sqrt{2}}(\mu - 1) = -ma. \quad (14)$$

Из уравнений (13) и (14) исключается неизвестная сила реакции  $N$  и находится коэффициент трения

$$\mu = \frac{F - mg - 2ma}{F + mg} = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

В. При смене направления движения клина, силы трения, действующие на клин и стержень, изменят своё направление на противоположное. Предположим, что искомая сила  $F_1$  сонаправлена силе  $F$  (если это не так, то для  $F_1$  в результате получится отрицательное значение), тогда уравнение второго закона Ньютона для клина имеет вид:

$$F_1 - \frac{N_1}{\sqrt{2}}(1 - \mu) = -ma. \quad (16)$$

Для стержня в этом случае имеем уравнение

$$mg - \frac{N_1}{\sqrt{2}}(\mu + 1) = ma. \quad (17)$$

Подставив в уравнения (16) и (17) значение коэффициента трения из (15), получим после исключения силы реакции и преобразований ответ

$$F_1 = \frac{mg - 4ma}{3} = 6 \text{ Н}.$$

Поскольку найденное значение силы  $F_1$  положительное, её направление такое, как предполагалось, иначе говоря, сила  $F_1$  сонаправлена силе  $F$ .

Ответ: А)  $\mu = \frac{1}{2}$ ; В)  $F_1 = 6$  Н.



## Условия задач, авторские решения

### 1. Модель слинки Фольклор

Несколько  $(2N + 1)$  одинаковых маленьких шариков соединены одинаковыми невесомыми пружинками в цепочку (см. рисунок,  $N = 3$ ). Пусть длина одной пружинки в недеформированном состоянии равна нулю, диаметр шарика пренебрежимо мал, а  $N \gg 1$ , тогда такая модельная конфигурация неплохо описывает некоторые свойства успокаивающей игрушки-пружинки «слинки».

Известно, что если цепочка шариков с пружинками ( $N \gg 1$ ) располагается на гладкой горизонтальной поверхности, один из крайних шариков удерживается, а на другой крайний шарик действует горизонтальная сила, равная силе тяжести цепочки, то длина цепочки оказывается равна  $L_0$ . Здесь и далее речь идёт о статическом состоянии цепочки, при котором все шарики цепочки не движутся.



А. Чему будет равна длина цепочки, если её подвесить к потолку за один из концов?

В. На каком расстоянии от потолка будет располагаться нижняя точка цепочки, если оба её конца закрепить на потолке на расстоянии  $D$  друг от друга? Какую форму примет цепочка? Назовите вид кривой.

### Решение

А. Задача довольно известная. Предлагаемое решение тоже не отличается оригинальностью. Пусть цепочка, содержащая  $2N + 1$  шариков, подвешена за один из концов к потолку. Обозначим массу цепочки  $M$ , массу шарика  $m = \frac{M}{2N+1}$ , жёсткость одной пружинки  $k = k_0 \cdot 2N$ , где  $k_0$  — жёсткость всей пружины. Из условия задачи следуют равенства

$$Mg = k_0 \cdot L_0, \quad \Rightarrow \quad L_0 = \frac{mg}{k} \cdot 2N(2N + 1). \quad (1)$$

Рассмотрим ось  $OX$ , направленную вертикально вверх. Пусть ноль этой оси совпадает с положением нижнего шарика цепочки, подвешенной к потолку комнаты. Тогда последовательность  $\{x_i\}$ ,  $i = 1, \dots, 2N$  даёт координаты шариков цепочки, а последовательность  $\{\delta x_i\}$ ,  $i = 1, \dots, 2N$  — растяжения пружинков цепочки. Искомая длина  $L_A$  равна координате  $x_{2N}$  шарика с номером  $2N + 1$ .

Условие равновесия нижнего шарика даёт соотношение

$$x_1 = \delta x_1 = \frac{mg}{k},$$

а условие равновесия  $n$ -ого шарика соотношение

$$\delta x_n = \delta x_{n-1} + \frac{mg}{k}.$$

Из этих соотношений следует, что последовательность растяжений пружинков  $\{\delta x_i\}$  — это арифметическая прогрессия, при этом для  $n$ -ого члена прогрессии справедлива формула

$$\delta x_n = \frac{mg}{k} \cdot n.$$

Таким образом, длина цепочки, подвешенной к потолку, равна сумме первых  $2N$  членов арифметической прогрессии:

$$L_A = \sum_{n=1}^{2N} \frac{mg}{k} \cdot n = \frac{mg}{k} \cdot (2N + 1)N. \quad (2)$$

Разделив результат (2) на второе равенство из (1), получим ответ:

$$L_A = \frac{L_0}{2}.$$

В. В этой части задачи рассмотрим систему координат, ось  $OY$  которой направлена вертикально вверх, ось  $OX$  горизонтальна, при этом самый нижний шарик находится в начале координат. Последовательности  $\{x_i\}$  и  $\{y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  дают координаты шариков в половине висящей цепочки, а последовательность векторов  $\{\delta l_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  описывает растяжения пружин в этой половине. Считаем, что вектор  $\delta l_i$  направлен вдоль оси  $i$ -й пружины и равен её удлинению по абсолютной величине. Сила упругости  $i$ -ой пружины, действующая на  $(i - 1)$ -й шарик имеет проекции  $\delta F_i^{(x)} = k \delta x_i$  и  $\delta F_i^{(y)} = k \delta y_i$  на оси системы координат, где  $\delta x_i$  и  $\delta y_i$  — проекции вектора  $\delta l_i$ . Условия равновесия  $i$ -го шарика отражают уравнения

$$k \delta x_n = k \delta x_{n-1}, \quad k \delta y_n = k \delta y_{n-1} + mg. \quad (3)$$

Из первого уравнения из (3) следует равенство проекций на ось  $OX$  векторов растяжения и формула для координаты по оси  $OX$   $n$ -го шарика

$$x_n = \frac{D}{2N} \cdot n. \quad (4)$$

Из второго уравнения из (3) делается вывод о том, что последовательность  $\{\delta y_i\}$  — арифметическая прогрессия. Проекция  $\delta y_1$  растяжения первой пружины находится из условия равновесия самого нижнего шарика:

$$2k \cdot \delta y_1 = mg.$$



Последовательность координат  $\{y_i\}$  — это последовательность сумм этой арифметической прогрессии. Таким образом для координаты  $i$ -го шарика по оси  $OY$  имеем формулу

$$y_n = \sum_{i=1}^n \delta y_i = \frac{mg}{2k} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{mg}{k} \cdot i = \frac{mg}{2k} (n^2 - n + 1). \quad (5)$$

Согласно формуле (4) координата  $x_n$   $n$ -го шарика по оси  $OX$  пропорциональна его номеру  $n$ , отсюда, а также из соотношения (5) следует, что координата  $y_n$  представляет собой квадратичную функцию координаты  $x_n$ . Таким образом, цепочка принимает форму *параболы*. Расстояние от нижнего шарика до потолка равно координате по оси  $OY$   $N$ -го шарика. Из формул (5) и (1) имеем соотношение

$$L_B = y_N = L_0 \cdot \frac{N^2 - N + 1}{4N(2N + 1)},$$

которое в случае большого количества шариков ( $N \gg 1$ ) даёт ответ

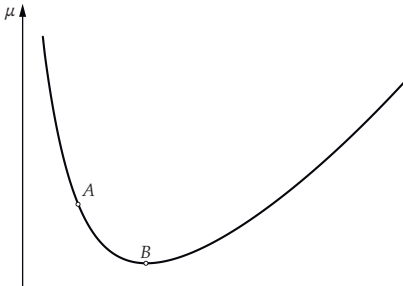
$$L_B = \frac{L_0}{8}.$$

Ответ: А)  $L_A = \frac{L_0}{2}$ ; В)  $L_B = \frac{L_0}{8}$ , парабола.

## 2. КПД автомобиля

Бычков А. И., Крюков П. А.

На рисунке, приведённом ниже (увеличенный вариант на дополнительном листе), вы видите фрагмент модельной зависимости расхода топлива  $\mu$  (измеряемого в единицах объёма на единицу пройденного пути) некоторого особого автомобиля с двигателем внутреннего сгорания от квадрата его скорости. Расположение оси абсцисс (по которой откладывается величина  $v^2$ ) неизвестно. Известно только, что она перпендикулярна оси ординат и направлена вправо по рисунку. Масштаб по оси ординат неизвестен, известно только её расположение.



КПД автомобиля, движущегося с некоторой постоянной скоростью, соответствующей  $t$ .  $A$  на графике, равен 6%, а КПД автомобиля, движущегося с другой скоростью, соответствующей точке  $B$ , равен 18%. Определите максимально возможный КПД автомобиля в диапазоне скоростей, для которых построен график.

Можно считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля и направлена против скорости, трение качения пренебрежимо мало, колёса автомобиля по дороге не проскальзывают. Коэффициентом полезного действия в этой задаче мы называем долю энергии сгоревшего топлива (в процентах), которая расходуется на поддержание постоянной скорости автомобиля при движении по горизонтальной дороге.

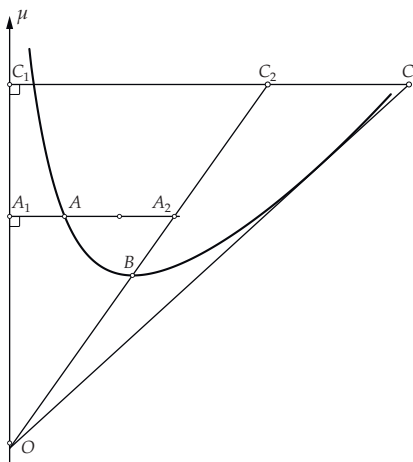
### Решение

При сгорании топлива массой  $dm = \mu dS$  автомобиль проходит расстояние  $dS$ . Если это происходит за время  $dt$ , то тепловая энергия, выделяющаяся при сгорании массы  $dm$ , равна  $dQ = q\mu v dt$ , где  $q$  — удельная теплота сгорания топлива. Абсолютная величина работы силы сопротивления воздуха за время  $dt$  равна  $\delta A = kv^2 v dt$ . Таким образом, на поддержание скорости автомобиля постоянной при его движении по горизонтальной дороге тратится часть энергии сгоревшего топлива, равная

$$\eta = \frac{\delta A}{dQ} = \frac{k}{q} \cdot \frac{v^2}{\mu}. \quad (6)$$

Из формулы (6) следует, что линии постоянного КПД на плоскости  $(\mu; v^2)$  — это прямые, проходящие через начало отсчёта, при этом величина КПД  $\eta$  для любой такой прямой пропорциональна тангенсу угла между этой прямой и осью ординат. Максимальному КПД соответствует касательная к графику, проходящая через начало координат и составляющая наибольший возможный угол с осью  $OY$ .

Построение начала координат может быть таким, как показано на рисунке, представленном ниже. Из точки  $A$  опускается перпендикуляр  $AA_1$  на ось ординат. Далее на этой прямой откладывается отрезок  $AA_2 = 2 \cdot AA_1$  в другую сторону от точки  $A$ . Прямая, проходящая через точки  $A_2$  и  $B$ , пересекает ось ординат в начале координат. Действительно, тангенс угла  $A_1OA$  оказывается в три раза меньше тангенса угла  $A_1OA_2$ .



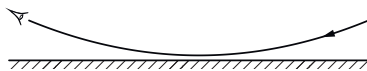
После построения начала координат, строится касательная. Далее выясняется, как связаны тангенсы углов, которые составляют линия с извещенным КПД и касательная с осью ординат. Можно сделать так: найдём точки пересечения касательной и линии, проходящей через начало координат и точку  $B$ , с некоторой горизонтальной прямой (точки  $C$  и  $C_2$  на рисунке). Отношение длин  $\frac{CC_1}{C_2C_1}$  равно отношению искомого максимального КПД к 18 % (КПД, соответствующий точке  $B$ ). Построение, сделанное таким образом одним из авторов задачи на «Дополнительном листе», дало результат  $\eta_{\max} \approx 25,5\%$ .

Ответ:  $\eta_{\max} = (25,0 \pm 1,2)\%$ .

### 3. Модель миража

Крюков П. А., Бычков А. И.

Нижний мираж — это оптическое явление в атмосфере, при котором мнимое изображение неба и облаков наблюдается ниже поверхности земли, как-бы отражаясь от расположенного на горизонтальной поверхности зеркала. Например, в солнечный день нагретая поверхность горизонтальной асфальтовой дороги на некотором расстоянии от наблюдателя может казаться покрытой лужами (в которых отражается небо и окружающий пейзаж), тогда как на самом деле дорога сухая. Это явление объясняется искривлением световых лучей в неравномерно нагретом воздухе вблизи дороги. В этой задаче можно считать, что вблизи поверхности асфальта лучи распространяются по дугам парабол, как показано на рисунке ниже.

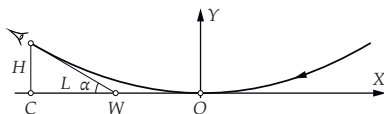


Предполагая, что отклонение показателя преломления воздуха  $n$  от единицы на высоте  $h$  над дорогой пропорционально концентрации воздуха  $N(h)$  на этой высоте:  $n(h) - 1 \propto N(h)$ , определите, на каком расстоянии от себя наблюдатель видит область «мокрого» асфальта.

В этой задаче предлагается считать, что температура воздуха уменьшается линейно с высотой от  $50^\circ\text{C}$  у поверхности дороги до  $20^\circ\text{C}$  на высоте 2 м. Глаза наблюдателя находятся на высоте 1,7 м. При температуре  $20^\circ\text{C}$  показатель преломления воздуха отличается от единицы на величину  $\Delta n = 4 \cdot 10^{-4}$ .

### Решение

Рассмотрим касающуюся дороги параболическую траекторию, вдоль которой распространяется луч. Введём систему координат, ось  $OY$  которой вертикальна, а ось  $OX$  горизонтальна, при этом начало координат совпадает с точкой, в которой луч касается дороги (см. рисунок). Уравнение траектории луча в этой системе координат имеет вид  $y = kx^2$ , где  $k$  — неизвестный коэффициент.



Человеку, располагающемуся в точке  $C$ , будет казаться, что лужа на асфальте находится в точке  $W$  (а не в точке  $O$ ), поскольку мозг человека «привык» к прямолинейному ходу лучей света.

Если  $H$  — высота, на которой располагаются глаза человека, то искомое расстояние равно

$$L = H \operatorname{ctg} \alpha, \quad (7)$$

где  $\alpha$  — угол между касательной, проведённой к траектории луча на высоте глаз, и осью  $OX$ . Таким образом, задача сводится к нахождению любой тригонометрической функции угла  $\alpha$ .

Из закона преломления следует, что показатель преломления  $n(y)$  в точке с координатой  $y$  удовлетворяет соотношению

$$n(y) \cos \alpha(y) = n(0). \quad (8)$$

где  $\alpha(y)$  — угол наклона касательной, проведённой к траектории луча в точке с координатой  $y$ . Из формулы (8) выражается косинус искомого угла:

$$\cos \alpha = \frac{n(0)}{n(H)}. \quad (9)$$

Используя основное тригонометрическое тождество, из соотношений (7) и (9) можно исключить угол. Тогда для расстояния  $L$  имеем формулу

$$L = H \frac{n(0)}{\sqrt{n^2(H) - n^2(0)}},$$

которую можно заменить приближённой (почти не потеряв в точности), если вспомнить, что показатели преломления  $n(H)$  и  $n(0)$  крайне незначительно отличаются от единицы. Применив к разности квадратов под корнем в знаменателе формулу сокращённого умножения, и заменив сумму показателей преломления на 2, получим:

$$L = \frac{H}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n(H) - n(0)}}. \quad (10)$$

Давление воздуха у поверхности дороги и на высоте  $H$  от неё одинаковое, поэтому концентрация воздуха, а следовательно и отклонение показателя преломления от единицы, изменяются обратно пропорционально температуре. Справедливо соотношение

$$\frac{n(H) - n(0)}{\Delta n} = \frac{\frac{1}{T(H)} - \frac{1}{T(0)}}{\frac{1}{T_0}},$$

из которого следует расчётная формула

$$n(H) - n(0) = \Delta n \cdot \left( \frac{T_0}{T(H)} - \frac{T_0}{T(0)} \right), \quad (11)$$

где  $T_0 = 293$  К,  $T(0) = 323$  К, а температура воздуха на высоте глаз человека легко находится из условия линейности распределения температуры с высотой:  $T(H) = T_0 + 30 \cdot \frac{0,3}{2}$  К = 297,5 К. Делая аккуратный расчёт по формуле (11), и подставляя результат в (10), получаем ответ  $L \approx 216$  м.

Ответ:  $L = (215 \pm 10)$  м.

#### 4. Сжатие, расширение

Крюков П. А.

В вертикальном цилиндре, закрытом поршнем, находится некоторое количество идеального газа, молярная теплоёмкость которого при постоянном объёме  $c_V$  в условиях этой задачи равна  $\frac{5R}{2}$ . Конструктивные особенности цилиндра таковы, что поршень может удерживаться неподвижно специальными защёлками в двух положениях 1 и 2, при этом в положении 1 объём газа под поршнем на 1 % больше, чем в положении 2.

Сначала поршень находится в положении 1, температура газа в цилиндре равна температуре окружающей среды. Поршень быстро (так что теплообмен с окружающей средой не успевает произойти) сдвигают в положение 2, в котором

поршень фиксируется защёлками. После этого в течение некоторого времени происходит выравнивание температур газа и окружающей среды, а по окончании этого процесса поршень также быстро, как при сжатии газа, возвращается в положение 1, в котором он опять фиксируется защёлками, после чего некоторое время происходит теплообмен с окружающей средой и выравнивание температур. В итоге газ под поршнем возвращается в исходное состояние: его температура и объём становятся такие же, как в начале процесса.

Эта последовательность (иначе говоря, цикл) процессов, которые предлагается считать квазистатическими, повторяется многократно. Температуру окружающей среды можно считать почти постоянной в течение одного цикла.

А. Охладится или нагреется воздух, окружающий цилиндр, после многократного повторения описанного цикла?

В. Для одного цикла определите отношение абсолютной величины работы, совершённой газом, к количеству теплоты, которое газ отдаёт окружающей среде на участке охлаждения.

Указание. Для малых изменений параметров идеального газа  $(T, p, V)$  из уравнения состояния следует формула:

$$\nu R \Delta T = V \Delta p + p \Delta V,$$

где  $\nu$  — количество вещества, а  $R$  — универсальная газовая постоянная.

#### Решение

А. С газом производится цикл, состоящий из двух адиабат и двух изохор. Над газом в цикле внешними силами совершается положительная работа, а газом, следовательно, отрицательная. Из первого начала термодинамики, записанного для всего цикла, следует, что количество теплоты, полученное газом за цикл, также отрицательное. Отсюда вывод — суммарно за цикл газ отдаёт теплоту, иначе говоря, нагревает окружающую среду. Мы имеем дело с тепловым двигателем наоборот или с механическим нагревателем.

Может показаться, что ответ изменится, если предположить, что окружающая среда находится в адиабатической оболочке. Однако, это не так. Действительно, из закона сохранения энергии следует, что внешние силы за большое время совершают над всей системой положительную работу, при этом температуры воздуха в комнате и цилиндре остаются всё время приблизительно равными, таким образом, внутренняя энергия воздуха в комнате и газа в цилиндре со временем

может только увеличиваться, а следовательно и температура — тоже.

В. Расчёт цикла можно сделать приближённо. На  $pV$ -диаграмме график цикла близок к параллелограмму с основанием, численно равным  $|\Delta p_V|$  (изменению давления при изохорном охлаждении) и высотой, равной  $|\Delta V|$  (модулю изменения объёма в адиабатическом процессе). Поэтому абсолютная величина работы газа за цикл (она же — модуль работы газа за цикл) равна

$$A = |\Delta p_V \Delta V|. \quad (12)$$

На участке изохорного охлаждения от газа отводится количество теплоты, равное

$$Q = \nu c_V \Delta T = \frac{5}{2} V |\Delta p_V|. \quad (13)$$

При выводе последнего соотношения использовалось равенство, данное в указании. Из формул (12) и (13) следует ответ

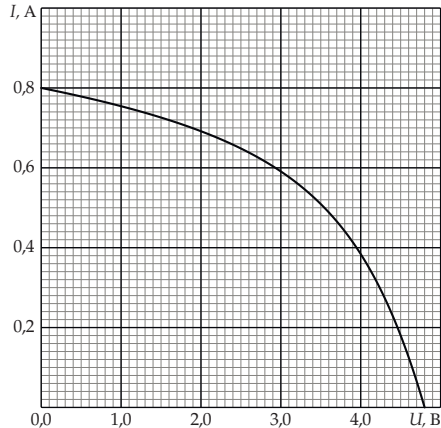
$$\frac{A}{Q} = \frac{2 |\Delta V|}{5 V} = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ: А) Воздух, окружающий цилиндр, нагреется; В)  $\frac{4}{5} (4,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$ .

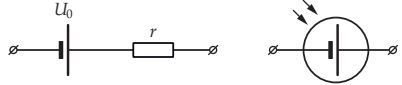
### 5. Источники

Крюков П. А.

На графике, приведённом ниже, можно видеть вольт-амперную характеристику специального источника напряжения — зависимость силы тока  $I$  через этот источник от разности потенциалов  $U$  положительного и отрицательного полюсов.



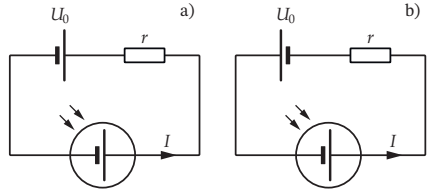
ВАХ источника, изображённая на графике, похожа на ВАХ солнечной батареи, поэтому далее мы называем этот источник солнечным, а на схеме ниже обозначаем его батарейкой в круге. Другой источник напряжения (далее называем его обычным) состоит из идеальной батарейки с напряжением  $U_0 = 2,4$  В между выводами и резистора сопротивлением  $r = 3$  Ом, как показано на рисунке слева.



Солнечный и обычный источники можно соединить параллельно или последовательно (разными способами), тогда получится новый источник напряжения. Чему равен ток короткого замыкания этого нового источника? Если к нему подключить резистор сопротивлением  $R = 1$  кОм, то чему будет равно напряжение на этом резисторе? Рассмотрите все возможные случаи.

### Решение

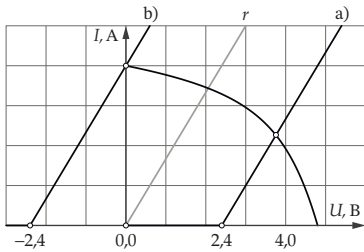
Есть четыре варианта соединения источников, а следовательно, восемь числовых значений, дающих ответы на вопросы задачи. Рассмотрим два варианта параллельного соединения источников (см. рисунок). Определим в каждом случае ток в цепи и напряжение на солнечном источнике.



Найдём сначала ток в схеме а). Можно рассуждать так. Если бы к источнику был подключен только резистор  $r$ , то напряжение на источнике и ток через него определялись бы графическим решением уравнения

$$I r = U_s(I), \quad (14)$$

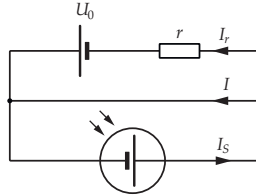
где  $U_s(I)$  — зависимость напряжения солнечного источника от тока, текущего через него, задаваемая вольт-амперной характеристикой. Следовало бы построить на графике ВАХ солнечного источника график функции  $I = \frac{U}{r}$  (линия серого цвета на рисунке, представленном ниже) и найти точку пересечения этого графика с ВАХ солнечного источника.



При подключении по схеме а) график правой части уравнения, подобного (14), получается из графика, построенного для резистора, сдвигом в сторону положительных напряжений на  $U_0 = 2,4$  В, поскольку суммарное падение напряжения увеличивается, а при подключении по схеме б) график, построенный для резистора, сдвигается на  $U_0$  в сторону отрицательных напряжений. Отмеченные на рисунке точки пересечения графиков характеризуют ток и напряжение на солнечном источнике для каждой из схем. Сделав построение на графике, данном в условии, находим ток  $I_a = 0,425$  А и напряжение на солнечном источнике:  $U_a = 3,75$  В в схеме а). Для схемы б) аналогичные ток и напряжение равны  $I_b = 0,8$  А и  $U_b = 0$  В. Легко видеть, что полученные значения дают 4 ответа на вопросы задачи. Действительно, токи  $I_a$  и  $I_b$  — это токи короткого замыкания при последовательном соединении источников  $I_{\text{пос}}^1$  и  $I_{\text{пос}}^2$ . Напряжение  $U_a$  (или  $U_b$ ) приближённо равно напряжению  $U_{\text{пар}}^1$  (или  $U_{\text{пар}}^2$ ) на резисторе сопротивлением  $R = 1$  кОм при подключении к

источникам, соединённым параллельно, поскольку при этом подключении через резистор будет течь пренебрежимо малый ток по сравнению с  $I_a$  (или  $I_b$ ).

Определим токи короткого замыкания в цепях с параллельным соединением источников. Рассмотрим схему, представленную на рисунке ниже.



Токи  $I_r$  и  $I_s$ , обозначенные на схеме, равны токам короткого замыкания обычного и солнечного источника соответственно и равны  $0,8$  А, поэтому ток  $I$  в цепи, представленной на рисунке, равен  $I_s - I_r = 0$ , другими словами  $I_{\text{тп}}^{(2)} = 0$ . При изменённой полярности подключения обычного источника, очевидно, получится  $I_{\text{тп}}^{(1)} = 1,6$  А.

Найти напряжение на резисторе сопротивлением  $R$  при подключении к последовательно соединённым источникам также несложно. Это напряжение равно сумме (или разности) напряжений на обычном и солнечном источнике при небольших (нулевых) токах. Легко видеть, что искомые напряжения равны  $U_{\text{тп}}^{(2)} = 7,2$  В и  $U_{\text{тп}}^{(1)} = 2,4$  В. Ответ:  $I_{\text{тп}}^{(1)} = (0,425 \pm 0,015)$  А,  $I_{\text{тп}}^{(2)} = 0,8$  А,  $I_{\text{тп}}^{(1)} = 1,6$  А,  $I_{\text{тп}}^{(2)} = 0$ ;  $U_{\text{тп}}^{(1)} = 2,4$  В,  $U_{\text{тп}}^{(2)} = 7,2$  В,  $U_{\text{тп}}^{(1)} = (3,75 \pm 0,15)$  В,  $U_{\text{тп}}^{(2)} = 0$ .

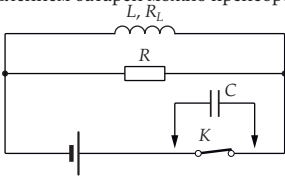


## Условия задач и ответы

## 1. Явления при размыкании

Крюков П. А.

В цепях с большой индуктивной нагрузкой ключ часто шунтируют конденсатором (подключают его параллельно ключу), подобно тому как это схематично показано на рисунке ниже. Предлагается рассмотреть две цепи, собранные по схеме, показанной на рисунке: в первой ключ зашунтирован, а во второй — нет. В обеих цепях изначально ключ замкнут, токи установились. Численные значения параметров цепей следующие:  $\mathcal{E} = 10$  В,  $R = 100$  Ом,  $R_L = 10$  Ом (сопротивление провода, которым намотана катушка),  $L = 0,1$  Гн,  $C = 1$  мкФ. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.



А. Определите отношение  $\frac{U_1}{U_2}$  напряжений на резисторе сразу после размыкания ключа в первой и второй цепи.

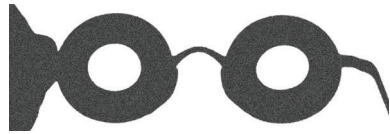
В. Найдите количество теплоты  $Q_1$ , выделяющееся после размыкания ключа в первой цепи, и количество теплоты  $Q_2$ , которое выделяется на резисторе  $R$  после размыкания ключа во второй цепи.

Ответ: А)  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_L}{R} = 0,1$ ; В)  $Q_1 = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2} \left(1 + \frac{CR_L^2}{L}\right) \approx 5 \cdot 10^{-2}$  Дж,  $Q_2 = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2} \cdot \frac{R}{R+R_L} \approx 4,5 \cdot 10^{-2}$  Дж.

## 2. Очки составителя

Крюков П. А.

Один из составителей заданий олимпиады носит очки в очень тонкой оправе, оптическая сила линз которых равна +2 дптр. Если эти очки снять с составителя и расположить их под светодиодной лампочкой, закреплённой на потолке комнаты, так, чтобы плоскости линз были параллельны полу, то на полу можно будет наблюдать резкую тень от оправы и линз, а также две ярко освещённые области в центрах теней линз (см. обработанный фрагмент фотографии ниже).



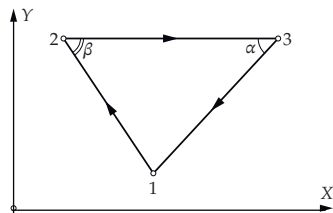
Считая лампочку точечным источником света, определите, на каком расстоянии от пола следует держать очки, чтобы диаметр светлого пятна в середине тени одной из линз был примерно в два раза меньше диаметра тени линзы. Высота потолка в комнате равна 3 м. Считайте, что линия, соединяющая лампочку и оптический центр линзы, перпендикулярна полу. Учтите, что искомое расстояние не должно быть больше 1 м.

Ответ: 27,5 см.

## 3. Расчёт цикла

Крюков П. А.

С одним молем идеального газа, молярная теплоёмкость которого при постоянном объёме  $c_V$  равна  $2R$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная, проводится циклический процесс 1231, график которого в логарифмических координатах ( $x = \ln \frac{V}{V_0}$ ,  $y = \ln \frac{p}{p_0}$ , где  $p_0$  и  $V_0$  — некоторые неизвестные постоянные) имеет форму треугольника с углами  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  и  $\beta = \arctg\left(\frac{3}{5}\right)$  (см. рисунок ниже). Отношение максимального давления газа к минимальному в этом процессе равно  $n$ .



А. Считая известной температуру  $T_1$  в точке 1, найдите температуры  $T_2$  и  $T_3$  в точках 2 и 3.

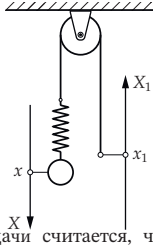
В. Определите КПД  $\eta$  цикла.

Ответ: А)  $T_2 = T_1 n^{\frac{1}{3}}$ ,  $T_3 = T_1 n^2$ ; В)  $\eta = 1 - \frac{5(n^2-1)}{6(n^2-n^{\frac{1}{3}})}$ .

**4. Вынуждают колебаться!**  
**Фольклор**

К одному концу невесомой нити, перекинутой через идеальный блок, присоединён пружинный маятник, состоящий из лёгкой пружины с тяжёлым шариком. Собственная частота колебаний маятника (в отсутствие затухания)

равна  $\omega_0$ . На другой конец нити действует такая внешняя сила, что начиная с нулевого момента времени его координата по вертикали меняется по закону  $x_1(t) = A \sin(\Omega t)$  (см. рисунок). В нулевой момент времени маятник находится в положении равновесия и не движется. В обеих частях задачи считается, что нить при колебаниях ни в один из моментов времени не провисает. Шарик движется только по вертикали и не раскачивается.



А. В этой части предлагается пренебречь всеми силами сопротивления. Тогда движение шарика будет представлять собой суперпозицию колебаний с частотами  $\Omega$  и  $\omega_0$ :

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t + \varphi) + C_2 \sin(\Omega t),$$

где  $x(t)$  — отклонение шарика от положения равновесия (см. рисунок),  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\varphi$  — неизвестные постоянные. Определите максимально возможное отклонение шарика от положения равновесия в следующих случаях:

A1)  $\Omega \gg \omega_0$ ; A2) (2 б.)  $\Omega \ll \omega_0$ .

В. В этой части предлагается учесть слабое затухание колебаний маятника. Предположим, что затухание обусловлено силой, пропорциональной скорости шарика и направленной против скорости. Тогда через некоторое время после начала процесса координата шарика будет изменяться периодически по гармоническому закону с частотой  $\Omega$ . Однако колебания шарика будут сдвинуты по фазе относительно колебаний конца нити, к которому прикладывается внешняя сила, на  $\varphi$ :

$$x(t) = C \sin(\Omega t + \varphi).$$

Определите абсолютное значение сдвига фаз  $\varphi$  при следующих значениях частоты  $\Omega$ :

B1)  $\Omega \gg \omega_0$ ,  $\Omega \ll \omega_0$ ; B2) (2 б.)  $\Omega = \omega_0$ .

Ответ: A1)  $x_{\max} = A \cdot \frac{\omega_0}{\Omega} \approx 0$  при  $\Omega \gg \omega_0$ ; A2)  $x_{\max} = A \left(1 + \frac{\Omega}{\omega_0}\right) \approx A$  при  $\Omega \ll \omega_0$ . B1)  $\pi$  и 0; B2)  $\frac{\pi}{2}$ .

Далее везде речь идёт о движении частицы с известными массой  $m$  и положительным зарядом  $q$ . Параметры  $U_0$ ,  $r_0$  и  $B$  также считаются известными во всех частях задачи, кроме части С.

А. Получите формулы для проекций  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$  вектора напряжённости электрического поля на оси системы координат и найдите отношение  $\frac{b}{a}$  безразмерных коэффициентов  $b$  и  $a$  в выражении для потенциала электростатического поля.

**Внимание!** Если вы не получили в части А отношение  $\frac{b}{a}$ , можете приступить к решению части С, считая это отношение известным параметром.

В. Пусть задан коэффициент  $b$ . Определите частоту колебаний  $\Omega_z$ , а также циклотронную частоту  $\Omega_0$  вращения частицы в магнитном поле при отсутствии электрического.

С. Выразите угловые скорости вращения частицы  $\omega^{(+)}$  и  $\omega^{(-)}$  по окружностям, дающим траекторию в виде эпитрохоиды, через параметры  $\Omega_z$  и  $\Omega_0$  ( $\sqrt{2}\Omega_z < \Omega_0$ );  $\omega^{(+)}$  — угловая скорость движения по окружности радиусом  $r$ ,  $\omega^{(-)}$  — угловая скорость вращения центра этой окружности. Радиусы окружностей  $r$  и  $R$  неизвестны. На рисунке выше ось  $OZ$  направлена на читателя, движение по обеим окружностям происходит в направлении против часовой стрелки.

Д. Для траектории в виде большей эпитрохоиды на рисунке выше (линия чёрного цвета), используя результаты предыдущих частей, определите безразмерные коэффициенты  $a$  и  $b$  в выражении для потенциала электростатического поля.

Ответ: А)  $E_x = \frac{aU_0x}{r_0^2}$ ,  $E_y = \frac{aU_0y}{r_0^2}$ ,  $E_z = -\frac{bU_0z}{r_0^2}$ ;  $\frac{b}{a} = 2$ .

В)  $\Omega_z = \sqrt{\frac{qB U_0}{m r_0^2}}$ ,  $\Omega_0 = \frac{qB}{m}$ . С)  $\omega^{(\pm)} = \frac{\Omega_0 \pm \sqrt{\Omega_0^2 - 2\Omega_z^2}}{2}$ .

Д)  $b = 2a = \frac{13}{98} \cdot \frac{qB^2 r_0^2}{m U_0}$ .

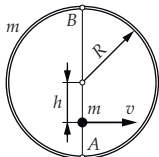


## Условия задач, авторские решения

## 1. Бильярд на льду

Ромашка М. Ю.

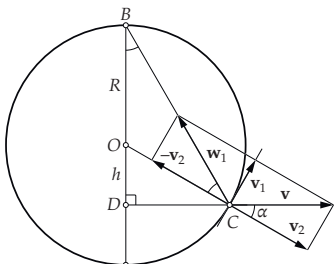
На ровную горизонтальную поверхность ледяного катка положили однородный тонкий обруч радиусом  $R$  и массой  $m$ . В точку, лежащую на диаметре обруча  $AB$ , на неизвестном расстоянии  $h$  от центра обруча поместили шайбу массой  $m$  и со-



общили ей скорость  $v$ , направленную перпендикулярно  $AB$ . Взаимодействие между шайбой и обручем абсолютно упругое. После столкновения с обручем шайба и обруч движутся так, что в следующий раз шайба попадает в точку  $B$  обруча. Радиус шайбы пренебрежимо мал, трения нет, обруч можно считать абсолютно твёрдым телом. Определите расстояние  $h$ .

## Решение

Задача может быть решена несколькими способами. Покажем лишь один из них, на наш взгляд относительно короткий. Используем данные условия: трения нет, столкновение абсолютно упругое, размеры шайбы пренебрежимо малы. Из них следует, что на обруч в момент касания действует сила, направленная по нормали, иначе говоря, вдоль радиуса, таким образом скорость обруча после столкновения направлена вдоль радиуса, проведённого в точку, где шайба коснулась обруча. После столкновения скорости шайбы и обруча ортогональны — известный факт, следующий из законов сохранения импульса и энергии, справедливый в случае абсолютно упругого столкновения тел одинаковой массы.



Дальнейшие рассуждения следуют из рисунка, приведённого выше. Векторы скоростей шайбы  $v_1$

и обруча  $v_2$  после столкновения, а также вектор скорости шайбы до столкновения  $v$  образуют прямоугольный треугольник с углом  $\alpha$ . Вектор скорости шайбы после столкновения относительно обруча  $w_1$  равен сумме векторов  $-v_2$  и  $v_1$ . Прямоугольный треугольник, образованный векторами  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v$ , равен прямоугольному треугольнику, образованному векторами  $v_1$ ,  $-v_2$  и  $w_1$ , поэтому соответствующие углы равны (помечены на рисунке дугами). В равнобедренном треугольнике  $COB$  углы при основании равны. Осталось заметить, что  $\angle DCO = \alpha$ , поскольку эти углы вертикальные. Таким образом, в прямоугольном треугольнике  $DCB$  один острый угол равен  $\alpha$ , а другой равен  $2\alpha$ . Отсюда следует равенство  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  и ответ:  $h = \frac{R}{2}$ .

Ответ:  $h = \frac{R}{2}$

## 2. Треугольники на тетраэдре

Крюков П. А., Бычков А. И.

На грани правильного тетраэдра, изготовленного из пенопласта (диэлектрическая проницаемость равна 1), наклеены одинаковые тонкие металлические пластины в форме правильных треугольников, почти совпадающие по размерам с гранями тетраэдра. Электрического контакта между пластинами нет. Заряд любой пластины изначально равен нулю. Если одной пластине сообщить заряд  $Q$ , то её потенциал будет равен  $\frac{Q}{C_0}$ . Если теперь заземлить любую незаряженную пластину, то потенциал заряженной окажется равен  $\frac{Q}{C}$ . Найдите разность потенциалов двух пластин, если на одну из них нанесён заряд  $Q$ , а заряд второй равен  $-Q$ , при условии, что другие две пластины не заряжены. Чему равна ёмкость конденсатора, одной обкладкой которого является любая пластина тетраэдра, а другой — три оставшиеся пластины, соединённые друг с другом идеальным проводником?

## Решение

Решение задачи основано на использовании принципа суперпозиции полей, из которого следует, например, линейная зависимость потенциала поля, создаваемого заряженным проводником, от заряда этого проводника.

Пусть заряд одной пластины тетраэдра равен  $Q$ , а другие пластины не заряжены, обозначим потенциал, создаваемый заряженной пластиной на любой из незаряженных пластин  $\varphi'$ . Из симметрии задачи следует, что заряженная пластина будет создавать одинаковый потенциал на любой из незаряженных. Если заряд  $Q$  изменится и станет равен  $q$ ,



то в силу линейности потенциал любой из незаряженных пластин станет равен  $\frac{q\varphi^k}{Q}$ . Теперь рассмотрим суперпозицию двух распределений зарядов и потенциалов:

1) на одной пластине заряд  $Q$ , заряд любой из оставшихся пластин равен нулю;

2) на другой пластине заряд  $q_0$ , заряд любой из оставшихся пластин равен нулю.

При этом величина заряда  $q_0$  такова, что при наложении распределений зарядов 1 и 2 потенциал пластины, несущей заряд  $q_0$ , становится равен нулю. Отметим, что такое наложение не меняет поля внутри пластин поскольку в каждом из распределений они равны нулю. Распределение зарядов и потенциалов, полученное в результате наложения распределений 1 и 2, удовлетворяет условию задачи в случае, когда одна из пластин заменена. Таким образом, справедливо равенство

$$0 = \frac{q_0}{C_0} + \varphi'. \quad (1)$$

Первое слагаемое в равенстве (1) есть потенциал, создаваемый пластиной, несущей заряд  $q_0$  в распределении 2, второе слагаемое — потенциал, создаваемый первой пластиной на второй в распределении 1. Аналогично для потенциала пластины с зарядом  $Q$  имеем соотношение

$$\frac{Q}{C_1} = \frac{Q}{C_0} + \frac{q_0\varphi'}{Q}. \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) образуют систему уравнений, решив которую, можно найти неизвестный потенциал

$$\varphi' = \frac{Q}{C_0} \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}}. \quad (3)$$

Запишем соотношения, подобные (1) и (2), для случая, когда заряд одной пластины равен  $Q$ , а заряд другой равен  $-Q$ :

$$\varphi_1 = \frac{Q}{C_0} - \varphi', \quad \varphi_2 = -\frac{Q}{C_0} + \varphi'.$$

Вычитая из первого равенства второе, и учитывая соотношение (3), получим искомую разность потенциалов

$$\Delta\varphi = 2 \left( \frac{Q}{C_0} - \varphi' \right) = \frac{2Q}{C_0} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}} \right).$$

Чтобы получить ответ на второй вопрос, следует рассмотреть суперпозицию четырёх распределений: заряд первой пластины равен  $Q$ , заряды остальных равны нулю; заряд  $n$ -ой пластины ( $n = 2, 3, 4$ ) равен  $-\frac{Q}{3}$ , заряды остальных пластин равны нулю. Каждая из пластин с зарядом  $-\frac{Q}{3}$  создаёт на любой соседней потенциал  $-\frac{\varphi'}{3}$ , поэтому после наложения четырёх распределений потенциал первой пластины будет равен

$$\varphi_1 = \frac{Q}{C_0} - 3 \cdot \frac{\varphi'}{3}, \quad (4)$$

а потенциал любой из оставшихся, например второй, равен

$$\varphi_2 = -\frac{Q}{3C_0} - 2 \cdot \frac{\varphi'}{3} + \varphi'. \quad (5)$$

Вычитая из равенства (4) равенство (5), находим, учитывая формулу (2), напряжение на рассматриваемом конденсаторе

$$U = \frac{4}{3} \left( \frac{Q}{C_0} - \varphi' \right) = \frac{4Q}{3C_0} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}} \right).$$

Откуда для искомой ёмкости имеем ответ

$$C = \frac{3}{4} \cdot \frac{C_0}{1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}}}.$$

Решение может быть получено и другими способами. Например, можно дать решение, используя потенциальные или ёмкостные коэффициенты, представив потенциал любой пластины в виде линейной комбинации зарядов других пластин. Также можно использовать теорему взаимности в формулировке Грина. Любой из возможных способов решения на самом деле в основе своей имеет фундаментальный принцип суперпозиции полей.

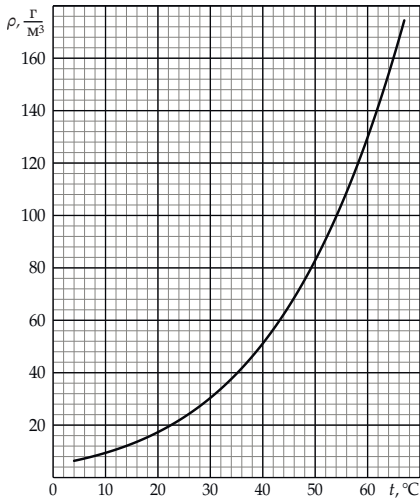
Ответ:  $\Delta\varphi = \frac{2Q}{C_0} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}} \right)$ ;  $C = \frac{3}{4} \frac{C_0}{1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}}}$ .

### 3. В сосуде

Крюков П. А.

В невесомости в высоком цилиндрическом сосуде с площадью основания  $0,05 \text{ м}^2$  находится вода массой  $m$  в жидком состоянии и влажный воздух, давление которого в любой точке сосуда равно внешнему давлению  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ , а температура равна температуре воды и равна  $t = 65^\circ\text{C}$ . Сосуд открыт сверху, поэтому относительная влажность воздуха в сосуде вследствие диффузии меняется линейно в зависимости от расстояния  $x$  до его дна, покрытого водой. Можно считать, что вблизи дна влажность равна 100%, а на расстоянии  $H = 1 \text{ м}$  от дна она уменьшается до 20%. График зависимости плотности насыщенных паров воды от температуры показан на приведённом ниже рисунке.

Молярные массы сухого воздуха и воды равны  $29 \text{ г/моль}$  и  $18 \text{ г/моль}$  соответственно. Универсальная газовая постоянная равна  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .



А. (4 балла) Пусть в начальный момент масса воды в жидком состоянии равна  $m_1 = 32$  г. Сосуд герметизируют, устанавливая специальную тонкую жёсткую задвижку на высоте  $H = 1$  м. После этого температуру в сосуде медленно увеличивают до  $100^\circ\text{C}$ . Найдите давление в сосуде в конечном состоянии.

В. (5 баллов) В этом случае начальная масса жидкости в сосуде равна  $m_2 = 1,2$  г. На расстоянии  $H$  от дна сосуда устанавливают поршень, который может скользить без трения вдоль оси сосуда. После этого температуру в сосуде начинают медленно уменьшать. Найдите расстояние от дна сосуда до поршня при температуре  $60^\circ\text{C}$  и  $10^\circ\text{C}$ .

### Решение

Отметим сразу модельный характер задачи, оставая за скобками вопрос о том, как описанные в формулировке условия могли быть достигнуты. На момент герметизации сосуда в части А или установив в нём поршня, как в части В, в сосуде имеется линейное распределение плотности пара, а также линейное распределение плотности сухого воздуха, поскольку давление и температура в любых двух точках сосуда одинаковы. Из условия линейности и данных задачи можно найти массы сухого воздуха и воды в газообразном состоянии, содержащихся в пространстве внутри цилиндра от дна до высоты  $H = 1$  м. Очевидно, объёмом жидкой воды можно пренебречь, что впрочем легко подтвердить численными оценками.

Итак, в исходном состоянии масса паров в объёме, соответствующем высоте  $H$ , равна

$$M_1 = \bar{\rho}_1 HS = 0,6 \cdot 160 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ г} = 4,8 \text{ г.} \quad (6)$$

В этой формуле  $\bar{\rho}_1 = \frac{\rho_1(0) + \rho_1(H)}{2}$  — средняя плотность паров в сосуде, равная среднему арифметическому плотностей у дна и на высоте  $H$  вследствие линейности распределения плотности. Рассчитаем давление насыщенного пара воды при температуре  $t = 65^\circ\text{C}$ :

$$p_1^{(\text{нас})} = \frac{\rho_1(0)RT}{\mu_1} = 24,9 \text{ кПа.} \quad (7)$$

Масса сухого воздуха в объёме, соответствующем высоте  $H$ , в исходном состоянии равна

$$M_2 = \bar{\rho}_2 HS = \frac{p_0 - 0,6p_1^{(\text{нас})}}{RT} \mu_2 \cdot HS = 43,6 \text{ г.} \quad (8)$$

В обеих частях задачи после установки перегородки или поршня в сосуде установится состояние теплового равновесия (поскольку все процессы происходят очень медленно по условию), плотность воздуха будет одинаковой в разных точках сосуда, то же самое можно сказать о плотности паров.

А. В этой части сначала следует сделать оценку и понять, в каком состоянии будут находиться пары воды при температуре  $T_A = 373$  К. Предположим, что вся вода массой  $m_1 + M_1$  находится в газообразном состоянии, тогда её давление равно

$$p' = \bar{\rho}_2 HS = \frac{(m_1 + M_1)RT_A}{\mu_1 HS} = 126 \text{ кПа,}$$

что больше давления насыщения воды  $100$  кПа при температуре  $T_A$ , следовательно часть воды будет находиться в жидком состоянии, а оставшаяся часть будет находиться в состоянии насыщения и создавать давление, равное  $100$  кПа.

Воздух при температуре  $T_A$  создаёт давление, равное

$$p_{2A} = \frac{(M_2)RT_A}{\mu_2 HS} = 93 \text{ кПа.}$$

Таким образом, суммарное давление в сосуде будет равно  $p_A = 193$  кПа.

В. Сначала выясним в каком состоянии будет находиться после установки поршня при температуре  $T = 338$  К. Суммарная масса воды в этом случае равна  $6$  г и для того, чтобы плотность этой порции воды была равна плотности насыщенного пара ( $160 \text{ г/м}^3$ ), необходимо, чтобы объём сосуда был равен  $V' = \frac{6}{160} \text{ м}^3$ , при этом пар будет создавать давление, равное  $p_1^{(\text{нас})} \approx 25$  кПа. Но сухой воздух в объёме  $V'$  создаёт давление равное

$$p'' = \frac{(M_2)RT}{\mu_2 V'} = 112 \text{ кПа.}$$

Воздух при температуре  $T_A$  создаёт давление, равное

$$p_{2A} = \frac{(M_2)RT_A}{\mu_2 HS} = 93 \text{ кПа.}$$

Таким образом, суммарное давление в сосуде будет равно  $p_A = 193 \text{ кПа}$ .

В. Сначала выясним в каком состоянии будет находиться после установки поршня при температуре  $T = 338 \text{ К}$ . Суммарная масса воды в этом случае равна  $6 \text{ г}$  и для того, чтобы плотность этой порции воды была равна плотности насыщенного пара ( $160 \text{ г/м}^3$ ), необходимо, чтобы объём сосуда был равен  $V' = \frac{6}{130} \text{ м}^3$ , при этом пар будет создавать давление, равное  $p_1^{(\text{нас})} \approx 25 \text{ кПа}$ . Но сухой воздух в объёме  $V'$  создаёт давление равное

$$p'' = \frac{(M_2)RT}{\mu_2 V'} = 112 \text{ кПа.}$$

Таким образом, суммарное давление в сосуде будет больше давления  $p_0$ , что невозможно. Отсюда следует, что после установки поршня пар в сосуде будет ненасыщенный. При этом после выравнивания плотностей в объёме под поршнем и установления теплового равновесия, поршень будет располагаться на высоте

$$H_0 = \left( \frac{6}{18} + \frac{43,6}{29} \right) \cdot \frac{8,3 \cdot 338}{0,05 \cdot 10^5} \text{ м} = 1,03 \text{ м.} \quad (9)$$

Предположим, что после понижения температуры до  $333 \text{ К}$  пар не начнёт конденсироваться, тогда при этой температуре поршень будет располагаться на высоте

$$H_1 = H_0 \frac{333}{338} = 1,015 \text{ м.}$$

Легко видеть, что плотность пара при таком расстоянии от поршня до дна сосуда будет примерно равна  $120 \text{ г/м}^3$ , что ниже плотности насыщенного пара при температуре  $333 \text{ К}$ , как следует из графика. Следовательно, реализуется именно этот случай и сделанное предположение было верным.

При температуре  $283 \text{ К}$  давление насыщенного пара воды, как следует из графика и уравнения состояния, равно  $1,2 \text{ кПа}$ , поэтому воздух должен создавать давление не менее  $98,8 \text{ кПа}$ . Будем считать, что часть пара конденсируется, а оставшаяся часть создаёт давление, равное давлению насыщения (убедимся в этом позднее, сделав оценку). Искомая высота находится из уравнения состояния, записанного для воздуха  $H_2 = \frac{43,6}{29} \cdot \frac{8,3 \cdot 283}{5 \cdot 98,8} = 0,72 \text{ м}$ .

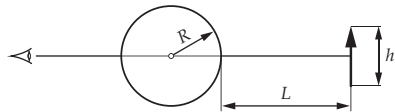
**Ответ:** А)  $p_A = (193 \pm 8) \text{ кПа}$ ; В)  $H_1 = (1,01 \pm 0,015) \text{ м}$ ;  $H_2 = (0,72 \pm 0,02) \text{ м}$ .

#### 4. Через шар

Крюков П. А.

В этой задаче предлагается проанализировать изображение плоских предметов в прозрачном шаре радиусом  $R$ , изготовленном из стекла с показателем преломления  $n = \frac{3}{2}$ . Во всех частях задачи можно считать линию зрения перпендикулярной плоскости предмета, а центр шара — лежащим на линии зрения, как показано на схематичном рисунке ниже. Предлагается рассматривать только те изображения, которые формируются параксиальными (приосевыми) лучами.

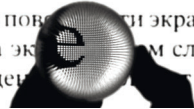
Линейным увеличением  $\beta$  назовём отношение перпендикулярного линии зрения размера изображения  $h'$  к соответствующему размеру предмета  $h$ .



А. (4 балла) В шаре наблюдают изображение удалённого предмета размером  $h$ . Расстояние от шара до предмета равно  $L$ ;  $L \gg R$ ,  $L \gg h$  (см. рисунок выше). Определите зависимость  $\beta(L)$ .

В. (6 баллов) Шар прислонили к поверхности экрана компьютерного монитора. С каким увеличением  $\beta$  можно видеть буквы (и отдельные пиксели) на экране в этом случае?

Исключили к поверхности экрана. С какими увеличениями можно видеть буквы на экране в этом случае? Линейное увеличение на экране, создаваемое шаром, зависит от расстояния

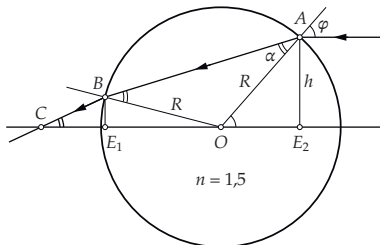


С. (4 балла) На приведённом выше фрагменте фотографии экрана компьютерного монитора, к которому прижали стеклянный шар, наблюдается увеличенное в шаре изображение пикселей.

Пусть шар радиусом  $R = 2 \text{ см}$  прижали к экрану монитора и сфотографировали с расстояния  $S = 1 \text{ м}$ , при этом центр шара находился вблизи оптической оси объектива, перпендикулярной плоскости экрана. Разрешение монитора составляло  $2560 \times 1440$  пикселей, а длина диагонали экрана —  $32$  дюйма. Размеры светочувствительной матрицы фотоаппарата были равны  $23,5 \times 15,6 \text{ мм}$ . Оказалось, что изображение в шаре горизонтального отрезка экрана из  $20$  пикселей занимает на фотографии чуть больше  $100$  точек при размере длинной стороны фотографии  $3000$  точек. Определите по этим данным фокусное расстояние  $F$  объектива фотоаппарата. Учтите, что  $F \ll S$ ,  $1 \text{ дюйм} \approx 2,54 \text{ см}$ .

## Решение

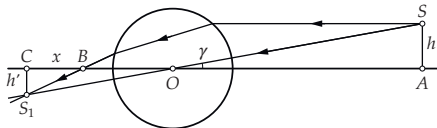
Предварительно проанализируем преломление в шаре луча, идущего параллельно главной оптической оси. Рассмотрим рисунок, представленный ниже. Напомним, что согласно условию задачи рассматриваются только параксиальные лучи, так что для расстояния  $h$  (см. рисунок) справедливо сильное неравенство  $h \ll R$ , поэтому угол падения равен  $\varphi = \frac{h}{R}$ .



Имеет смысл сразу подставлять значение показателя преломления, поскольку решение в общем виде влечёт неоправданное усложнение вычислений. Из закона преломления следует, что  $\alpha = \frac{2\varphi}{3}$ . Далее из геометрических соображений ( $\triangle AOB$  равнобедренный) получается равенство  $\angle BOE_1 = \frac{\varphi}{3}$ , поэтому  $BE_1 = \frac{h}{3}$ . Легко видеть, что выходящий из шара луч идёт под углом  $\varphi$  к радиусу  $OB$  (из закона преломления), поэтому  $\angle BCE_1 = \frac{2\varphi}{3}$ . Отсюда делается важный для дальнейшего вывод о том, что выходящий из шара луч пересекает оптическую ось на расстоянии  $CE_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{3}{2\varphi} = \frac{R}{2}$ .

А. Получить ответ на вопрос этой части можно двумя способами. При решении первым способом находится точка пересечения двух «удобных» лучей, формирующих изображение. Во втором способе шар представляется в виде комбинации двух плосковыпуклых линз, разделённых плоскопараллельной пластинкой толщиной  $2R$ .

Рассмотрим первый способ. На рисунке, представленном ниже, показан ход двух параксиальных лучей от источника, расположенного в точке S.



Из предварительного анализа следуют равенства:  $OB = \frac{3R}{2}$ ,  $\angle CBS_1 = \frac{2\varphi}{3}$ . Напомним, что  $\varphi = \frac{h}{R}$  — угол падения луча, параллельного главной оптической оси. Легко видеть, что  $\gamma = \frac{h}{L+R} \approx \frac{h}{L}$ .

Можно составить уравнение

$$\left(\frac{3R}{2} + x\right) \cdot \gamma = x \cdot \frac{2\varphi}{3},$$

из которого найти  $x$ . Получится

$$x = \frac{3R}{2} \cdot \frac{\gamma}{\frac{2\varphi}{3} - \gamma}. \quad (10)$$

Углы  $\gamma$  и  $\varphi$  — малые, но  $\gamma \ll \varphi$ , поскольку  $L$  значительно больше  $R$ , поэтому углом  $\gamma$  в знаменателе можно пренебречь. Тогда для размера изображения из (10) получим формулу

$$h' = x \cdot \frac{2\varphi}{3} = \frac{3R\gamma}{2} = \frac{3Rh}{2L}, \quad (11)$$

из которой следует ответ

$$\beta = \frac{h'}{h} = \frac{3R}{2L}. \quad (12)$$

При решении вторым способом следует сначала определить фокусное расстояние плосковыпуклой линзы, радиус сферической поверхности которой равен  $R$ . Для заданного показателя преломления ( $n = \frac{3}{2}$ ) фокусное расстояние равно

$$f = \frac{R}{n-1} = 2R. \quad (13)$$

Поскольку предмет располагается очень далеко, его изображение в первой линзе лежит в её фокальной плоскости и изображается с увеличением

$$\beta_1 = \frac{f}{L} = \frac{2R}{L}. \quad (14)$$

Это изображение является действительным и находится слева от первой линзы. Плоско-параллельная пластинка размер изображения не меняет, но сдвигает его на расстояние  $d = 2R \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2R}{3}$  в сторону распространения лучей (иначе говоря, влево). Таким образом получается, что фиктивный предмет для второй линзы лежит на расстоянии  $\frac{2R}{3}$  от неё слева (в области, которая считается «мнимой» для предметов при расчётах по формуле линзы). Применяя для второй линзы формулу линзы с учётом выражения для фокусного расстояния (13), получаем равенства:

$$\frac{1}{2R} = -\frac{3}{2R} + \frac{1}{a'}, \Rightarrow a' = \frac{R}{2},$$

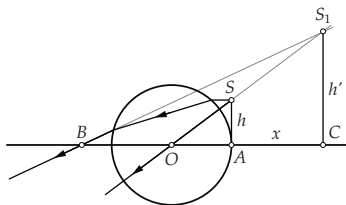
из которых следует, что во второй линзе фиктивный предмет изображается в увеличении

$$\beta_2 = \frac{R}{2} \cdot \frac{3}{2R} = \frac{3}{4}. \quad (15)$$

Перемножив увеличения (14) и (15), получим тот же ответ (12), что и при решении первым способом.

В. В этом случае расчёт основывается на предварительном анализе, сделанном в начале решения. Получается мнимое изображение.

Ход лучей показан на рисунке, представленном ниже. Луч, идущий через центр шара, очевидно, не преломляется.



Напомним:  $\angle SOA = \varphi$ ,  $\angle S_1BC = \frac{2\varphi}{3}$ ,  $BO = \frac{3R}{2}$ . Найдём  $x$  из уравнения

$$\left(\frac{5R}{2} + x\right) \cdot \frac{2\varphi}{3} = (x + R) \cdot \varphi.$$

Получим  $x = 2R$ , откуда  $h' = 3h$ , так что ответ для увеличения:

$$\beta = \frac{h'}{h} = 3.$$

Решение также может быть получено и на основе формулы линзы.

С. В этой части задачи важно обратить внимание на сильное неравенство  $L \gg f$ , данное в условии. С физической точки зрения оно означает, что матрица фотоаппарата находится практически в фокусе собирающей линзы (объектива), следовательно увеличение, с которым изображение пикселей в шаре изображается на матрице равно  $\beta_0 = \frac{f}{L+2R}$ . Мы считаем, что  $L$  — расстояние до экрана, тогда до изображения пикселей в шаре расстояние  $L+2R$ , как следует из решения к предыдущей части. Далее требуется только аккуратный расчёт. Размер пикселя (его мы считаем квадратным) равен

$$d = 32 \cdot 25,4 \cdot \frac{16}{\sqrt{16^2 + 9^2}} \cdot \frac{1}{2560} \text{ мм.} \quad (16)$$

При записи равенства (16) использовался тот факт, что длины сторон экрана этого монитора относятся как 16 : 9 (это следует из жизненного опыта или данных задачи). Длина изображения отрезка на матрице равна

$$l_1 = 23,5 \cdot \frac{100}{3000} \text{ мм.} \quad (17)$$

Поскольку в шаре отрезок в 20 пикселей экрана изображается с увеличением 3, длина «предмета», который снимают на камеру равна  $l_0 = 3 \cdot 20d = 60d$ . Отношение  $\frac{l_0}{l_1}$  должно быть равно увеличению объектива  $\beta_0$ . Отсюда следует формула для определения фокусного расстояния

$$f = (L + 2R) \cdot \frac{l_1}{60d}. \quad (18)$$

Поскольку в условии не уточняется от какой точки отсчитывается расстояние  $L$  формула для фокусного расстояния может несколько отличаться от (18). Например, множитель перед дробью может быть равен  $L + 4R$ , если под  $L$  понимается расстояние от объектива до шара. Впрочем, это совсем не катастрофически влияет на ответ. Подставляя в (18) значение  $d = 0,2767$  мм, вычисленное по формуле (16), а также значение  $l_1 = 0,7833$  мм, вычисленное по формуле (17), получаем ответ:

$$f = (L + 2R) \frac{l_1}{60d} = 1040 \cdot \frac{0,7833}{60 \cdot 0,2767} \text{ мм} \approx 49 \text{ мм.}$$

На самом деле цифры подбирались по фотографии, сделанной на объектив с фокусным расстоянием 50 мм.

Ответ: А)  $\beta = \frac{3R}{2L}$ ; В)  $\beta = 3$ ; С)  $f = (49 \pm 2) \text{ мм}$ .

## 5. Аналогии

Крюков П. А. по мотивам EuPho 2020.

А. В вакууме, в области, где нет зарядов и токов, электрическое и магнитное поля описываются одинаковыми с математической точки зрения дифференциальными уравнениями (с точностью до знаков и постоянных множителей), поэтому картины линий этих полей вдали от источников очень похожи. Например, напряжённость поля точечного электрического диполя ( $\vec{p} = ql^*$  — дипольный момент) в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$  даёт формулой

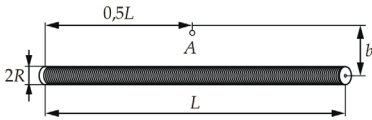
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right),$$

которая превращается в формулу для индукции магнитного поля витка с током (магнитного диполя) при замене:  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ;  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$ ;  $\vec{p} \rightarrow \vec{\mu}$ ;  $\vec{\mu} = IS\vec{n}$  — магнитный момент витка площадью  $S$  с током  $I$ ,  $\vec{n}$  — вектор единичной нормали к плоскости витка.

Рассмотрим соленоид с количеством витков  $N$  ( $N \gg 1$ ) длиной  $L$ , намотанный достаточно тонким проводом виток к витку на полой цилиндрической немагнитный сердечник с радиусом основания  $R$  ( $R \ll L$ ). По виткам соленоида течёт ток  $I$ .

А1) На большом расстоянии от витков соленоида его поле эквивалентно полю двух фиктивных магнитных зарядов, расположенных на торцах соленоида. Найдите модуль магнитного заряда  $Q_M$  любого из торцов соленоида.

А2) Чему равна индукция магнитного поля соленоида в точке  $A$  (см. рисунок) на расстоянии  $b$  ( $b \gg R$ ,  $b \ll L$ ) от его оси?



А3) Найдите индукцию магнитного поля соленоида в точке, лежащей вне соленоида на его оси на расстоянии  $h$  ( $R \ll h \ll L$ ) от его торца.

В. Аналогию можно развить, обратив внимание на то, что напряжённость вихревого электрического поля, порождаемого изменяющимся магнитным полем бесконечного соленоида, на расстоянии, много большем радиуса соленоида, описывается соотношением, очень похожим на

формулу  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  для индукции магнитного поля прямолинейного провода с током  $I$  на расстоянии  $r$  от него.

В1) Найдите напряжённость вихревого электрического поля на расстоянии  $b$  от оси очень длинного цилиндрического соленоида радиусом  $a$  ( $b > a$ ), магнитное поле в котором изменяется с известной скоростью  $\frac{dB}{dt}$ .

Тонкую цилиндрическую трубку с радиусом основания  $r$  и длиной  $2\pi R$  ( $R \gg r$ ) из немагнитного материала согнули в кольцо, на которое после намотки  $N$  ( $N \gg 1$ ) витков тонкого провода виток к витку, так что получилась тороидальная катушка. Выводы катушки подключили к специальному источнику напряжения, в итоге ток в катушке в зависимости от времени начал изменяться по закону  $I(t) = kt$ , где  $k$  — известная постоянная.

В2) Определите напряжённость вихревого электрического поля в центре тора.

В3) На главной оси тора на расстоянии  $h$  от него ( $h \gg R$ ) располагается точечный заряд  $q$ . Какая сила действует на заряд со стороны вихревого электрического поля?

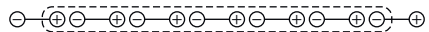
### Решение

В последний момент задача была значительно упрощена по сравнению с первоначальным вариантом, тем не менее основная идея осталась неизменной. Было бы глупо утверждать, что автор не знаком с одним из решений первой задачи Европейской олимпиады по физике 2020 года, в котором длинный соленоид заменился на два магнитных за-ряда. Конечно, знаком. Между тем, как выяснилось, сама идея введения фиктивных магнитных зарядов не нова, так что этот приём, вероятно, можно считать «широко известным в узких кругах».

### Решение

В последний момент задача была значительно упрощена по сравнению с первоначальным вариантом, тем не менее основная идея осталась неизменной. Было бы глупо утверждать, что автор не знаком с одним из решений первой задачи Европейской олимпиады по физике 2020 года, в котором длинный соленоид заменился на два магнитных за-ряда. Конечно, знаком. Между тем, как выяснилось, сама идея введения фиктивных магнитных зарядов не нова, так что этот приём, вероятно, можно считать «широко известным в узких кругах».

А. Решение следует из условия. Соленоид можно представить как цепочку магнитных диполей. Далее можно рассуждать, например, качественно. При расчёте поля цепочки электрических диполей поля располагающихся рядом друг с другом положительного и отрицательного зарядов взаимно уничтожаются, поэтому освещённые на рисунке пунктиром заряды можно исключить из дальнейшего анализа. Похожее рассуждение обычно делается при рассмотрении электрического поля в ди-электрике.



Таким образом, цепочка эквивалентна двум зарядам, расположенным на расстоянии длины цепочки друг от друга. Магнитный момент  $\mu = IS$  выражается через магнитный заряд  $Q_M$ :  $\mu = Q_M l$ , где  $l = \frac{L}{N}$ , поскольку количество диполей  $N$  равно количеству витков соленоида. Отсюда следует формула для величины магнитного заряда

$$Q_M = \frac{IN\pi R^2}{L}. \quad (19)$$

Отметим, что цепочка магнитных диполей представляет собой модель очень длинного полосового магнита, а цепочка электрических диполей похожа на длинный стержень с «замороженной» поляризацией. Соленоид аналогичен двум магнитным зарядам в той области пространства, в которой любой из витков соленоида можно рассматривать как точечный магнитный диполь. Иначе говоря, расстояние от рассматриваемой точки до любого из витков соленоида должно быть значительно больше радиуса витка. Очевидно, что это условие выполняется в п. А2 и п. А3.

Поскольку  $b \ll L$ , можно считать, что в точке  $A$  поля положительного и отрицательного магнитных зарядов сонаправлены. Для их нахождения используем формулу для напряжённости поля точечного заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2},$$

в которой заменим  $E$  на  $B$ , электрический заряд на магнитный, а константу  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  на  $\frac{\mu_0}{4\pi}$ , расстояние  $r$  в нашем случае очевидно равно  $\frac{L}{2}$ . После несложных преобразований, учитывая  $\frac{1}{2}$ , получаем ответ

$$B_A = \mu_0 \frac{2INR^2}{L^3}. \quad (20)$$

Более точный расчёт оказывается незначительно сложнее технически и в результате приводит к ответу

$$B_A = \mu_0 \frac{2INR^2}{L^3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{4b^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (21)$$

Отметим, что отличие приближённого ответа (20) от точного (21) становится заметно лишь в квадратичном по малому параметру  $\frac{b}{L}$  приближении.

Поскольку  $L \gg h$ , поле магнитного заряда, расположенного на расстоянии  $L + h$  от рассматриваемой точки, пренебрежимо мало. Таким образом, в этом случае магнитное поле равно

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Q_M}{h^2} = \mu_0 \frac{INR^2}{4Lh^2}. \quad (22)$$

Можно учесть влияние второго магнитного заряда и дать ответ в квадратичном по малому параметру  $\frac{h}{L}$  приближении:

$$B = \mu_0 \frac{INR^2}{4Lh^2} \left(1 - \frac{h^2}{L^2}\right).$$

Ответы (20) и (22) также можно найти, осуществив суммирование полей магнитных диполей, на которые разбивается катушка, однако это сопровождается некоторыми вычислительными неудобствами. Покажем, как производится суммирование при ответе на второй вопрос этой части задачи.

Рассмотрим систему координат, ось  $OY$  которой совпадает с осью катушки, а ось  $OX$  перпендикулярна ей, при этом начало координат находится в центре соленоида. Тогда суммирование вторых слагаемых вида  $\frac{\mu}{r^3}$  в формуле для индукции поля магнитного диполя сводится к вычислению интеграла

$$I_1 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{Q_M dy}{(b^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Заменой  $x = \frac{b^2}{y^2}$  этот интеграл сводится к интегралу от степенной функции. В результате получается соотношение

$$I_1 = \frac{Q_M y}{b^2 (b^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{2Q_M}{b^2 \left(1 + \frac{4b^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (23)$$

Аналогично суммирование первых слагаемых вида  $\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})}{r^5}$  сводится к вычислению интеграла

$$I_2 = 3 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{Q_M y^2 dy}{(b^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

который при помощи той же, что и в первом случае замены, сводится к интегралу от степенной функции. В итоге получается соотношение

$$I_2 = \frac{2Q_M}{b^2 \left(1 + \frac{4b^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (24)$$

Учитывая формулы (23) и (24), получим выражение для индукции магнитного поля в точке  $A$

$$B_A = \frac{\mu_0}{4\pi} (I_2 - I_1) = \frac{2\mu_0 Q_M}{\pi L^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{4b^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

подставив в которое соотношение (19) для магнитного заряда, приходим к формуле (21), а воспользовавшись сильным неравенством из условия ( $b < L$ ), к ответу (20).

Ответ в пункте А3 также можно получить, суммируя поля магнитных диполей. Действительно, индукция магнитного поля на оси кругового витка радиусом  $R$  с током  $I$  на расстоянии  $x$  от его плоскости даётся формулой

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (25)$$

поэтому суммирование полей всех витков катушки сводится к вычислению интеграла

$$I_3 = \int_h^{L+h} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интеграл такого вида уже вычислялся при выводе равенства (23). В рассматриваемом случае имеем формулу

$$I_3 = \frac{L+h}{R^2 (R^2 + (L+h)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{h}{R^2 (R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}},$$

которая, учитывая малость величин  $\frac{R}{h}$  и  $\frac{R}{L+h}$ , приводит к соотношению

$$I_3 = \frac{1}{2h^2} - \frac{1}{2(L+h)^2} \approx \frac{1}{2h^2}. \quad (26)$$

При выводе учтено сильное неравенство  $h \ll L$ .

Легко видеть, что из соотношений (25) и (26) следует ответ (22), полученный ранее при помощи аналогии, описанной в задаче, а также простых качественных рассуждений.

В. Установим сначала аналогию между электрическими и магнитными величинами в этой части задачи. Максвелловскую трактовку закона электромагнитной индукции отражает уравнение

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (27)$$

в левой части которого стоит циркуляция электрического поля по замкнутому контуру, а в правой — производная потока магнитного поля через поверхность, натянутую на этот контур.

Формулу для индукции магнитного поля прямолинейного провода с током можно получить из теоремы о циркуляции магнитного поля

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (28)$$

где  $I$  — суммарный ток, пронизывающий поверхность, натянутую на контур, по которому ведётся интегрирование в левой части уравнения (28). Сравнив уравнения (27) и (28) приходим к выводу, что заменой  $B \rightarrow E$  и  $\mu_0 I \rightarrow -\frac{d\Phi}{dt}$  второе уравнение сводится к первому. Это означает, что аналогом тока (как источника магнитного поля) является производная потока магнитного поля, являющаяся фактически источником вихревого электрического поля.

Ответ на первый вопрос этой части следует из закона электромагнитной индукции (27):

$$E \cdot 2\pi a = \pi a^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow E = \frac{a^2}{2b} \cdot \frac{dB}{dt}.$$

В этих соотношениях и далее везде не учитывается знак «-» перед производной потока, поскольку речь идёт об модуле напряжённости поля.

Чтобы получить ответ на второй вопрос, следует вспомнить формулу для индукции магнитного поля витка с током в его центре

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (29)$$

Эта формула выводится из закона Био-Савара. Заменяя в равенстве (29) произведение  $\mu_0 I$  на производную потока магнитного поля через сечение тора плоскостью, содержащей образующую тор окружность (плоскость любого витка тороидальной катушки), получим напряжённость электрического поля в центре тора

$$E_0 = \frac{\pi r^2}{2R} \cdot \frac{dB}{dt}. \quad (30)$$

Осталось найти зависимость индукции магнитного поля внутри тороидальной катушки от тока. Это нетрудно сделать, воспользовавшись теоремой о циркуляции магнитного поля (25), или на основе качественных соображений. Действительно, сильное неравенство из условия  $R \gg r$  позволяет рассматривать тор как соленоид длиной  $2\pi R$ , поле которого даётся формулой

$$B = \mu_0 I \frac{N}{L} = \mu_0 I \frac{N}{2\pi R}. \quad (31)$$

Можно легко убедиться в том, что из теоремы о циркуляции следует тот же результат. Подставляя соотношение (31) в формулу (30), и учитывая зависимость тока от времени, данную в условии, получаем ответ

$$E_0 = \mu_0 \frac{kNr^2}{4R^2}.$$

Ответ на последний вопрос может представлять только технические трудности. Сначала следует вывести формулу (25), дающую магнитное поле на оси кругового витка с током. Эта формула может быть легко получена суммированием магнитных полей элементов витка, которые находятся из закона Био-Савара. На больших расстояниях от витка (по сравнению с его радиусом) формула (25) принимает вид

$$B(x) = \frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}. \quad (32)$$

Заменяя произведение  $\mu_0 I$  в соотношении (32) на производную магнитного потока полностью аналогично тому, как это делалось в предыдущем вопросе, а также умножая на заряд (поскольку требуется найти силу), получаем ответ

$$F(h) = q \cdot \mu_0 \frac{kNr^2 R}{4h^3}.$$

Ответ: A1)  $Q_M = \frac{IN\pi R^2}{L}$ ; A2)  $B_A = \mu_0 \frac{2INR^2}{L^3}$ ; A3)  $B = \mu_0 \frac{INR^2}{4Lh^2}$ . B1)  $E = \frac{a^2}{2b} \cdot \frac{dB}{dt}$ ; B2)  $E_0 = \mu_0 \frac{kNr^2}{4R^2}$ ; B3)  $F(h) = q \cdot \mu_0 \frac{kNr^2 R}{4h^3}$ .



## Список рекомендуемой литературы

Ниже приведен список пособий и ресурсов сети «Интернет», которые могут быть полезны при подготовке к олимпиадам по физике. Также очень полезно познакомиться с публикациями в журнале «Квант», в особенности – со статьями и задачами, опубликованными в рубриках «Задачник "Кванта"», «Физический факультатив», «Практикум абитуриента», «Варианты вступительных испытаний» и «Олимпиады».

1. Зубов В.Г., Шальнов В.П. Задачи по физике. – М.: Гостехиздат, 1952. – 320 с. (и все последующие издания до 11-го, М.: Новая волна, 2000).

2. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В., Мякишев Г.Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1980. – 384 с. (и все последующие издания до 10-го, М.: Физматлит, 2003).

3. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике: Пособие для самообразования. – М.: Наука, 1964. – 440 с. (и все последующие издания до 7-го, М.: УНЦ ДО МГУ, 2004).

4. Буздин А.И., Ильин В.А., Кривченков И.В., Кротов С.С., Свешников Н.А. Задачи московских физических олимпиад / Под ред. С.С. Кротова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 192 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 60.) % 1968-1985 гг.

5. Варламов С.Д., Зинковский В.И., Семёнов М.В., Старокуров Ю.В., Шведов О.Ю., Якута А.А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005. Приложение: олимпиады 2006 и 2007. (изд. 2-е, испр. и доп.) / Под ред. Семёнова М.В., Якуты А.А. – М.: Изд-во МЦНМО, 2007. – 696 с.

6. Буздин А.И., Зильберман А.Р., Кротов С.С. Раз задача, два задача... – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 240 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 81.)

7. Слободецкий И.Ш., Асламазов Л.Г. Задачи по физике. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 176 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 5). А также 2-е изд. – М.: Бюро Квантум, 2001. – 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 86).

8. Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения. – М.: Просвещение, 1964 (и все последующие издания до 4-го, М.: Просвещение, 1983).

9. Задачи по физике: Учебное пособие / Под ред. О.Я. Савченко. – 4-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2001. – 368 с.

10. Лукашик В.И. Физическая олимпиада в 6--7 классах средней школы: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1987. – 192 с.

11. Гольдфарб Н.И. Физика. Задачник. 10--11 кл.: пособие для общеобразовательных учреждений. – М.: Дрофа, 2006. – 398 с. (и все предыдущие издания).

12. Страница Московской физической олимпиады на сервере Кафедры общей физики Физического факультета МГУ: <http://genphys.phys.msu.ru/ol/>

13. Веб-сайт «Олимпиады для школьников»: <http://info.olimpiada.ru/>

14. Материалы журнала «Квант» в интернете: <http://kvant.mccme.ru/>

15. Архив материалов газеты «Физика» (Издательский дом «Первое сентября»): <http://fiz.1september.ru>

16. Интернет-библиотека МЦНМО: <http://ilib.mccme.ru/>

17. IPhO – International Physics Olympiads. Материалы международных физических олимпиад (на английском языке). <http://ipho.phy.ntnu.edu.tw/>

18. Задачи вступительных испытаний и олимпиад по физике в МГУ (сборники за 2001–2017 гг.). – М.: Физический ф-т МГУ.

19. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. Практический курс для поступающих в университеты. – М.: Физматлит, 2006. – 544 с.

20. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Подготовка к вступительным испытаниям в МГУ. Физика. 770 задач с подробными решениями. – М.: «Макс пресс», 2009. – 456 с.

21. Вишнякова Е.А., Макаров В.А., Семенов М.В., Черепецкая Е.Б., Чесноков С.С., Якута А.А. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач. / Под ред. В.А. Макарова, М.В. Семёнова, А.А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект–Центр, 2010. – 368 с.

22. Всероссийские олимпиады по физике. 1992--2004 / Под ред. С.М. Козела, В.П. Слободянина. – 2-е изд., доп. – М.: Вербум-М, 2005. – 534 с.

## Содержание

<b>Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» .....</b>	<b>2</b>
Творческое задание отборочного этапа олимпиады для 10 и 11 классов .....	<b>3</b>
Творческое задание отборочного этапа олимпиады для 7, 8 и 9 классов .....	<b>19</b>
Задания заключительного этапа олимпиады .....	<b>30</b>
<b>83-я Московская олимпиада школьников по физике.....</b>	<b>48</b>
9 класс .....	48
10 класс .....	54
11 класс, тур 1.....	60
11 класс, тур 2.....	62
<b>Список рекомендуемой литературы .....</b>	<b>71</b>

Подписано в печать 21.10.2022.  
Формат А5. Объем 4,5 п.л. Тираж 300 экз.  
Заказ №

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова  
119991 Москва, Ленинские горы, д. 1, стр.2

Отпечатано в отделе оперативной печати  
Физического факультета МГУ

Вниманию старшеклассников и абитуриентов предлагается серия пособий, подготовленных преподавателями физического факультета МГУ



Эти пособия издаются ежегодно и содержат задания олимпиад и профильных экзаменов по физике с подробными решениями и указаниями.

Приобрести пособия можно в книжном киоске, расположенном в вестибюле физического факультета МГУ.

Режим работы киоска: с 10 до 19 часов ежедневно, кроме выходных.

### ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы,  
<http://www.phys.msu.ru>

Отдел нового приема и работы со школьниками  
физического факультета МГУ  
8 (495) 939 12 41, [welcome@physics.msu.ru](mailto:welcome@physics.msu.ru)  
[vk.com/msuphys](http://vk.com/msuphys)