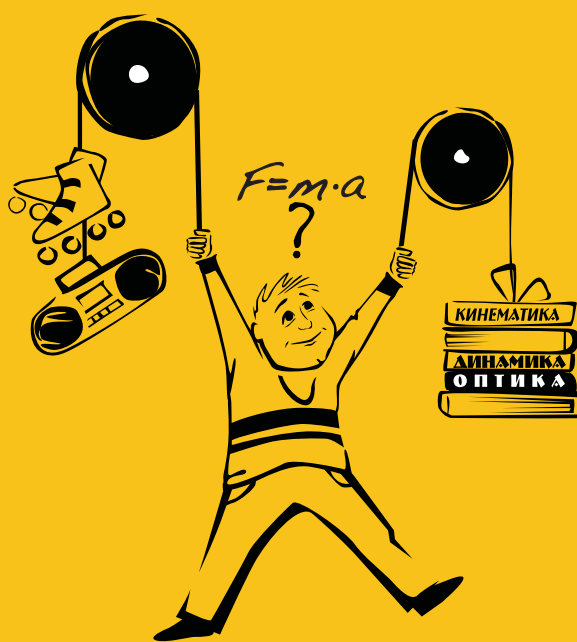




МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

**ЗАДАЧИ
ВСТУПИТЕЛЬНЫХ
ИСПЫТАНИЙ
И ОЛИМПИАД
ПО ФИЗИКЕ В МГУ – 2007**
(с подробными решениями)



Москва
2007

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

**ЗАДАЧИ
ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ
И ОЛИМПИАД
ПО ФИЗИКЕ В МГУ – 2007
(с подробными решениями)**

Москва
Физический факультет МГУ
2007

УДК 530.1
3153
ББК 74.58.729

**Задачи вступительных испытаний и олимпиад по физике
в МГУ – 2007** /Под ред. В.А. Макарова. – М.: Физический факультет
МГУ, 2007, – 140 с.: ил.
ISBN 978-5-8279-0071-9

Сборник содержит материалы вступительных испытаний по физике, проводившихся в МГУ в 2007 году. В начале сборника помещена Программа по физике для поступающих в МГУ. Далее следуют условия задач, предлагавшихся на вступительных испытаниях по физике на факультетах наук о материалах, биоинженерии и биоинформатики, ВМиК, а также на химическом, биологическом, физическом и физико-химическом факультетах МГУ. Кроме того, в сборник включены задачи устных олимпиад по физике «Абитуриент МГУ – 2007», «Ломоносов – 2007», а также задачи очных туров по физике совместного проекта МГУ и газеты «Московский комсомолец» «Покори Воробьевы горы».

В сборнике приведены также подробные решения всех задач, содержащие обоснования применимости используемых законов и допущений, а также анализ полученных ответов.

Для учащихся старших классов, абитуриентов, учителей и преподавателей, ведущих занятия по физике со школьниками.

Авторский коллектив:

Боков П.Ю., Буханов В.М., Грачев А.В., Зотеев А.В., Левшин Н.Л.,
Макаров В.А., Никитин С.Ю., Николаев И.П., Погожев В.А.,
Подымова Н.Б., Полякова М.С., Склянкин А.А., Старокуров Ю.В.,
Чесноков С.С., Чистякова Н.И., Шленов С.А., Шмальгаузен В.И.,
Якута А.А.

ISBN 978-5-8279-0071-9

© Авторский коллектив, 2007 г.
© Физический факультет МГУ, 2007 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Программа вступительных испытаний по физике	4	
	Условия	Решения
Факультет наук о материалах	15	53
Факультеты химический, биоинженерии и биоинформатики		
Вариант 1	18	57
Вариант 2	19	62
Вариант 3	21	68
Вариант 4	23	72
Биологический факультет	25	77
Факультет вычислительной математики и кибернетики		
I. Механика	27	83
II. Молекулярная физика и термодинамика	30	89
III. Электродинамика	32	93
IV. Оптика	36	99
Физический факультет		
I. Механика	38	103
II. Молекулярная физика и термодинамика	41	112
III. Электродинамика	42	115
IV. Оптика	44	119
Олимпиада «Ломоносов – 2007»		
I. Механика	45	121
II. Молекулярная физика и термодинамика	48	129
III. Электродинамика	49	132
IV. Оптика	51	137

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящая программа составлена на основе ныне действующих учебных программ для школ и классов с углубленным изучением физики.

При подготовке к экзамену основное внимание следует уделить выявлению сущности физических законов и явлений, умению истолковывать физический смысл величин и понятий, а также умению применять теоретический материал к решению задач. Необходимо уметь пользоваться при вычислениях системой СИ и знать внесистемные единицы, указанные в программе.

Глубина ответов на пункты программы определяется содержанием опубликованных учебников для школ и классов с углубленным изучением физики, указанных в конце настоящей программы.

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика

Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Система отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь.

Скорость. Сложение скоростей.

Ускорение. Сложение ускорений.

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. Зависимости скорости, координат и пути от времени.

Криволинейное движение. Движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности. Тангенциальное и нормальное ускорения.

Программа вступительных испытаний по физике

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.

Поступательное и вращательное движения твердого тела.

1.2. Динамика

Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принцип относительности Галилея.

Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.

Инертность тел. Масса. Плотность.

Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы

Третий закон Ньютона.

Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.

Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.

Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.

Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.

Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.

1.3. Законы сохранения в механике

Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и

Программа вступительных испытаний по физике

импульсом силы. Импульс системы материальных точек. Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы измерения работы и мощности.

Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Закон сохранения механической энергии.

1.4. Статика твердого тела

Сложение сил, приложенных к твердому телу. Момент силы относительно оси вращения. Правило моментов.

Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия тел.

1.5. Механика жидкостей и газов

Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт. ст.

Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.

Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.

Закон Архимеда для тел, находящихся в жидкости или газе. Плавание тел.

Движение жидкостей. Уравнение Бернулли.

1.6. Механические колебания и волны. Звук

Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.

Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волны. Скорость распространения волн. Фронт волны. Уравнение бегущей волны. Стоячие волны.

Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн.

Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Масса и размер молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.

Тепловое равновесие. Температура и ее физический смысл. Шкала температур Цельсия.

Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.

Уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.

2.2. Элементы термодинамики

Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоемкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изотермическому, изохорному и изобарному процессам. Расчет работы газа с помощью pV -диаграмм. Теплоемкость одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.

Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

2.3. Изменение агрегатного состояния вещества

Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.

Влажность. Относительная влажность.

Кристаллическое и аморфное состояние вещества. Удельная теплота плавления.

Уравнение теплового баланса.

2.4. Поверхностное натяжение в жидкостях

Сила поверхностного натяжения. Явления смачивания и несмачивания. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления.

2.5. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

Тепловое линейное расширение. Тепловое объемное расширение. Тепловое расширение жидкостей. Особенности теплового расширения воды.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. Электростатика

Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Проводники и диэлектрики. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.

Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряженность электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Теорема Гаусса. Поле равномерно заряженных плоскости, сферы и шара.

Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда. Эквипотенциальные поверхности.

Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Электроемкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.

Энергия электрического поля.

3.2. Постоянный ток

Электрический ток. Сила тока. Условия существования тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение.

Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников. Измерение силы тока, напряжения и сопротивления.

Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Правила Кирхгофа.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.

Электрический ток в металлах.

Электрический ток в электролитах. Законы электролиза.

Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа - диод. Электронно-лучевая трубка.

Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. *p-n* – переход и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Термистор и фоторезистор.

Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

3.3. Магнетизм

Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной индукции. Картины магнитного поля прямого тока и соленоида. Понятие о магнитном поле Земли.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетики.

3.4. Электромагнитная индукция

Магнитный поток. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции.

Энергия магнитного поля тока.

3.5. Электромагнитные колебания и волны

Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.

Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.

Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращение энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.

Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.

Открытый колебательный контур. опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн. Принципы радиосвязи.

4. ОПТИКА

4.1. Геометрическая оптика

Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.

Интенсивность (плотность потока) излучения. Световой поток. Освещенность.

Законы отражения света. Плоское зеркало. Сферическое зеркало. Построение изображений в плоском и сферическом зеркалах.

Программа вступительных испытаний по физике

Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения.

Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.

Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

4.2. Элементы физической оптики

Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света.

Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.

Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционная решетка.

Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.

Постулаты теории относительности (постулаты Эйнштейна). Связь между массой и энергией.

5. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

Опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц. Планетарная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение энергии атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.

Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмульсионный метод.

Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.

Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Физика: Механика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики /Под ред. Г.Я. Мякишева. – М.: Дрофа, 2001.
2. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
3. Мякишев Г.Я., Синяков А.З., Слободсков Б.А. Физика: Электродинамика. 10 – 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
4. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Колебания и волны. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
5. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
6. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Задачи по элементарной физике. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.
7. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.Г., Мякишев Г.Я. Физика. Для поступающих в вузы: Учебн. пособие. Для подготов. отделений вузов. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Элементарный учебник физики /под ред. Г.С. Ландсберга. В 3-х кн. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.
2. Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д. Физика. Справочное пособие. Для поступающих в вузы. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.
3. Физика. Учебники для 10 и 11 классов школ и классов с углубленным изучением физики /под ред. А.А. Пинского. – М.: Просвещение, 2000 и предшествующие издания.
4. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика. В 3-х кн. М.: Физматлит, 2001.
5. Павленко Ю.Г. Физика. Полный курс для школьников и поступающих в вузы: Учебн. пособие. – М.: Большая Медведица, 2002.
6. Сборник задач по физике /под ред. С.М. Козела – М.: Просвещение, 2000 и предшествующие издания.
7. Гольдфарб Н.И. Физика. Задачник. 9 – 11 кл.: Пособие для общеобразоват. учеб. заведений. – М.: Дрофа, 2000 и предшествующие издания.
8. Задачи по физике /под ред. О.Я. Савченко – М.: Наука, 1988.
9. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике в МГУ. – М.: Физический факультет МГУ, 1992 и последующие издания.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

ФАКУЛЬТЕТ НАУК О МАТЕРИАЛАХ

В соответствии с правилами приема на факультет наук о материалах, абитуриентам ФНМ предоставлена возможность сдавать на выбор один из вступительных экзаменов либо по химии, либо по физике. Экзамен по физике традиционно проводится в письменной форме и длится 4 часа, в течение которых нужно решить восемь задач. Результаты экзамена оцениваются по 10-балльной шкале. Ниже приводится задание по физике, предлагавшееся абитуриентам ФНМ в 2007 году.

1. Колонна автомашин длиной $l = 2$ км движется по прямой дороге со скоростью $v = 36$ км/ч. В момент времени, когда начало колонны поравнялось с мотоциклистом, он стартует и едет с постоянным ускорением $a = 0,1$ м/с² в направлении конца колонны. Доехав до конца, мотоциклист резко останавливается и с тем же по модулю ускорением едет обратно, к началу колонны. Пренебрегая временем, затраченным на изменение направления движения, найти путь, пройденный мотоциклистом к моменту достижения им начала колонны.

2. Сферическая планета радиусом R , состоящая из однородного вещества плотностью ρ , имеет атмосферу, основная часть которой сосредоточена вблизи поверхности планеты. Атмосферное давление на поверхности планеты равно p_0 . Пренебрегая вращением планеты вокруг ее оси, найти массу ее атмосферы. Гравитационная постоянная G .

3. Груз подвешенного к потолку пружинного маятника массой $m = 10$ г сместили вертикально вниз от положения равновесия на $x = 2$ см и, сообщив вертикально вверх скорость $v = 3$ см/с, отпустили. После этого груз стал совершать гармонические колебания, при которых максимальная скорость была равна $v_0 = 5$ см/с. Пренебрегая массой пружины, определить ее жесткость k .

4. В прочном закрытом баллоне находится молекулярный азот при температуре T_1 . Баллон начали нагревать, и часть молекул азота диссоциировала на атомы. При этом в баллоне установилось тепловое равновесие при температуре $T_2 > T_1$, а давление возросло в n раз. Найти, какая доля α от начальной массы азота распалась на атомы.

5. Для открывания рамы в теплице используют гидравлический подъемник, представляющий собой закрепленный теплопроводящий цилиндр, содержащий масло и закрытый поршнем. Когда температура в цилиндре увеличивается от t_1 до t_2 , поршень за счет расширения масла при нагреве перемещается на расстояние h , воздействуя на раму силой, среднее значение модуля которой равно F . При понижении температуры масло сжимается и рама закрывается. С каким коэффициентом полезного действия это устройство поднимает раму? Теплоемкость масла постоянна и равна C .

6. Потенциометр представляет собой цилиндр, равномерно обмотанный тонкой изолированной проволокой. Вдоль боковой поверхности цилиндра может перемещаться ползунок. Ползунок находится в электрическом контакте с тем витком проволоки, которого он касается. Потенциометр имеет длину L и полное сопротивление R_0 . Он подсоединен к омметру так, как показано на рис. 1.

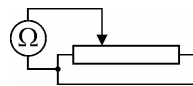


Рис. 1

Потенциометр имеет длину L и полное сопротивление R_0 . Он подсоединен к омметру так, как показано на рис. 1. Какую величину сопротивления показывает омметр, если ползунок находится на расстоянии l от одного из концов потенциометра?

7. Резистор, конденсатор и катушка индуктивности соединены последовательно и подключены к источнику гармонического напряжения. После того, как обкладки конденсатора замкнули при помощи короткого провода, оказалось, что мощность, потребляемая цепью от источника, осталась неизменной. Пренебрегая потерями на излучение, найти циклическую частоту ω гармонического напряжения источника, если емкость конденсатора C , а индуктивность катушки L .

8. Действительное изображение точечного источника в тонкой собирающей линзе движется по плоскому экрану, перпендикулярному ее главной оптической оси и расположенному на расстоянии b от линзы. Вектор скорости изображения лежит в плоскости, проходящей через главную оптическую ось линзы. Модуль скорости изображения v . Найти модуль V скорости источника, если фокусное расстояние линзы равно F .

ФАКУЛЬТЕТЫ ХИМИЧЕСКИЙ, БИОИНЖЕНЕРИИ И БИОИНФОРМАТИКИ

Вступительные экзамены по математике, химии и физике на химическом факультете МГУ проводятся в письменной форме. В последние годы экзамен по физике сдают также по выбору абитуриенты факультета биоинженерии и биоинформатики, а также отделения биофизики биологического факультета.

На вступительном испытании по физике требуется выполнить 10 заданий. Поясним кратко структуру этих билетов.

Первые два вопроса предлагают дать формулировку какого-либо физического закона или определение некоторой физической величины. Ответ должен быть кратким, но полным, и выявлять сущность закона, физический смысл величин и понятий.

Далее следует ряд заданий, в которых проверяется умение применять теоретический материал при выполнении несложных практических заданий, зачастую содержащих графическое представление различных характеристик физических процессов. В некоторых заданиях этой группы требуется выполнить построения оптических изображений.

В последнем блоке заданий представлены задачи в классическом понимании этого слова, с нарастающим уровнем сложности. Абитуриенту, поступающему в МГУ, следует иметь в виду, что, несмотря на обязательное ежегодное обновление заданий вступительных испытаний в МГУ, сохраняются стиль, традиции и уровень трудности предлагаемых заданий.

Ниже мы приводим несколько вариантов экзаменационных билетов. Подробные комментарии к выполнению всех заданий их практической части помещены во второй части настоящего сборника. Приводить там ответы на теоретические вопросы мы сочли излишним. Отметим лишь, что при подготовке к ответам на эти вопросы следует руководствоваться учебной литературой, список которой приведен в приложении к Программе вступительных испытаний по физике для поступающих в МГУ.

ВАРИАНТ 1

1.1 Сформулировать закон электролиза Фарадея.

1.2. Что такое система отсчета?

1.3. Протон движется в электрическом и магнитном полях по прямой линии. Какова скорость протона, если индукция магнитного поля $B = 50$ мТл, а напряженность электрического поля $E = 10^4$ В/м.

1.4. На тонкую рассеивающую линзу падает луч света 1 . Ход преломленного в линзе луча 2 известен (см. рис. 2). Рассеивающую линзу заменили на собирающую с теми же положениями фокусов, а падающий луч оставили без изменения. Построить ход луча 3 после преломления в собирающей линзе.

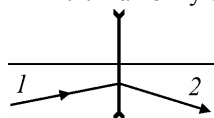


Рис. 2

1.5. В баллоне находится идеальный двухатомный газ. При нагревании газа его абсолютная температура увеличилась в два раза, а половина молекул диссоциировала (распалась на атомы). Во сколько раз изменилось (увеличилось или уменьшилось) давление газа в баллоне?

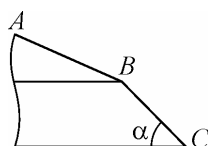


Рис. 3

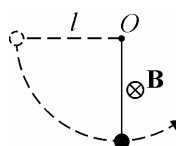


Рис. 4

1.6. По крыше дома, имеющей излом, соскальзывает сосулька вдоль поверхности AB (см. рис. 3). Какова скорость сосульки v_0 в момент отрыва от поверхности AB , если расстояние от точки B до точки соударения с поверхностью крыши BC равно l , а скорость сосульки перед соударением в n раз больше v_0 ? Считать угол α известным, сопротивлением воздуха пренебречь.

1.7. На легкой диэлектрической нити в однородном магнитном поле подвешен маленький положительно заряженный шарик. Шарик отклонили от положения равновесия так, что нить стала горизонтальной, и отпустили без начальной скорости. Найти силу натяжения нити при прохождении шариком нижнего положения. Индукция магнитного поля равна по модулю B и направлена перпендикулярно плоскости движения шарика (см. рис. 4). Масса шарика m , его заряд q , длина нити l .

1.8. При нормальном падении на дифракционную решетку плоско-параллельного пучка света от гелий-неонового лазера с длиной волны $\lambda = 633$ нм наблюдается всего $k = 7$ дифракционных максимумов. Каков период d этой дифракционной решетки?

1.9. В цепи, схема которой изображена на рис. 5, сопротивления резисторов одинаковы и равны $R = 4$ Ом, внутреннее сопротивление источника $r = 2$ Ом. Во сколько раз n изменится энергия электрического поля конденсатора после замыкания ключа K ?

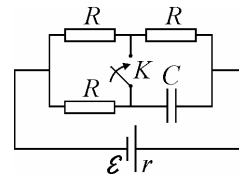


Рис. 5

1.10. На гладкой горизонтальной поверхности находится клин (см. рис. 6), имеющий массу $M = 0,64$ кг. О гладкую наклонную поверхность клина ударяется шарик массой $m = 0,15$ кг, летевший горизонтально. Каким должен быть угол клина α , чтобы шарик отскочил вертикально вверх. Удар считать абсолютно упругим.

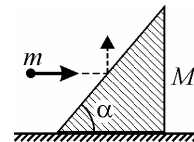


Рис. 6

ВАРИАНТ 2

2.1. Сформулировать **первый закон термодинамики**.

2.2 Что такое **инерциальная система отсчета**?

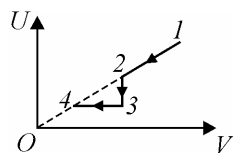


Рис. 7

2.3. Внутренняя энергия одного моля идеального газа в некотором процессе изменялась в соответствии с графиком, представленным на рис. 7. Изобразить график зависимости давления газа от объема в этом процессе (pV -диаграмму процесса).

2.4. Для измерения скорости воздушного потока используют два ультразвуковых вибратора, один из которых служит генератором, а другой – приемником ультразвуковых волн. Вибраторы установлены в потоке неподвижно на расстоянии $L = 5$ м один от другого. Найти скорость потока v , если ультразвуковая волна проходит это расстояние вдоль потока за время $\tau_1 = 0,016$ с, а в обратном направлении – за время $\tau_2 = 0,018$ с.

2.5. Луч света падает из воздуха на поверхность прозрачного вещества. При угле падения $\alpha = 60^\circ$ отраженный и преломленные лучи образуют прямой угол. Найти скорость света в веществе, считая скорость света в воздухе равной $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

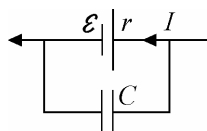


Рис. 8

2.6. Через источник тока течет постоянный ток с силой $I = 1$ А. Определить заряд на пластинах конденсатора, подключенного к клеммам этого источника (см. рис. 8). ЭДС источника $\mathcal{E} = 5$ В, его внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом, электроёмкость конденсатора $C = 2$ мкФ.

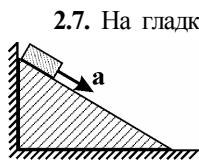


Рис. 9

2.7. На гладком горизонтальном полу находится прямоугольный клин, упираясь торцом в неподвижную вертикальную стенку (см. рис. 9). По наклонной грани клина соскальзывает без трения брусок массой $m = 0,1$ кг. С какой силой клин давит на стенку, если ускорение бруска $a = 6$ м/с²? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

2.8. При нагревании одного моля идеального газа от температуры $T_1 = 300$ К до температуры $T_2 = 600$ К его объём увеличивается пропорционально \sqrt{T} . Найти работу, совершенную газом в этом процессе. Универсальную газовую постоянную принять равной $R = 8,3$ Дж/(моль·К).

2.9. Предмет располагается на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Линзу заменяют на рассеивающую с таким же положением фокусов. Определить отношение линейных увеличений изображений предмета, даваемых линзами в первом и втором случаях.

2.10. Грузик массой $m = 0,1$ кг, подвешенный на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания. Расстояние между двумя крайними положениями грузика $S = 16$ см. Минимальное время, за которое грузик проходит это расстояние, равно $\tau = 0,2$ с. Найти потенциальную энергию пружины в момент её максимального растяжения. Считать потенциальную энергию недеформированной пружины равной нулю. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

ВАРИАНТ 3

3.1. Сформулировать законы преломления света.

3.2. Что такое резонанс?

3.3. Магнитный поток Φ , пронизывающий поверхность, ограниченную проводящим контуром, меняется во времени так, как показано на графике, представленном на рис. 10. Исходя из этого рисунка, постройте график зависимости от времени ЭДС, индуцируемой в контуре.

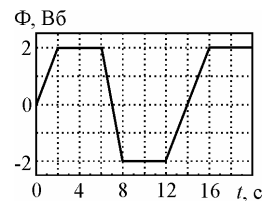


Рис. 10

3.4. Два одинаковых бруска находятся на наклонной плоскости на

одном уровне. Брускам сообщают одинаковые начальные скорости вдоль наклонной плоскости: первому – вниз, к основанию наклонной плоскости, второму – в противоположном направлении, к вершине плоскости. Какой из брусков будет иметь большую скорость, когда они окажутся у основания наклонной плоскости? Считать, что коэффициент трения между брусками и поверхностью $\mu < \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона плоскости к горизонтали.

3.5. В середине неподвижно закрепленного горизонтального цилиндрического сосуда, открытого с одной стороны, располагается тонкий поршень, отделяющий от атмосферы порцию воздуха. Какую минимальную силу следует приложить к поршню, чтобы медленно вытащить его из цилиндра, если температура воздуха постоянна? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Площадь поперечного сечения цилиндра $S = 4 \text{ см}^2$. Трением пренебречь. Воздух считать идеальным газом.

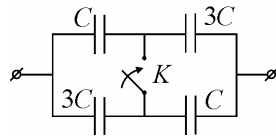


Рис. 11

3.6. Батарея состоит из четырех конденсаторов, соединенных так, как показано на рис. 11. Во сколько раз изменится емкость батареи (увеличится или уменьшится) при замыкании ключа K ?

3.7. Для размораживания водопроводной трубы, в которой замерзла вода, применили электрический нагреватель, подключенный к сети с напряжением $U = 220 \text{ В}$. Каким должно быть сопротивление нагревателя, чтобы за время $\tau = 1$ мин он растапливал $m = 1$ кг льда, если потери тепла составляют $k = 40\%$? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

3.8. Стержень длиной $l = 1 \text{ м}$ опирается на пол и стену. Нижний конец стержня скользит по полу, удаляясь от стены, а верхний скользит по стене вниз. Найти путь, пройденный точкой S , лежащей на середине стержня, при движении стержня от вертикального до горизонтального его положений.

3.9. В цепи, схема которой приведена на рис. 12, резисторы имеют сопротивления $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 200$ Ом. Амплитуда переменного напряжения $U_0 = 20$ В. Какое количество теплоты выделяется в цепи за время $\tau = 1$ мин, которое намного больше, чем период колебаний напряжения? Диоды считать идеальными.

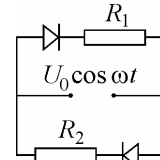


Рис. 12

3.10. Тонкий стержень AB расположен под углом 45° к главной оптической оси собирающей линзы (см. рис. 13). Под каким углом β к оси расположено действительное изображение стержня, даваемое линзой? Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см. Расстояние от нижнего конца стержня до линзы $d = 60$ см.

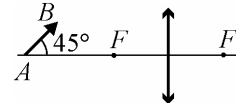


Рис. 13

ВАРИАНТ 4

4.1. Сформулировать закон всемирного тяготения.

4.2. Что такое насыщенный пар?

4.3. Материальная точка движется по прямой, вдоль которой направлена координатная ось Ox . На рис. 14 приведена зависимость координаты точки x от времени t . Найти максимальную скорость движения точки.

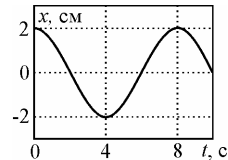


Рис. 14

4.4. Предмет рассматривают через лупу. При этом расстояние от лупы до оптического изображения предмета равно $f = 20$ см, а сам предмет расположен на расстоянии $x = 1$ см от фокуса лупы. Чему равна оптическая сила лупы?

4.5. Плоская крыша сарая наклонена таким образом, чтобы капли дождя стекали с нее за минимальное время. На какую величину H один

край крышки расположен выше другого, если расстояние между стенами сарая $L = 2,5$ м? Трение капель о крышу не учитывать.

4.6. В устройстве, изображенном на рис. 15, в цилиндре диаметром $d = 10$ см под поршнем массой $M = 1$ кг находится воздух. Поршень удерживается в равновесии с помощью рычага, который может свободно поворачиваться вокруг оси O . К концу рычага подвешен груз массой $m = 1$ кг. Выступ на рычаге, передающий усилие на поршень, расположен в середине рычага. Найти, на какую величину Δp давление воздуха в сосуде отличается от атмосферного давления. Массой рычага пренебречь. Трение не учитывать.

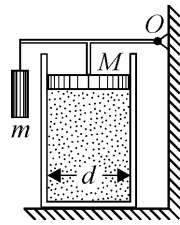


Рис. 15

4.7. Конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ заряжают до напряжения $U = 20$ В и затем подключают к двум последовательно соединенным резисторам с сопротивлениями $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 300$ Ом. Какое количество теплоты выделится на резисторе R_1 при полной разрядке конденсатора?

4.8. В горизонтально расположенном цилиндре находится идеальный газ, отделенный от окружающего воздуха подвижным поршнем площадью S . Поршень прикреплен к дну цилиндра пружиной жесткостью k . Начальное давление газа равно атмосферному давлению p_0 . Если газ нагревать, то он будет расширяться, а поршень – деформировать пружину. По какому закону $p(V)$ будет изменяться при этом давление газа p в зависимости от его объема V ? Построить график этой зависимости. Трением пренебречь.

4.9. В цилиндрический сосуд с водой опустили кусок льда массой $m = 1,5$ кг. На сколько сантиметров повысился уровень воды в сосуде, если при погружении льда вода не переливалась через край сосуда? Принять во внимание, что лед плавает в воде, не касаясь дна сосуда. Диаметр сосуда $d = 20$ см. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

4.10. В цепи, схема которой приведена на рис. 16, сопротивления резисторов: $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, а сопротивление R_4 подобрано таким, что при замыкании ключа K ток через ключ не течет. Найти силу тока через источник, если ЭДС источника $\mathcal{E} = 6$ В. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

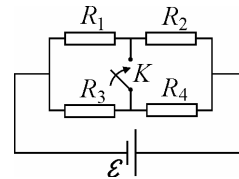


Рис. 16

БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. Сформулировать закон электромагнитной индукции Фарадея.

2. Написать уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

3. Электрический заряд величиной $q = -2$ мкКл переместили вдоль силовой линии однородного электрического поля на расстояние $L = 20$ см, совершив работу $A = 10^{-3}$ Дж. Определить напряженность этого поля.

4. На рис. 17 представлен график изменения состояния идеального газа в координатах $p-T$. Представить этот процесс на графике в координатах $p-V$. Учтите, что участки $1-2$ и $4-5$ – отрезки вертикальных прямых, участок $2-3$ – отрезок горизонтальной прямой.

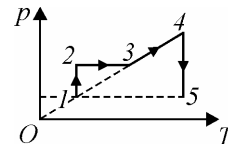


Рис. 17

5. Шарик массой $m_1 = 30$ г налетает на неподвижный брусок массой $m_2 = 60$ г. После центрального удара шарик останавливается, а брусок приобретает скорость $u = 1$ м/с. Определить количество теплоты, выделившейся при ударе.

6. Мотоциклист начинает прямолинейное движение из состояния покоя и проходит первый участок пути с некоторым ускорением a_1 , а последующий участок такой же длиной – с ускорением a_2 . После прохождения первого участка пути скорость мотоциклиста возросла на $\Delta v_1 = 20$ м/с, а после прохождения второго – увеличилась еще на $\Delta v_2 = 10$ м/с. Найти отношение ускорений a_1/a_2 .

7. Металлическому шарик радиусом R сообщили положительный заряд q . При какой максимальной длине волны света, которым облучают шарик, выбитые из него фотоэлектроны не будут возвращаться на шарик? Постоянную Планка h , скорость света c , величину заряда электрона e , электрическую постоянную ϵ_0 и длину волны λ_0 , соответствующую красной границе фотоэффекта для металла, считать известными.

8. Найти максимальный угол отклонения математического маятника, если отношение силы натяжения нити при прохождении им положения равновесия к силе натяжения в крайних точках равно k .

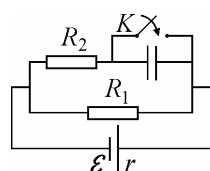


Рис. 18

9. В цепи, схема которой представлена на рис. 18, внутреннее сопротивление источника $r = 2$ Ом, сопротивление резистора $R_1 = 4$ Ом. При каком значении сопротивления резистора R_2 мощность, выделяющаяся во внешней цепи, будет одна и та же при замкнутом и разомкнутом ключе K ?

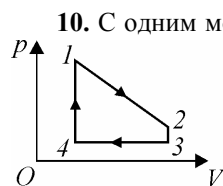


Рис. 19

10. С одним молем идеального газа проводят циклический процесс, pV -диаграмма которого представлена на рис. 19. Температуры газа в характерных точках процесса равны: $T_1 = T_2 = 600$ К, $T_3 = 400$ К, $T_4 = 300$ К. Определить работу, совершенную газом за цикл. Универсальную газовую постоянную принять равной $R = 8,3$ Дж/(моль·К).

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

Задания, предлагавшиеся абитуриентам факультета ВМиК, сдававшим вступительные экзамены в июле 2007 года, а также участникам олимпиады по физике «Абитуриент-2007», проходившей в апреле 2007 года, состояли из двух задач и двух теоретических вопросов, взятых из Программы вступительных испытаний по физике, помещенной в настоящем сборнике. Результаты всех испытаний по физике на ВМиК оценивались по 10-балльной шкале. Ниже приведены задачи, предлагавшиеся поступающим на факультет ВМиК в 2007 году. Кроме того, здесь же помещены задания по физике очного тура совместного проекта МГУ и газеты «Московский Комсомолец» «Покори Воробьевы горы». Перед номерами этих задач поставлен символ *.

I. МЕХАНИКА

I.1. В гладкую наклонную плоскость (рис. 20), составляющую угол α ($\alpha > 45^\circ$) с горизонтом, ударяется маленький шарик. Непосредственно перед ударом скорость шарика направлена горизонтально. После упругого удара шарик вновь попадает на наклонную плоскость в точке, расположенной ниже точки удара и отстоящей от нее по горизонтали на расстояние l . Какова скорость v_0 шарика до удара? Ускорение свободного падения g .

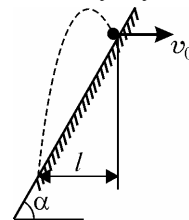


Рис. 20

I.2. Теннисист бьет мячом с высоты $H = 2$ м в направлении вертикальной гладкой стенки, находящейся на расстоянии $l = 2$ м от него (см. рис. 21). Начальная скорость мяча лежит в плоскости, перпендикулярной стенке, и направлена под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Позади теннисиста на расстоянии $L = 4$ м от стенки расположено параллельно ей ограждение высотой $h = 1$ м. При какой максимальной на-

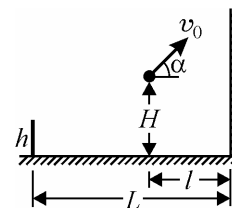


Рис. 21

чальной скорости мяча v_0 он после упругого удара о стенку не перелетит через ограждение? Размером мяча пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1.3. Тяжело нагруженную лодку подтягивают к пристани с помощью веревки, перекинутой через ролик, находящийся на высоте h над уровнем воды (см. рис. 22). По какому закону должна меняться во времени сила $F(t)$, которую нужно прикладывать к веревке, чтобы поддерживать скорость движения лодки в воде постоянной и равной v_0 ? В момент времени $t = 0$ лодка движется со скоростью v_0 , сила, с которой тянут за веревку, равна F_0 , а расстояние от лодки до пристани составляет l_0 . Сопротивление воды считать пропорциональным скорости лодки.

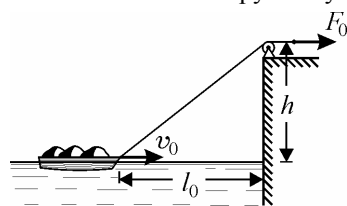


Рис. 22

1.4. На внутренней поверхности сферы радиусом R , вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω , располагается маленький брусок массой m (см. рис. 23). Положение бруска задается углом α между горизонталью и прямой, проведенной к бруску из центра сферы. Считая значение угла α известным, найти модуль силы трения, удерживающей брусок от скольжения по поверхности сферы. Ускорение свободного падения g .

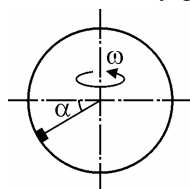


Рис. 23

1.5. Правая чаша рычажных весов находится под мелким морозящим дождем, а левая укрыта от дождя навесом. Каждая чаша представляет собой тонкостенную цилиндрическую емкость с площадью дна $S = 0,05 \text{ м}^2$ и высотой бортика $h = 1 \text{ мм}$. Интенсивность равномерно падающего дождя такова, что дождевая вода целиком заполняет предварительно опорожненную чашу весов за время $\tau = 30 \text{ с}$. Какой массы m гири нужно положить на левую чашу весов, чтобы уравновесить

весы в случае, когда правая чаша заполнена дождевой водой до краев? Капли дождя падают вертикально со скоростью $v = 3$ м/с. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Соударение капель с водой в чаше считать неупругим.

1.6. Брусок массой m удерживают на высоте H над основанием наклонной плоскости, образующей с горизонтальной угло α . У основания наклонной плоскости находится выступ, в который упирается легкая пружина жесткостью k и длиной l , расположенная вдоль наклонной плоскости (см. рис. 24). Брусок отпускают без начальной скорости, после чего он соскальзывает вниз и ударяется о пружину. Найти максимальное сжатие пружины Δl , если коэффициент трения между плоскостью и бруском μ . Ускорение свободного падения g .

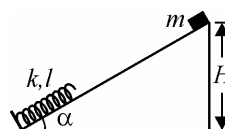


Рис. 24

1.7. Два одинаковых шарика подвешены на невесомых нерастяжимых нитях как показано на рис. 25. Силы натяжения верхней и средней нитей T_1 и T_2 известны. Найти силу натяжения нижней нити T_3 , если она расположена горизонтально.

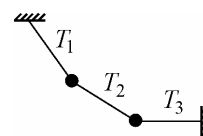


Рис. 25

1.8. Тонкостенный стакан вместимостью $V_0 = 200$ см³ и массой $m = 100$ г погружают в воду, держа его дном вверх. На какой глубине h предоставленный самому себе стакан перестанет всплывать? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³, температура воды не меняется с глубиной. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Размерами стакана по сравнению с глубиной его погружения, давлением паров воды, а также объемом стенок стакана пренебречь.

***1.9.** Садовый насос, расположенный в скважине на глубине h , подает воду на поверхность земли по шлангу площадью сечения S . Ка-

кую мощность N развивает насос, если известно, что он наполняет водой ведро объемом V за время τ ? Плотность воды ρ , ускорение свободного падения g .

I.10. К потолку покоящегося вагона на нити длиной l подвешен маленький шарик. В некоторый момент времени вагон приходит в движение в горизонтальном направлении с постоянным ускорением a . На какую максимальную высоту h относительно своего начального положения поднимется шарик? Ускорение свободного падения g .

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится идеальный газ (см. рис. 26). В пространстве над поршнем создан вакуум. Поршень удерживается в равновесии пружиной, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра, причем пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. Во сколько раз n возрастет объем газа, если увеличить его температуру в $m=2$ раза?

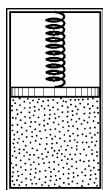


Рис. 26 Толщиной поршня пренебречь.

II.2. В вертикальном цилиндрическом сосуде с площадью сечения $S=20 \text{ см}^2$ под тяжелым поршнем находится идеальный газ. Когда сосуду сообщают ускорение $g/2$, направленное вверх, поршень устанавливается относительно сосуда в таком положении, что объем газа под ним уменьшается в $\alpha=1,3$ раза. Считая температуру газа постоянной, найти массу поршня M . Атмосферное давление $p_0=10^5 \text{ Па}$, ускорение свободного падения $g=10 \text{ м/с}^2$. Массой газа пренебречь.

II.3. В двух сообщающихся цилиндрических сосудах с одинаковой площадью поперечного сечения S находится вода. В один из сосудов помещен невесомый поршень, соединенный с неподвижной опорой пружиной жесткостью k (см. рис.27). Пространство под поршнем заполнено воздухом. При температуре воздуха в сосуде T_0 расстояние между поршнем и поверхностью воды l , пружина не деформирована и поверхность воды в обоих сосудах находится на одном уровне. До какой температуры T нужно нагреть воздух в сосуде, чтобы поршень переместился вверх на расстояние x ? Атмосферное давление p_0 , плотность воды ρ , ускорение свободного падения g . Давлением водяных паров и трением при перемещении поршня пренебречь.

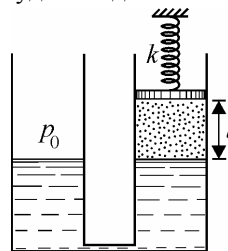


Рис. 27

II.4. В космический корабль, совершающий межпланетный перелет, попал метеорит, пробивший в корпусе маленькое отверстие, через которое наружу стал выходить воздух. Объем корабля $V = 1000 \text{ м}^3$, начальное давление воздуха в нем $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, температура $t = 27^\circ \text{C}$. Через какое время τ после попадания метеорита давление воздуха в корабле уменьшится на $\Delta p = 10^3 \text{ Па}$, если площадь отверстия $S = 1 \text{ см}^2$? Молярная масса воздуха $M = 29 \text{ г/моль}$, универсальная газовая постоянная $R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$. При решении учесть, что $\Delta p \ll p_0$, температуру воздуха внутри корабля считать постоянной, а процесс истечения воздуха квазиравновесным.

II.5. Два теплоизолированных сосуда объемом $V = 40 \text{ л}$ каждый содержат идеальные одноатомные газы. Масса газа в первом сосуде $m_1 = 20 \text{ г}$, его молярная масса $M_1 = 4 \text{ г/моль}$, температура $T_1 = 300 \text{ К}$. Масса газа во втором сосуде $m_2 = 20 \text{ г}$, его молярная масса $M_2 = 20 \text{ г/моль}$, температура $T_2 = 400 \text{ К}$. Сосуды соединяют тонкой трубкой, объемом которой можно пренебречь. Какое давление p уста-

новится в сосудах после достижения теплового равновесия? Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).

II.6. Водяной пар занимает объем $V_0 = 5$ л при температуре $t = 100$ °С. Давление пара $p = 0,5 \cdot 10^5$ Па. Какая масса Δm пара превратится в воду, если объем пара изотермически уменьшить до величины $V = 1$ л? Молярная масса воды $M = 18$ г/моль.

II.7. Поплавок объемом $V = 5$ л целиком погружен в жидкость и удерживается от всплытия нитью, закрепленной на дне. Начальная температура жидкости $t_1 = 10$ °С. На какую величину ΔF изменится сила натяжения нити, если жидкость нагреть до температуры $t_2 = 20$ °С? Температурный коэффициент объемного расширения жидкости в данном интервале температур $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹. Тепловым расширением поплавка пренебречь. Плотность жидкости при температуре $t_0 = 0$ °С равна $\rho_0 = 10^3$ кг/м³. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

III.1. Плоский лепесток толщиной δ , сделанный из непроводящего материала плотностью ρ , подвешен за свою верхнюю точку вплотную к тонкой вертикальной пластине, площадь которой значительно больше площади лепестка (см. рис. 28). На какой угол α отклонится лепесток от вертикали, если на него и на пластину поместить одноименные заряды, равномерно распределенные с плотностью σ по поверхности пластины и обеим поверхностям лепестка? Электрическая постоянная ϵ_0 ,



Рис. 28 ускорение свободного падения g .

III.2. В плоский конденсатор вставлена диэлектрическая пластинка, как показано на рис. 29. На конденсатор подали напряжение U . Найти напряженность электрического поля E внутри диэлектрика, если расстояние между обкладками конденсатора d , толщина пластинки h , диэлектрическая проницаемость диэлектрика ϵ .

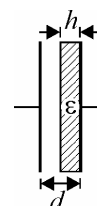


Рис. 29

III.3. Две одинаковые металлические пластины площадью S каждая расположены параллельно друг другу на расстоянии d , весьма малом по сравнению с размерами пластин. На одну из пластин поместили заряд $q_1 = q$, на другую – заряд $q_2 = 5q$ того же знака. Определить разность потенциалов U между пластинами. Электрическая постоянная ϵ_0 .

III.4. Экран электронно-лучевой трубки представляет собой прямоугольник с диагональю $d = 51$ см и соотношением сторон 3:4. Сила тока в электронном луче составляет $I = 0,5$ мА. Предположим, что все электроны луча, попавшие на экран, остаются на нем, распределяясь по его поверхности равномерно. Через какое время τ после включения устройства напряженность электрического поля вблизи поверхности экрана достигнет по величине напряженности поля на поверхности уединенного металлического шара радиусом $R = 10$ см, заряженного до потенциала $\phi = 3$ кВ? Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

III.5. Пластины плоского воздушного конденсатора расположены горизонтально. Верхняя пластина сделана подвижной и удерживается в начальном состоянии на высоте $h = 1$ мм над нижней пластиной, которая закреплена. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 1000$ В, отключили от источника и освободили верхнюю пластину. Какую скорость приобретет падающая пластина к моменту соприкосновения с нижней пластиной? Масса верхней пластины $m = 4,4$ г, площадь каждой из пластин $S = 0,01$ м², электрическая постоянная

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

III.6. Два конденсатора емкостями C_1 и C_2 соединены последовательно и постоянно подключены к источнику с ЭДС \mathcal{E} и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. В некоторый момент времени параллельно конденсатору C_2 подсоединили резистор. Какое количество теплоты Q выделится в этом резисторе в процессе перераспределения зарядов в конденсаторах, если перед подключением резистора заряды на конденсаторах были одинаковы?

III.7. Нагреватель с нихромовой спиралью развивает мощность $N_1 = 500$ Вт. При этом температура спирали нагревателя равна $t_1 = 800$ °С. Когда нагреватель стали охлаждать потоком воздуха, он развил мощность $N_2 = 520$ Вт. Какова при этом температура спирали t_2 ? Напряжение, приложенное к нагревателю, неизменно. Температурный коэффициент сопротивления нихрома $\alpha = 10^{-4}$ К⁻¹. Тепловым расширением спирали пренебречь.

III.8. Для измерения температуры t собрана схема, состоящая из четырех резисторов и подключенная к источнику с ЭДС U и малым внутренним сопротивлением (см. рис. 30). Температурные коэффициенты сопротивления резисторов попарно равны и составляют соответственно α_1 и α_2 , а сопротивления всех резисторов при температуре 0 °С одинаковы. Как зависит напряжение V между точками 1 и 2 от температуры? Считать, что в диапазоне измеряемых температур $\alpha_1 t \ll 1$, $\alpha_2 t \ll 1$.

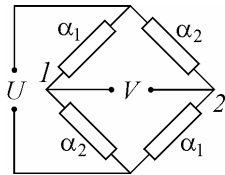


Рис. 30

III.9. Электрический нагреватель для воды имеет две спирали. При подключении к сети одной из спиралей вода в нагревателе закипает че-

рез время $t_1 = 10$ мин, а при подключении другой – через время $t_2 = 15$ мин. Через какое время вода в нагревателе закипит, если обе эти спирали подключить к сети, соединив их а) параллельно, б) последовательно? Количество воды и ее начальная температура во всех случаях одинаковы. Потерями тепла пренебречь.

III.10. Два параллельных металлических стержня расположены на расстоянии l друг от друга в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией B (см. рис. 31). Стержни соединены неподвижным проводником сопротивлением R . Два других проводника сопротивлениями R_1 и R_2 находятся слева и справа от неподвижного проводника и скользят по стержням в одну и ту же сторону со скоростями v_1 и v_2 . Какой ток I течет по неподвижному проводнику? Сопротивление стержней пренебрежимо мало.

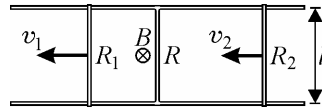


Рис. 31

III.11. Два прямых проводящих стержня соединены гибкими проводниками и образуют прямоугольный контур со сторонами $a = 30$ см и $b = 50$ см (см. рис. 32). Контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл, направленной перпендикулярно его плоскости. Какой заряд Δq протечет по контуру, если перевернуть на 180° один из стержней, оставляя гибкие проводники натянутыми и не допуская замыкания между ними? Сопротивление контура $R = 1$ Ом.

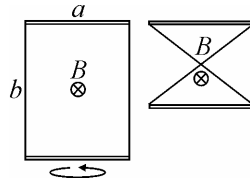


Рис. 32

***III.12.** Цепь, изображенная на рис. 33, состоит из конденсатора, катушки, источника с ЭДС \mathcal{E} и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а также ключа K . В начальный момент времени ключ разомкнут, а конденсатор заряжен до напряжения U_0 с полярностью, указанной на рисунке. Какого мак-

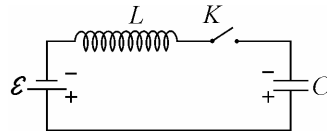


Рис. 33

симального значения U_{\max} может достичь напряжение на конденсаторе после замыкания ключа? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

IV. ОПТИКА

IV.1. Оптическая схема, изображенная на рис. 34, состоит из непрозрачного экрана с маленьким отверстием O и двух плоских зеркал 1 и 2 . Луч света проходит через отверстие O , отражается от зеркал 1 и 2 и выходит обратно через это отверстие, причем угол падения луча на зеркало 1 равен α , а после отражения от зеркала 2 луч распространяется параллельно зеркалу 1 . Когда зеркало 1 сместили влево параллельно самому себе на расстояние d_1 , луч перестал попадать в отверстие O . На какое расстояние d_2 нужно сместить параллельно самому себе зеркало 2 , чтобы луч снова попал в это отверстие?

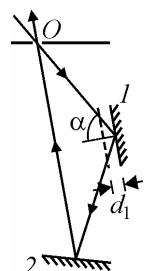


Рис. 34

IV.2. Оптический сканер представляет собой правильную шестигранную призму с зеркальной поверхностью, вращающуюся вокруг своей оси O . Ширина каждой грани равна a . Снизу на сканер падает вертикальный световой луч, продолжение которого проходит на расстоянии $a/2$ от оси вращения сканера (см. рис. 35). Рядом со сканером вертикально расположена тонкая собирающая линза большого диаметра. Фокусное расстояние линзы равно f , а ее главная оптическая ось проходит через ось вращения сканера. В правой фокальной плоскости линзы расположен широкий экран, нижний край которого расположен на оптической оси линзы. Определите длину d отрезка, который замечает на экране световой луч, отраженный от поверхности сканера.

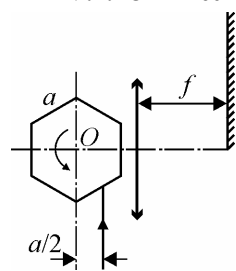


Рис. 35

IV.3. Луч света, распространяющийся в воздухе, падает в некоторой точке на поверхность стеклянного шара. После преломления и двух внутренних отражений от поверхности шара луч возвращается в точку падения и выходит из шара. При этом луч, падающий на шар, и луч, выходящий из него, оказываются перпендикулярными друг другу. Найти показатель преломления стекла n .

IV.4. К плоской поверхности тонкой плосковыпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см прижато плоское зеркало. Со стороны выпуклой поверхности линзы на расстоянии $a = 9$ см от нее расположен предмет. Построить изображение предмета и найти увеличение изображения m .

IV.5. Интерференционная картина "кольца Ньютона" наблюдается в отраженном монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 0,63$ мкм. Интерференция возникает в заполненном бензолом тонком зазоре между выпуклой поверхностью плосковыпуклой линзы и плоской стеклянной пластинкой. Найдите радиус первого (внутреннего) темного кольца, если радиус кривизны поверхности линзы $R = 10$ м, а показатели преломления линзы и пластинки одинаковы и превышают показатель преломления бензола, равный $n = 1,5$. Свет падает по нормали к пластинке.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В марте 2007 г. на физическом факультете проводилась устная олимпиада по физике «Абитуриент 2007». Задания, предлагавшиеся участникам этой олимпиады, а также абитуриентам, сдававшим вступительные испытания в июле 2007 года, содержали две задачи и два теоретических вопроса, взятых из Программы вступительных испытаний по физике, помещенной в настоящем сборнике. Результаты всех испытаний по физике на физическом факультете оценивались по 10-балльной шкале. При оценке ответов поступающих особое внимание уделялось обоснованию возможности использования при решении задач тех или иных законов, а также умению сформулировать предположения, при которых полученное решение верно. Ниже приведены задачи, предлагавшиеся на олимпиаде и вступительном испытании по физике на физическом и физико-химическом факультетах в 2007 году. Кроме того, здесь же помещены задания по физике очного тура совместного проекта МГУ и газеты «Московский Комсомолец» «Покори Воробьевы горы». Перед номерами этих задач поставлен символ *.

I. МЕХАНИКА

I.1. Велосипедист, двигаясь равноускоренно, проезжает мимо четырех столбов, стоящих друг за другом на одинаковом расстоянии. Расстояние между первыми двумя столбами он проехал за время $t_1 = 2$ с, а между вторым и третьим – за $t_2 = 1$ с. Найти время t_3 движения велосипедиста между третьим и четвертым столбами.

I.2. Автопоезд массой $M = 10$ т двигался равномерно по прямой горизонтальной дороге. От него отцепился прицеп массой $m = 4$ т. Проехав после этого $s = 300$ м, водитель выключил двигатель и продолжил движение накатом. Найти расстояние L между частями автопоезда после их остановки. Считать, что силы сопротивления движению прицепа и тягача постоянны и пропорциональны их массам, причем коэффициенты пропорциональности для прицепа и тягача одинаковы.

I.3. Наклонная поверхность неподвижного клина с углом α при основании имеет гладкую нижнюю и шероховатую верхнюю части. Коэффициент трения между стержнем и верхней частью клина равен μ . На верхней части клина удерживают тонкий однородный стержень массой m , расположенный в плоскости рис. 36. После того, как стержень отпускают, он начинает поступательно скользить по клину. Найти максимальную силу натяжения стержня в процессе его движения. Влиянием воздуха пренебречь.

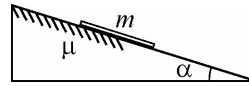


Рис. 36

***I.4.** На гладкой горизонтальной плоскости располагается кубик с закрепленным на нем блоком. Масса кубика вместе с блоком равна M . Через блок перекинута гладкая невесомая нить, на которой висит груз массой m , касающийся вертикальной грани кубика. Коэффициент трения груза о кубик равен μ . Первоначально кубик и груз удерживают. Затем к свободному концу нити прикладывают в горизонтальном направлении постоянную силу F , как показано на рис. 37, и одновременно отпускают кубик и груз. В результате они начинают двигаться поступательно, причем груз движется вверх. Найти перемещение кубика Δx к тому моменту, когда сила F совершит работу A , а груз еще не коснется блока.

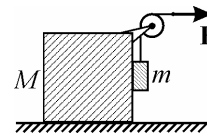


Рис. 37

I.5. Математический маятник длиной L подвешен на гвозде, вбитом в вертикальную стену. Груз маятника отклонили так, что его нить приняла горизонтальное положение, параллельное стене, и была слегка натянута, а затем груз отпустили с нулевой начальной скоростью. На каком наибольшем расстоянии x под точкой подвеса следует вбить в стену второй гвоздь, чтобы после удара нити о него груз, двигаясь по окружности, поднялся на максимальную высоту?

I.6. На прямой круговой конус, ось которого вертикальна, надели тонкое гладкое кольцо радиусом R и массой m . Известно, что кольцо остается целым, если сила натяжения в нем не превышает F . Найти

минимальное значение угла α между осью и образующей конуса, при котором кольцо не разорвется.

1.7. Две тонкие одинаковые доски верхними концами прикреплены к неподвижной горизонтальной оси O . Масса каждой доски равна m , а ее длина – L . Раздвинув доски, между ними поместили цилиндр массой M радиусом R так, чтобы точки касания цилиндра совпали с серединой досок (см. рис. 38). После того, как цилиндр отпустили, он остался неподвижным. Найти коэффициент трения между цилиндром и доской. Трением в оси и деформациями тел пренебречь.

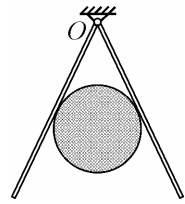


Рис. 38

1.8. Период колебаний математического маятника на экваторе сферической планеты в $n = 1,5$ раза больше, чем на ее полюсе. Найти период τ обращения планеты вокруг ее собственной оси, если плотность вещества планеты $\rho = 3 \text{ г/см}^3$.

1.9. На гладком горизонтальном столе лежат три одинаковых груза малых размеров массой m каждый, соединенные тремя легкими одинаковыми пружинами жесткостью k . При этом грузы располагаются в вершинах правильного треугольника. Грузы смещают от положений равновесия так, чтобы удлинения всех пружин были одинаковыми. После этого грузы одновременно отпускают. Определить период малых колебаний. Считать, что оси пружин остаются прямолинейными.

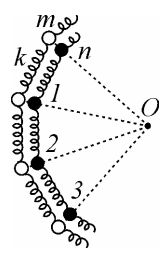


Рис. 39

1.10. На гладком горизонтальном столе лежат одинаковые грузы малых размеров, расположенные в вершинах правильного n -угольника. Масса каждого груза равна m . Грузы соединены между собой одинаковыми легкими пружинами жесткостью k . Грузы смещают от положений равновесия на одинаковые расстояния так, как показано на рис. 39. После этого грузы одновременно отпускают. Определить период малых колебаний. Считать, что оси пружин остаются прямолинейными.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. В гладком вертикальном цилиндре под подвижным поршнем находится идеальный газ. При температуре $t = 27^\circ\text{C}$ и давлении $p = 0,1$ МПа объем газа $V = 3$ л. Для изобарического нагревания этого газа до некоторой температуры ему сообщили количество теплоты $Q_1 = 0,35$ кДж, а для изохорического нагревания до той же температуры потребовалось бы количество теплоты $Q_2 = 0,25$ кДж. До какой температуры t_1 нагревали газ? Считать, что нагрев в обоих случаях осуществлялся достаточно медленно.

II.2. В качестве рабочего вещества теплового двигателя используют гелий. На рис. 40 показана pV -диаграмма рабочего цикла этого двигателя. Найти КПД цикла.

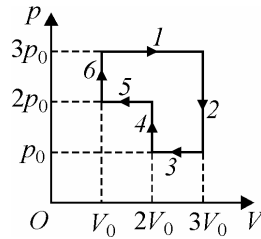


Рис. 40

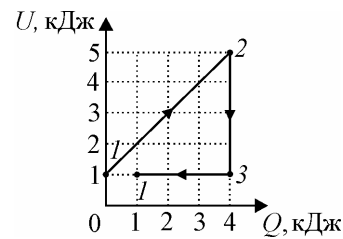


Рис. 41

II.3. На рис. 41 показана зависимость внутренней энергии U идеального газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя, от количества теплоты Q , которое газ получил с момента 1 начала цикла $1-2-3-1$. Найти КПД этого цикла.

II.4. В гладком вертикальном цилиндре под подвижным поршнем площадью S массой m длительное время находятся жидкость и ее пар при температуре T . Атмосферное давление, действующее на поршень, равно p_0 . Молярная масса жидкости равна μ , а ее удельная теплота парообразования в условиях опыта равна r . На какую высоту Δh под-

нимется поршень, если жидкости передать количество теплоты Q , недостаточное для ее полного испарения?

II.5. В сосуде содержатся идеальный газ и пар с относительной влажностью f при абсолютной температуре T под давлением p . Давление насыщенных паров при этой температуре равно p_n . Молярная масса паров равна μ_n , а газа – μ_r . Определить отношение n плотности газа ρ_r к плотности пара ρ_n .

III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

III.1. Четыре незаряженные одинаковые тонкие металлические пластины, площадь каждой из которых равна S , расположены в воздухе на малом расстоянии d параллельно друг другу (см. рис 42). Внутренним пластинам сообщили равные по модулю, но противоположные по знаку заряды. Затем внешние пластины соединили между собой резистором сопротивлением R . В результате в этом резисторе выделилось количество теплоты Q . Пренебрегая излучением, определить модуль q зарядов внутренних пластин.

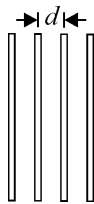


Рис. 42

***III.2.** В изображенной на рис. 43 схеме ключ K длительное время находился в положении 1. Затем этот ключ перевели в положение 2, а потом через достаточно большой промежуток времени вновь вернули в положение 1. Найти отношение работы сторонних сил батарейки к количеству теплоты, выделившейся на резисторе r_2 , в результате этих переключений. Параметры элементов схемы указаны на рисунке. Диод D считать идеальным. Индуктивностью элементов схемы пренебречь.

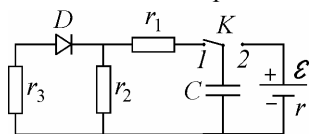


Рис. 43

III.3. Между двумя изолированными друг от друга параллельными металлическими пластинами со скоростью u протекает проводящая

жидкость. Расстояние между пластинами h намного меньше размеров пластин. Между пластинами создано однородное магнитное поле, вектор индукции которого \mathbf{B} параллелен плоскости пластин и перпендикулярен \mathbf{u} . К пластинам подключен конденсатор емкостью C . Найти максимально возможный заряд этого конденсатора.

III.4. Заряженная частица влетает со скоростью \mathbf{v} в полупространство, где существуют однородное электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} и однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} так, как показано на рис. 44. На какой угол отклонится частица от первоначального направления полета в момент ее вылета из этой области? Потерями энергии частицы и действием на нее силы тяжести пренебречь.

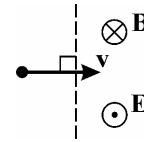


Рис. 44

III.5. Металлический стержень, один конец которого шарнирно закреплен в точке O , вращают с такой постоянной угловой скоростью ω , что он образует с вертикалью постоянный угол α . Другой конец стержня касается проводящей полусферы (см. рис. 45). Центр полусферы совпадает с точкой O . Радиус полусферы равен R . Вся система находится в однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого равна \mathbf{B} . К сфере подключен резистор с достаточно большим сопротивлением r . Другой конец резистора подключен к стержню в точке O . Найти мощность N , выделяющуюся в резисторе.

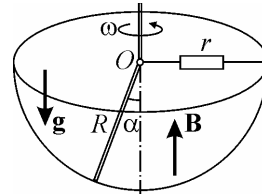


Рис. 45

III.6. К идеальной катушке, зашунтированной резистором сопротивлением R , подключают на время τ источник с ЭДС \mathcal{E} и малым внутренним сопротивлением, а затем отключают его. При этом за время подключения источника и после его отключения в резисторе выделяются одинаковые количества теплоты. Найти индуктивность катушки L .

IV. ОПТИКА

IV.1. Тонкая собирающая линза помещена на границе раздела двух однородных сред с разными показателями преломления. Показатель преломления среды за линзой меньше, чем перед ней. Поэтому фокусные расстояния линзы не равны, причем $f_1 > f_2$. Луч, падающий на линзу под небольшим углом к главной оптической оси, проходит через некоторую точку C на этой оси. Известно, что после прохождения линзы этот луч распространяется в том же направлении. Найти расстояние от точки C до линзы.

IV.2. Точечный источник S и его изображение S_1 в тонкой линзе с

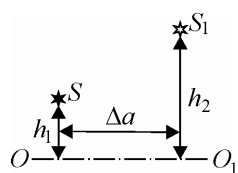


Рис. 46

фокусным расстоянием F находятся по одну сторону от этой линзы. Расстояния от главной оптической оси OO_1 линзы до источника и до его изображения равны h_1 и h_2 (см. рис. 46). Найти расстояние Δa между перпендикулярными главной оптической оси плоскостями, в которых расположены источник и его изображение.

IV.3. Точечный источник S и его изображение S_1 в тонкой линзе

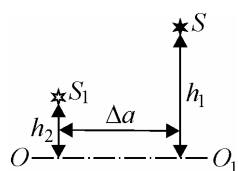


Рис. 47

находятся по одну сторону от этой линзы. Расстояния от главной оптической оси OO_1 линзы до источника и до его изображения равны, соответственно, h_1 и h_2 (см. рис. 47). Расстояние между перпендикулярными главной оптической оси плоскостями, в которых расположены источник и его изображение, равно Δa . Определить фокусное

расстояние F линзы.

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2007»

В мае 2007 года в МГУ прошла олимпиада «Ломоносов – 2007». Подобные олимпиады проводятся в МГУ уже третий год подряд по согласованию с департаментами образования Москвы, Московской области, Советом ректоров вузов г.Москвы и Министерством образования и науки РФ. Диплом олимпиады «Ломоносов-2007» приравнивается к диплому региональной олимпиады (3-й этап Всероссийской олимпиады). Олимпиада по физике традиционно проводится в форме устного испытания. В 2007 году участникам олимпиады предлагались задания, включающие два теоретических вопроса и три задачи различного уровня сложности. Ниже приведены задачи, предлагавшиеся участникам олимпиады «Ломоносов – 2007».

I. МЕХАНИКА

I.1. Два тонких жестких стержня длиной L каждый вращаются в плоскости рис. 48 вокруг неподвижных точек O_1 и O_2 . Расстояние между этими точками равно h . Найти скорость движения точки C пересечения этих стержней вдоль первого стержня в тот момент, когда угол между стержнями равен α , угол CO_1O_2 равен β , а скорости свободных концов стержней равны \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 .

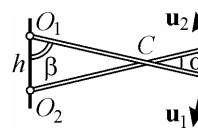


Рис. 48

I.2. На горизонтальной крышке стола лежат, касаясь друг друга, куб и цилиндр с одинаковыми массами (рис. 49). Коэффициенты трения тел о поверхность стола и между собой одинаковы и равны μ . Диаметр цилиндра равен длине ребра куба. Ось цилиндра горизонтальна и параллельна одной из граней куба. Известно, что если к кубу приложить горизонтальную силу, линия действия которой перпендикулярна его грани и проходит через центры масс куба и цилиндра, а модуль этой силы не меньше f , то цилиндр будет двигаться, не вращаясь. Найти массу куба.

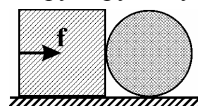


Рис. 49

I.3. О наклонную грань покоящегося на гладкой горизонтальной плоскости клина массой $M = 1$ кг ударяется шарик массой $m = 20$ г (см. рис. 50). Скорость шарика перед ударом была направлена горизонтально и равна $v_0 = 5$ м/с. После удара шарик отскочил вертикально вверх, а клин стал двигаться поступательно. Найти смещение клина после удара к тому моменту, когда шарик вернется в ту же точку пространства, где он столкнулся с клином. Удар считать абсолютно упругим, сопротивлением воздуха пренебречь. Модуль ускорения свободного падения $g = 10$ м/с².

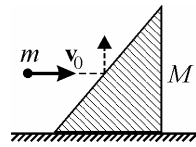


Рис. 50

I.4. Развивая максимальную мощность двигателя, автобус движется по горизонтальному участку шоссе с постоянной скоростью v_0 . Когда автобус при неизменной мощности, развиваемой двигателем, въезжает на подъем с углом наклона α_1 , его скорость падает до v_1 . С какой скоростью v_2 автобус будет преодолевать подъем с углом наклона $\alpha_2 < \alpha_1$ при той же мощности, развиваемой двигателем? Проскальзывание ведущих колес автобуса на всех участках шоссе отсутствует. Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной скорости автобуса.

I.5. Маленький шарик массой m закреплен на однородном стержне массой M и длиной L на расстоянии l от его конца. Стержень прислонен к вертикальной стене так, что образует с горизонтальной поверхностью угол α и располагается в вертикальной плоскости, перпендикулярной стене (см. рис. 51). При каком максимальном значении l стержень может находиться в равновесии? Коэффициент трения стержня о горизонтальную поверхность и стену равен μ .

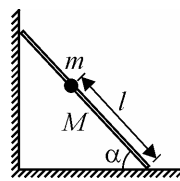


Рис. 51

1.6. К вертикальной стене одним концом с помощью шарнира прикреплен однородный тяжелый жесткий стержень, на другом конце которого подвешен груз (см. рис. 52). Стержень удерживают в горизонтальном положении легкой жесткой проволокой, прикрепленной к нему на расстоянии $l = 30$ см от шарнира. Другой конец проволоки закреплен на стене так, что проволока и стержень лежат в одной вертикальной плоскости. На каком расстоянии h от шарнира проволока должна быть прикреплена к стене, чтобы ее абсолютное удлинение было минимальным? Трением в шарнире пренебречь.

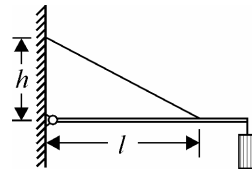


Рис. 52

1.7. На гладкий горизонтально закрепленный стержень надет шарик массой M . К шарiku прикреплена легкая пружина, ось которой совпадает с осью стержня, а другой конец пружины закреплен. После отклонения от положения равновесия шарик совершает гармонические колебания с амплитудой X_0 . В момент прохождения шариком положения равновесия на него садится муха массой m , имевшая скорость, направленную вертикально вниз. Найти амплитуду X_1 установившихся гармонических колебаний шарика с мухой.

1.8. К потолку покоящейся кабины лифта на пружине жесткостью k подвешена гиря массой m . В некоторый момент времени лифт начинает движение вверх с постоянным ускорением a . Какой путь S пройдет кабина лифта к тому моменту, когда длина пружины первый раз станет максимальной?

1.9. На горизонтально закрепленный стержень надеты два шарика, скрепленные между собой легкой пружиной. Если удерживать первый шарик, а второй отпустить после небольшой деформации пружины, то период его колебаний будет равен T_2 . Если же удерживать второй шарик, а отпустить после небольшой деформации пружины первый, то период его колебаний будет равен T_1 . Найти период колебаний шарика

ков, если их одновременно отпустить после небольшой деформации пружины. Силами трения пренебречь.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. В закрепленном вертикальном цилиндре площадью сечения S под гладким тонким поршнем массой m находится идеальный газ. Поршень находится в равновесии посередине цилиндра. В некоторый момент поршень начинают медленно вытаскивать из цилиндра. Какое значение примет прикладываемая к поршню сила в тот момент, когда поршень достигнет верхнего края цилиндра? Температура газа остается неизменной. Атмосферное давление p_0 .

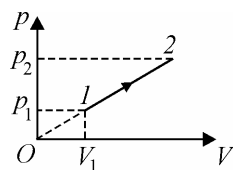


Рис. 53

II.2. На рис. 53 представлена зависимость давления p от объема V идеального газа. Найти изменение внутренней энергии этого газа, если при изменении его давления от $p_1 = 40$ кПа до $p_2 = 60$ кПа газу было сообщено количество теплоты $Q = 200$ Дж. В исходном состоянии объем газа был равен $V_1 = 2$ л.

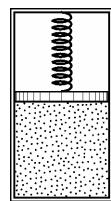


Рис. 54

II.3. В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым тонким поршнем находится один моль идеального одноатомного газа при температуре $T_0 = 300$ К. В пространстве над поршнем создан вакуум. Поршень удерживается в равновесии легкой пружиной, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра (см. рис. 54). Пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы его объем увеличился в $n = 1,5$ раза? Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К). Теплоемкостью сосуда, потерями теплоты и трением пренебречь.

II.4. В цилиндре под поршнем находятся смесь воздуха с насыщенным водяным паром и вода. Масса воды равна массе водяного пара. Если изотермически уменьшить объем смеси в $k = 2$ раза, то ее давление увеличится в $n = 1,5$ раза. Во сколько раз изменится давление смеси, если ее объем не уменьшать, а увеличивать при той же температуре до тех пор, пока вся вода не испарится?

II.5. В закрытом с одного конца цилиндрическом сосуде находятся два тонких поршня, способных перемещаться без трения и разделяющих пространство внутри сосуда на два отсека (см. рис. 55). В левом отсеке заключен водяной пар при давлении p , а в правом – воздух при том же давлении, причем длины отсеков одинаковы и равны L . Правый поршень медленно передвинули влево на расстояние l . На какое расстояние x сместится при этом левый поршень? Температуру пара и воздуха считать постоянной. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре равно $2p$.

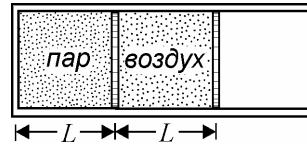


Рис. 55

III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

III.1. Два одинаковых маленьких шарика, заряженных одноименными зарядами, удерживают на расстоянии a друг от друга. В некоторый момент времени один из шариков отпускают без начальной скорости, после чего он начинает движение. Когда расстояние между шариками становится равным $2a$, отпускают без начальной скорости второй шарик. Определить, во сколько раз n скорость первого шарика будет превышать скорость второго шарика в момент, когда расстояние между ними станет равным $3a$. Действием всех сил, кроме сил электростатического отталкивания, пренебречь.

III.2. Две достаточно удаленные друг от друга и от других предметов одинаковые закрепленные металлические сферы имеют заряды

$Q_1 = 8$ мкКл и $Q_2 = 3$ мкКл. Незаряженный металлический шарик на тонкой длинной диэлектрической палочке подносят к первой сфере и касаются ее. Затем этот шарик переносят ко второй сфере и касаются ее таким же образом. Найти заряд $Q_{2к}$ оставшийся на второй сфере, если заряд шарика после его удаления от второй сферы оказался равным $q_2 = 0,5$ мкКл.

III.3. В цепи, схема которой изображена на рис. 56, ключ K в течение длительного времени находился в замкнутом состоянии. В некоторый момент ключ разомкнули. Какое количество теплоты Q выделится в схеме после этого? Емкости конденсаторов: $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, сопротивление резистора $R = 4$ Ом, ЭДС источника $\mathcal{E} = 10$ В, его внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом.

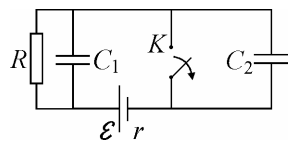


Рис. 56

III.4. Конденсатор ёмкостью $C = 1$ мкФ полностью зарядили от источника с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и отключили от него. Затем конденсатор замкнули на катушку, индуктивность которой равна $L = 30$ мГн. Найти силу тока I в LC -контуре в тот момент, когда заряд конденсатора уменьшится в $n = 2$ раза по сравнению с максимальным. Потерями в LC -контуре пренебречь.

III.5. Из тонкого провода сопротивлением $R = 10$ Ом изготовили квадратную рамку со стороной $a = 10$ см. Рамку поместили в однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки и по модулю равен $B = 0,1$ Тл. К вершинам двух соседних углов рамки подключили источник с малым внутренним сопротивлением и ЭДС $\mathcal{E} = 3$ В. Найти силу, действующую на рамку со стороны магнитного поля.

III.6. В цепи, схема которой показана на рис. 57, в некоторый момент замыкают ключ K . Найти напряжение U на катушке к тому моменту, когда через резистор протекает заряд q . Индуктивность катушки L , сопротивление резистора R , ЭДС источника \mathcal{E} , а его внутреннее сопротивление r .

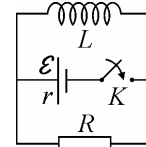


Рис. 57

IV. ОПТИКА

IV.1. Оптическая система состоит из двух одинаковых тонких собирающих линз с фокусным расстоянием F каждая. Линзы расположены на расстоянии L друг от друга ($F < L < 2F$) так, что их главные оптические оси совпадают (см. рис. 58). Слева от системы на расстоянии $2F$ от левой линзы находится точечный источник света S . На какое расстояние h сместится изображение источника, даваемое этой системой, если правую линзу сдвинуть перпендикулярно ее оптической оси на расстояние H ?

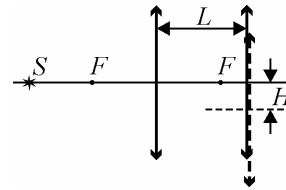


Рис. 58

IV.2. Оптическая система состоит из собирающей линзы L с фокусным расстоянием F и плоского зеркала Z , плоскость которого перпендикулярна главной оптической оси линзы. Между линзой и зеркалом находится стержень C , расположенный перпендикулярно главной оптической оси линзы. Расстояние от стержня до линзы равно a , причем $a > F$. Найти такое расстояние x между линзой и зеркалом, при котором отношение размеров двух действительных изображений стержня равно k ($k > 1$).

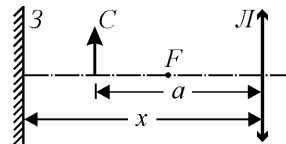


Рис. 59

IV.3. На катод фотоэлемента падает свет с мощностью $N = 0,3$ Вт. Длина волны света $\lambda = 330$ нм. Найти силу тока насыщения I , если на каждые $k = 10$ падающих на катод световых квантов приходится один фотоэлектрон. Считать, что постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, модуль заряда электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

IV.4. Два когерентных световых пучка проходят в воздухе одинаковые расстояния от источников до некоторой точки A . На пути первого пучка перпендикулярно ему помещают прозрачную пленку толщиной $d = 2,5$ мкм с показателем преломления $n = 1,3$. На сколько в результате этого изменится сдвиг фаз между световыми волнами в точке A , если длина волны света в вакууме $\lambda = 0,5$ мкм? Показатель преломления воздуха $n_0 = 1,0$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ФАКУЛЬТЕТ НАУК О МАТЕРИАЛАХ

1. Пусть t_1 – время, затраченное мотоциклистом на движение от начала колонны к ее концу, а t_2 – время, затраченное на движение в обратном направлении. Пути, пройденные мотоциклистом при этих движениях, соответственно равны $s_1 = l - vt_1$ и $s_2 = l + vt_2$. Учитывая, что в обоих случаях мотоциклист начинает движение из состояния покоя, имеем: $s_1 = \frac{at_1^2}{2}$, $s_2 = \frac{at_2^2}{2}$, или $\frac{at_1^2}{2} = l - vt_1$ и $\frac{at_2^2}{2} = l + vt_2$. Отсюда

$$t_1 = -\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} + \frac{2l}{a}} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} + \frac{2l}{a}}.$$

Полный путь, пройденный мотоциклистом, $s = s_1 + s_2 = 2l + v(t_2 - t_1)$.

Ответ: $s = 2\left(l + \frac{v^2}{a}\right) = 6$ км.

2. Мысленно выделим на поверхности планеты небольшую площадку площадью ΔS . Так как основная часть атмосферы сосредоточена вблизи поверхности планеты (по условию атмосфера тонкая), то атмосферное давление равно $p_0 = \frac{\Delta mg}{\Delta S}$, где Δm – масса столба атмосферного газа, находящегося над выделенной площадкой, g – ускорение свободного падения на поверхности планеты. Следовательно, полная масса атмосферы m пропорциональна площади S поверхности планеты, то есть

$$m = \frac{Sp_0}{g} = \frac{4\pi R^2 p_0}{g}.$$

Учитывая, что $g = \frac{GM}{R^2}$, где $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ – масса планеты, получаем

ответ: $m = \frac{3p_0 R}{\rho G}$.

3. Максимальное значение скорости груза, совершающего вертикальные колебания на пружине, достигается при прохождении грузом положения равновесия, в котором сумма силы тяжести и силы упругости растянутой пружины, действующих на груз, обращается в нуль. Примем положение равновесия груза за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии системы. При свободных незатухающих колебаниях полная механическая энергия системы сохраняется, откуда следует равенство:

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Выражая из этого равенства жесткость пружины, находим ответ:

$$k = m \frac{v_0^2 - v^2}{x^2} = 0,04 \text{ Н/м.}$$

4. В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона давление азота в начальном состоянии равно $p_n = \frac{mRT_1}{MV}$, где V – объем сосуда, m – масса азота, M – его молярная масса. Давление газа в конечном состоянии определяется по закону Дальтона: $p_k = p_1 + p_2$, где

$$p_1 = \frac{\alpha mRT_2}{(M/2)V} \text{ и } p_2 = \frac{(1-\alpha)mRT_2}{MV}$$

– парциальные давления атомарного и молекулярного азота, α – искомая доля диссоциировавших молекул. Следовательно,

$$p_k = \frac{mRT_2(1+\alpha)}{MV}.$$

По условию $p_k = np_n$. Объединяя записанные выражения, находим

$$\alpha = \frac{nT_1}{T_2} - 1.$$

Отметим, что относительная доля диссоциировавших молекул не может превышать единицу. Полагая в последнем равенстве $\alpha < 1$, получаем, что ответ имеет смысл при $n < 2T_2 / T_1$. Следовательно, в общем виде ответ формулируется так: $\alpha = \frac{nT_1}{T_2} - 1$ при $n < \frac{2T_2}{T_1}$; иначе решения нет.

5. Предложенное в условии задачи устройство предназначено для преобразования количества теплоты Q , полученного маслом при нагревании, в механическую работу A по перемещению рамы. В соответствии с определением коэффициента полезного действия, имеем $\eta = \frac{A}{Q}$.

Количество теплоты, получаемое маслом, $Q = (t_2 - t_1)C$, совершаемая при этом работа $A = Fh$. Ответ: $\eta = \frac{Fh}{C(t_2 - t_1)}$.

6. На рис. 60 приведена эквивалентная схема рассматриваемой цепи, где сопротивления $R_1 = R_0 l / L$, $R_2 = R_0 (L - l) / L$. Так как резисторы R_1 и R_2 соединены параллельно, то

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

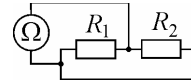


Рис. 60

Отсюда находим, что искомое сопротивление R , которое покажет омметр, равно $R = \frac{l(L-l)R_0}{L^2}$.

7. Сопротивление цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора, катушки и конденсатора, и подключенной к источнику гармонического напряжения с циклической частотой ω , равно

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где R – сопротивление резистора. Мощность, потребляемая цепью от источника,

$$N = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{Z} \cos \varphi,$$

где U_0 – амплитуда напряжения источника, φ – сдвиг по фазе между током в цепи и напряжением источника. Поскольку $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$, выражение для мощности, потребляемой цепью, можно переписать в виде

$$N = \frac{1}{2} \frac{U_0^2 R}{Z^2}.$$

Так как при замыкании конденсатора потребляемая цепью мощность не изменяется, то величина Z остается неизменной:

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2 + (\omega L)^2.$$

Отсюда получаем ответ: $\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$.

8. Пусть в момент времени t источник находится в точке S , а его изображение – в точке S_1 (см. рис. 61). За время Δt источник и изображение переместятся и в момент $t + \Delta t$ займут положения S' и S'_1 , соответственно, причем $S'S = v\Delta t$, а $S'_1S_1 = v\Delta t$. Так как $\triangle ASC$ подобен $\triangle S_1BC$, а $\triangle S'SC$ подобен $\triangle S'_1S_1C$, справедливо равенство $\frac{S'S}{S'_1S_1} = \frac{AC}{BC}$. В соответствии с формулой линзы

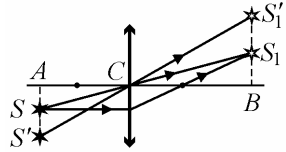


Рис. 61

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{F},$$

где $BC = b$. Отсюда следует, что

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F}{b-F}$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $V = \frac{Fv}{b-F}$.

ФАКУЛЬТЕТЫ ХИМИЧЕСКИЙ, БИОИНЖЕНЕРИИ И БИОИНФОРМАТИКИ

ВАРИАНТ 1

1.3. В инерциальной системе отсчёта частица движется по прямой, если сумма действующих на неё сил равна нулю. Следовательно, силы, действующие на протон со стороны электрического и магнитного поля, направлены в разные стороны и равны по величине. Из уравнения движения протона (второго закона Ньютона)

$$qE - qvB = 0$$

находим искомую скорость:

$$v = \frac{E}{B} = 2 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

1.4. Все необходимые построения выполнены на рис. 62. Прежде всего, для построения хода искомого луча надо найти положения фокусов линз – по условию они совпадают для рассеивающей и собирающей линз. Проведём побочную оптическую ось AB , параллельную падающему лучу l . Продолжение луча 2 пересекается с этой осью в передней фокальной плоскости линз. Отложив такое же расстояние за плоскостью линз,

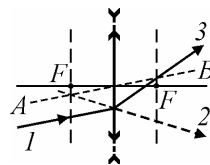


Рис. 62

находим заднюю фокальную плоскость. Луч 3 пересекается с побочной оптической осью в точке пересечения её с этой фокальной плоскостью.

1.5. Из уравнения состояния идеального газа $p = nkT$ следует, что давление газа p пропорционально произведению его абсолютной температуры T и концентрации молекул n . Здесь k – постоянная Больцмана. По условию температура газа увеличилась в 2 раза. Когда половина двухатомных молекул распалась на атомы, частиц в сосуде стало в 1,5 раза больше. Поскольку объем сосуда не изменился, концентрация частиц также возросла в 1,5 раза. Ответ: давление газа увеличилось в $\alpha = 3$ раза.

1.6. Поскольку по условию сопротивлением воздуха можно пренебречь, при решении проще всего воспользоваться законом сохранения механической энергии системы «сосулька + Земля». За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии тяготения удобно выбрать горизонталь, проходящую через точку соударения с поверхностью крыши BC . Точка отрыва B находится выше этого уровня на $h = l \sin \alpha$, поэтому равенство механических энергий в моменты времени, когда сосулька находится в точке B и в точке касания с участком крыши BC можно записать так:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl \sin \alpha = \frac{mn^2 v_0^2}{2}.$$

Отсюда нетрудно получить ответ: $v_0 = \sqrt{\frac{2gl \sin \alpha}{n^2 - 1}}$.

1.7. Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землей, направив координатную ось Oy вертикально вверх к точке подвеса нити. На шарик действуют три силы – сила тяжести mg , сила натяжения нити T и сила Лоренца F_L (см. рис. 63). Запишем уравнение движения шарика при прохождении им нижней точки траектории в проекции на ось Oy :

$$ma_{\text{ц.с.}} = T + F_{\text{Л}} - mg.$$

Здесь учтено, что по правилу левой руки сила Лоренца $F_{\text{Л}}$, действующая на положительно заряженный шарик, направлена перпендикулярно скорости и вектору магнитной индукции поля \mathbf{B} вдоль нити вверх. Центростремительное ускорение шарика равно:

$$a_{\text{ц.с.}} = \frac{v^2}{l}.$$

Скорость шарика в нижней точке траектории легко найти из закона сохранения механической энергии:

$$mgl = \frac{mv^2}{2}.$$

Решая совместно записанную систему уравнений, получаем ответ:

$$T = 3mg - qB\sqrt{2gl}.$$

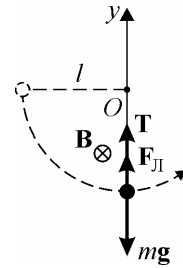


Рис. 63

1.8. При нормальном падении на дифракционную решетку плоскопараллельного пучка монохроматического света от лазера дифракционные максимумы располагаются симметрично относительно центрального (нулевого) максимума. Угловое положение максимумов определяется условием:

$$d \sin \varphi = m\lambda,$$

где m – порядок дифракции. Поскольку угол дифракции не может превышать 90° ($\sin \varphi \leq 1$), то максимальный порядок доступного для наблюдения дифракционного максимума равен

$$m_{\text{max}} = \left[\frac{d}{\lambda} \right],$$

где символ $[\dots]$ означает целую часть числа. По условию наблюдаются всего $k = 7$ максимумов. Это означает, что в данном случае $m_{\text{max}} = 3$. Следовательно, период решетки $d > m_{\text{max}}\lambda$. Однако, период решетки

должен быть меньше, чем $(m_{\max} + 1)\lambda$, иначе будет наблюдаться меньше семи максимумов. Таким образом, период решетки лежит в диапазоне:

$$m_{\max}\lambda < d < (m_{\max} + 1)\lambda, \text{ т.е. } 3\lambda < d < 4\lambda.$$

Ответ: $1,9 \text{ мкм} < d < 2,5 \text{ мкм}$.

1.9. Энергия электрического поля конденсатора равна

$$W_{1,2} = \frac{CU_{1,2}^2}{2}.$$

Здесь U – разность потенциалов между обкладками конденсатора емкостью C , а индексы 1 и 2 соответствуют исходному и замкнутому состоянию ключа K . Разность потенциалов U проще всего найти, если учесть, что она равна падению напряжения на параллельном с конденсатором *однородном* участке цепи, по которому протекает постоянный ток (используя закон Ома для однородного участка цепи).

При разомкнутом ключе (см. рис. 64) – это участок $1-3-2$, имеющий сопротивление $2R$. По нижней ветви $1-4-2$, включающей конденсатор, ток не течет. Поэтому сила тока, протекающего по участку $1-3-2$, определяется законом Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{2R + r},$$

а интересующая нас разность потенциалов равна:

$$U_1 = I_1 \cdot 2R = \frac{\mathcal{E}}{2R + r} 2R.$$

После замыкания ключа полное сопротивление внешней цепи становится равным $1,5R$. Параллельно конденсатору теперь подключен участок $3-2$ с сопротивлением R . Сила тока и разность потенциалов на этом участке равны, соответственно:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{1,5R + r}, \quad U_2 = I_2 R = \frac{\mathcal{E}}{1,5R + r} R.$$

Подставляя найденные значения разностей потенциалов в выражение для энергии конденсатора и беря отношение соответствующих величин, получаем ответ:

$$n = \frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \left(\frac{2R+r}{3R+2r}\right)^2 \approx 0,4 .$$

1.10. Решение задачи является хорошим примером применения законов сохранения в механике. Выясним, прежде всего, какие величины могут сохраняться для системы «шарик + клин». Поскольку удар абсолютно упругий, неизменной остается *механическая энергия системы*. Для решения задачи следует приравнять кинетическую энергию шарика непосредственно перед соударением и кинетическую энергию клина и шарика сразу после соударения. Обозначив через v_0 и v_1 скорости шарика до и после удара, а через u – скорость клина после удара, имеем:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} .$$

Отметим теперь, что импульс системы «шарик + клин» при соударении, очевидно, *изменяется*: до удара он был горизонтален, а после удара появляется вертикальная составляющая этого импульса, связанная с отскочившим вверх шариком. Физическая причина этого изменения также понятна – в процессе соударения появляется дополнительная составляющая внешней силы – силы реакции опоры. Однако горизонтальная составляющая импульса системы сохраняется, поскольку реакция гладкой опоры не имеет проекции на это направление. Следовательно,

$$mv_0 = Mu .$$

Самый тонкий момент в решении этой задачи – сообразить, что вектор изменения импульса шарика Δp направлен строго перпендикулярно наклонной поверхности клина. Эта поверхность также гладкая и импульс силы, действующей на шарик со стороны клина в процессе удара, не имеет касательной к этой поверхности составляющей. Остается сделать аккуратный рисунок (см. рис.65) с указанием векторов импульса шарика до и после удара, а также вектора изменения

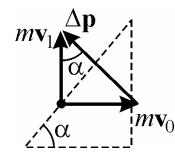


Рис. 65

импульса шарика. Из рисунка видна связь модулей соответствующих импульсов:

$$mv_1 = mv_0 \operatorname{ctg} \alpha .$$

Решая записанную систему уравнений, получаем ответ:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{M-m}{M}} = \frac{7}{8} .$$

ВАРИАНТ 2

2.3. Внутренняя энергия идеального газа *прямо пропорциональна* его абсолютной температуре. Поэтому, исходя из представленного в условии задачи графика, сначала следует построить зависимость температуры газа от его объема (см. рис. 66).

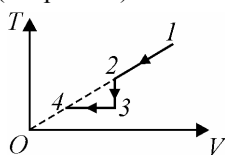


Рис. 66

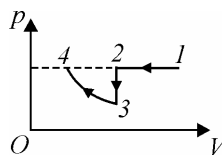


Рис. 67

Теперь нетрудно установить, что процесс $1-2$ изобарный, $2-3$ – изохорный, а $3-4$ – изотермический. Искомая диаграмма представлена на рис. 67. Здесь учтено, что точки $1, 2$ и 4 лежат на одной изобаре (давления газа в этих точках одинаково), а также качественно соблюдены пропорции при изменении объема в процессах $1-2$ и $3-4$. Участок $3-4$ – отрезок гиперболы.

2.4. Отметим прежде всего, что *ультразвуковой вибратор* – это кристалл, колеблющийся с ультразвуковой частотой, который может быть использован как генератор и как приёмник акустических волн. Обозначим через v скорость воздушного потока относительно лабораторной системы отсчёта, а через U скорость звука относительно воздушного потока, причём $U > v$. Используя закон сложения скоростей, запишем

равенства:

$$L = (U + v)\tau_1 \text{ — для распространения звука вдоль потока, и}$$

$$L = (U - v)\tau_2 \text{ — для распространения звука против потока.}$$

Здесь L — расстояние между вибраторами. Решая эту систему уравнений, получаем ответ: $v = \frac{L(\tau_2 - \tau_1)}{2\tau_1\tau_2} = 17,4 \text{ м/с.}$

2.5. Обозначим через β угол преломления. По закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

где n — показатель преломления вещества относительно воздуха. Абсолютный показатель преломления воздуха мало отличается от единицы. Поэтому n можно считать равным абсолютному показателю преломления вещества. Учитывая, что по условию угол между отраженным и преломленным лучами прямой, и используя закон отражения, можно записать соотношение $\alpha + \beta = \pi/2$. Отсюда следует, что $\sin \beta = \cos \alpha$. Тогда из закона преломления вытекает равенство: $\operatorname{tg} \alpha = n$. Согласно волновой теории света

$$n = \frac{c}{v},$$

где c — скорость света в вакууме, v — скорость света в веществе. Ответ:

$$v = \frac{c}{\operatorname{tg} \alpha} \approx 1,73 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

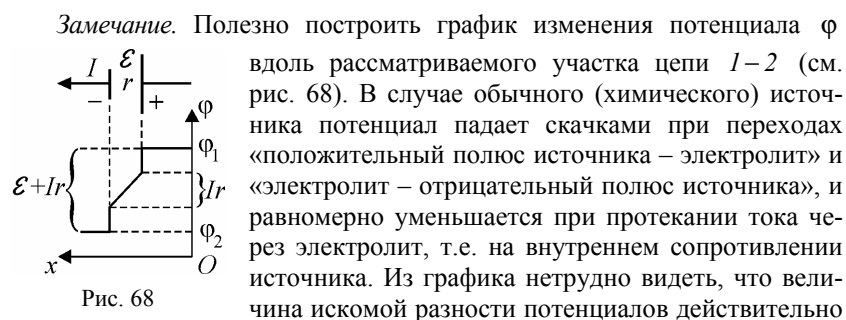
2.6. Эта задача является хорошей иллюстрацией применения закона Ома для неоднородного (содержащего ЭДС) участка цепи. Чтобы найти заряд q на пластинах конденсатора в предложенной схеме, необходимо вначале определить разность потенциалов $|\varphi_1 - \varphi_2| = U$ между обкладками конденсатора. По определению ёмкости конденсатора C она связана с абсолютной величиной заряда его обкладок равенством:

$$C = \frac{q}{U}.$$

Поскольку конденсатор подключен к полюсам источника параллельно, искомую разность потенциалов можно найти, записав закон Ома для неоднородного участка цепи. Учитывая, что ток через источник протекает от положительного полюса к отрицательному (работа сторонних сил отрицательна), а сопротивление участка равно сопротивлению источника r , имеем:

$$I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 - \mathcal{E}}{r}.$$

Отсюда $\Phi_1 - \Phi_2 = \mathcal{E} + Ir$. Ответ: $q = C(\mathcal{E} + Ir) = 1,2 \cdot 10^{-5}$ Кл.



Приведенный анализ поведения потенциала на участке цепи, содержащем источник, помогает дать ответ ещё на один важный вопрос: *что покажет вольтметр, подключенный к клеммам источника?* Идеальный вольтметр в рассматриваемом случае (когда ток через источник течет от положительной клеммы к отрицательной) покажет напряжение $U_1 = \mathcal{E} + Ir$. В частности, такой случай реализуется, при зарядке аккумуляторов. Если ток через источник течет от отрицательной клеммы к положительной, то вольтметр покажет напряжение $U_2 = \mathcal{E} - Ir$. Предлагаем обосновать этот результат самостоятельно, построив график зависимости потенциала вдоль участка цепи также и для этого случая.

2.7. Скольжение бруска вдоль наклонной поверхности клина происходит под действием двух сил: силы тяжести mg и силы реакции наклонной плоскости N , которая в отсутствие трения перпендикулярна плоскости (см. рис. 69). По второму закону Ньютона для бруска в проекциях на направления вдоль наклонной плоскости и перпендикулярное к ней имеем:

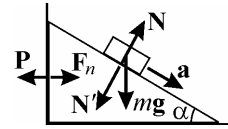


Рис. 69

$$ma = mg \sin \alpha, \quad 0 = N - mg \cos \alpha.$$

По третьему закону Ньютона брусок действует на наклонную плоскость с силой $N' = -N$. Поскольку клин неподвижен, то векторная сумма всех сил, действующих на него, равна нулю. Равна нулю и сумма проекций сил на горизонтальное направление. В горизонтальном направлении на клин действуют силы: вправо – сила реакции стенки F_n , влево – горизонтальная составляющая силы давления бруска, равная по модулю $N \sin \alpha$. По второму закону Ньютона для клина имеем:

$$0 = F_n - N \sin \alpha.$$

Решая записанную систему уравнений, получаем:

$$F_n = mg \cos \alpha \cdot \sin \alpha = mg \sqrt{1 - \left(\frac{a}{g}\right)^2} \cdot \frac{a}{g} = m \frac{a}{g} \sqrt{g^2 - a^2}.$$

Наконец учтём, что по третьему закону Ньютона искомая сила нормального давления клина на стенку равна по модулю силе реакции стенки F_n . Ответ: $P = m \frac{a}{g} \sqrt{g^2 - a^2} = 0,48 \text{ Н}$.

2.8. Исходя из указанной в условии задачи зависимости между температурой и объемом газа, делаем заключение, что температура газа квадратично зависит от его объема:

$$T \sim V^2.$$

В соответствии с объединённым газовым законом параметры заданного количества идеального газа в любом процессе связаны друг с другом соотношением:

$$\frac{pV}{T} = \text{const}.$$

Из этих выражений следует, что в рассматриваемом процессе давление газа растет пропорционально объему ($p \sim V$). Для определения работы газа удобно представить процесс его расширения на pV -диаграмме (см. рис. 70). Работа численно равна «площади под графиком» зависимости p от V . В нашем случае это – площадь трапеции с основаниями p_1 , p_2 и высотой $V_2 - V_1$. Имеем:

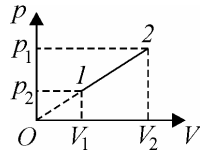


Рис. 70

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1 + p_1 V_2 - p_2 V_1).$$

Поскольку точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат, справедливо равенство $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2}$. Следовательно, выражение для работы газа принимает вид:

$$A = \frac{1}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Согласно уравнению состояния идеального газа,

$$pV = \nu RT,$$

где ν – число молей газа. Поэтому искомая работа равна

$$A = \frac{1}{2} R(T_2 - T_1) = 1245 \text{ Дж.}$$

2.9. Линейное увеличение k изображения предмета, даваемого линзой – это отношение линейного размера изображения к линейному размеру предмета. Как легко убедиться, оно равно отношению расстояния f от линзы до изображения к расстоянию d от предмета до линзы:

$$k = \frac{f}{d}.$$

Когда предмет находится на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы ($d = 2F$), его изображение формируется на таком же расстоянии за линзой, т.е. $f_1 = 2F$ (это можно проверить с помощью формулы линзы или путем построения). Размер этого изображения совпадает с размером предмета, поэтому $k_1 = 1$.

Расстояние между изображением предмета и рассеивающей линзой можно найти с помощью формулы линзы:

$$-\frac{1}{f_2} + \frac{1}{2F} = -\frac{1}{F}.$$

Знак «минус» в левой части формулы, отражает тот факт, что изображение предмета мнимое, а знак «минус» в правой части – тому, что линза рассеивающая. Из этой формулы следует, что $f_2 = \frac{2}{3}F$. Поэтому ли-

нейное увеличение во втором случае $k_2 = \frac{2F/3}{2F} = \frac{1}{3}$. Ответ:

$$\frac{k_1}{k_2} = 3.$$

2.10. Прежде всего, отметим, что момент максимального растяжения пружины соответствует нижнему положению груза в процессе его вертикальных колебаний. В этот момент пружина растянута на величину

$$\Delta x = x_0 + A,$$

где A – амплитуда колебаний грузика. Здесь учтено важное обстоятельство, что в положении равновесия системы пружина уже растянута. Величина этого растяжения x_0 соответствует равенству сил тяжести и упругости:

$$0 = mg - kx_0.$$

Потенциальная энергия пружины в интересующий нас момент равна

$$E_{\text{п}} = \frac{k\Delta x^2}{2}.$$

Чтобы найти эту величину, необходимо, таким образом, найти параметры A и k . Амплитуда колебаний A , очевидно равна половине расстояния S между двумя крайними положениями грузика:

$$A = \frac{S}{2}.$$

Жёсткость пружины связана с периодом колебаний грузика T хорошо известным соотношением:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

В свою очередь период колебаний равен удвоенному времени движения грузика между двумя крайними положениями:

$$T = 2\tau.$$

Решая записанную систему уравнений, получаем ответ:

$$E_{\text{п}} = \frac{m(2g\tau^2 + \pi^2 S)^2}{8\pi^2 \tau^2} \approx 0,2 \text{ Дж}.$$

ВАРИАНТ 3

3.3. По закону Фарадея ЭДС индукции \mathcal{E}_i равна скорости изменения магнитного потока Φ через поверхность, ограниченную проводящим контуром:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

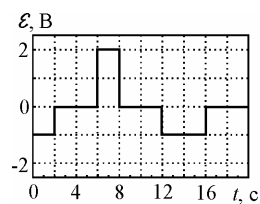


Рис. 71

Следовательно, \mathcal{E}_i определяется наклоном графика зависимости $\Phi(t)$. В промежутке времени от 0 до 2 с величина ЭДС постоянна и равна $\mathcal{E}_{i1} = -\frac{2 \text{ Вб}}{2 \text{ с}} = -1 \text{ В}$. Такая же ЭДС индуцируется в промежутке от 12 с до 16 с. В промежутке

времени от 6 с до 8 с ЭДС $\mathcal{E}_{i2} = \frac{4 \text{ Вб}}{2 \text{ с}} = 2 \text{ В}$. На горизонтальных участках графика ЭДС равна нулю, т.к. изменения магнитного потока не происходит. Соответствующая зависимость представлена графически на рис. 71.

3.4. При движении брусков из начального положения в конечное потенциальная энергия каждого из них изменяется на одну и ту же величину. В соответствии с законом сохранения энергии часть потенциальной энергии каждого из брусков перейдет в кинетическую энергию, а часть израсходуется на работу против силы трения. Брусок, который был пущен вниз, пройдет до основания наклонной плоскости меньший путь, чем другой брусок. Следовательно, для этого бруска работа против силы трения будет меньше, чем для бруска, пущенного вверх. Ответ: у основания наклонной плоскости большую скорость будет иметь брусок, который пущен вниз.

3.5. В исходном положении поршня силы, действующие на него со стороны воздуха, находящегося внутри и снаружи цилиндра, уравновешены. Каждая из этих сил по модулю равна

$$F_1 = p_0 S = p_0 \frac{\pi d^2}{4}.$$

При вытаскивании поршня из цилиндра давление воздуха в цилиндре уменьшается, и к поршню приходится прикладывать все увеличивающуюся силу. Когда поршень находится у открытого конца цилиндра, эта сила максимальна. В этом положении поршня объем воздуха в цилиндре увеличится в два раза, а его давление по закону Бойля-Мариотта уменьшится в два раза. В два раза уменьшится также сила давления на поршень со стороны воздуха в цилиндре, а сила атмосферного давления останется прежней. Поэтому к поршню должна быть приложена сила, направленная наружу и не меньшая, чем

$$F = \frac{p_0 S}{2} = \frac{p_0 \pi d^2}{8} = 20 \text{ Н}.$$

3.6. При разомкнутом ключе батарею можно представить в виде двух параллельно соединенных участков, в каждом из которых последовательно соединены конденсаторы с емкостями C и $3C$. В этом случае эквивалентная ёмкость батареи $C_1 = \frac{3}{2}C$.

При замкнутом ключе батарею можно представить в виде двух последовательно соединенных участков, в каждом из которых конденсаторы C и $3C$ соединены параллельно. В этом случае ёмкость батареи $C_2 = 2C$.
Ответ: при замыкании ключа ёмкость увеличилась в $k = \frac{C_2}{C_1} = \frac{4}{3} = 1,33$ раза.

3.7. Количество теплоты, выделяемое нагревателем за промежуток времени τ ,

$$Q = \frac{U^2}{R} \tau.$$

За вычетом тепловых потерь на плавление льда пойдет количество теплоты

$$Q_1 = Q(1-k) = \frac{U^2}{R} (1-k) \tau.$$

С другой стороны, для того чтобы расплавить массу льда m требуется количество теплоты

$$Q_2 = \lambda m.$$

Приравняв $Q_1 = Q_2$, получаем ответ: $R = \frac{U^2 t (1-k)}{\lambda m} \approx 5,3$ Ом.

3.8. При решении задачи главное – это установить, по какой траектории движется центр стержня (точка C). Для этого следует сделать аккуратный чертеж (см. рис. 72) и убедиться из равенства прямоугольных треугольников (например, $\Delta O x_c C$ и $\Delta C x_c B$), что расстояние OC – постоянная величина, равная половине длины стержня. Следовательно, траектория, по которой движется центр стержня, представляет собой дугу окружности радиусом $R = \frac{l}{2}$

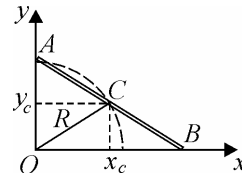


Рис. 72

с центром в точке O . Путь, проходимый точкой C в рассматриваемом движении стержня, равен четверти длины этой окружности. Ответ:

$$S = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi l}{4} \approx 0,8 \text{ м.}$$

3.9. Если бы в той части цепи, где включен резистор R_1 , не было диода, то количество теплоты, выделившейся на этом резисторе за время τ , было бы равно

$$Q'_1 = \frac{U_{\text{д}}^2}{R_1} \Delta t = \frac{U_0^2}{2} \frac{\tau}{R_1}.$$

При включенном в цепь диоде ток через резистор отличен от нуля только в течение половины каждого периода. Поэтому на резисторе выделяется вдвое меньшее количество теплоты:

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q'_1 = \frac{U_0^2}{4} \frac{\tau}{R_1}.$$

Аналогично, количество теплоты, выделившееся на резисторе R_2 , равно

$$Q_2 = \frac{U_0^2}{4} \frac{\tau}{R_2}.$$

Общее количество теплоты, выделившееся на обоих резисторах,

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{U_0^2 (R_1 + R_2)}{4 R_1 R_2} \tau = 90 \text{ Дж.}$$

Заметим, что полярность включения диодов не играет роли.

3.10. Построение изображения $A'B'$ стержня AB приведено на рис. 73. Для построения использованы два луча. Луч 1 проходит без преломления через оптический центр линзы. Луч 2 направлен вдоль стержня и после преломления в линзе пересекает ее правую фокальную плоскость в точке D . Отметим, что луч 2 выбран не случайно. Подобные лучи испускают все точки стержня, поэтому изображение стержня располагается на прямой, имеющей такой же наклон к главной оптической оси линзы, что и луч 2 после преломления в линзе. Из рисунка видно, что

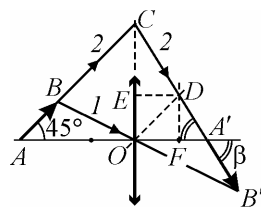


Рис. 73

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{OC}{OA'}.$$

Кроме того, из подобия $\triangle OCA'$ и $\triangle CED$ следует, что

$$OA' = \frac{ED \cdot OC}{EC}.$$

Поскольку по условию $\angle AOC = 45^\circ$, справедливы равенства: $OC = d$, $ED = F$, $EC = d - F$. Решая записанную систему уравнений, находим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d - F}{F}. \text{ Ответ: } \beta = \operatorname{arctg} \frac{d - F}{F} = \operatorname{arctg} 2 \approx 63,4^\circ.$$

ВАРИАНТ 4

4.3. Приведенная на рис. 14 зависимость координаты материальной точки от времени описывается выражением

$$x = x_{\max} \cos \omega t,$$

где x_{\max} – амплитуда, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – круговая частота, T – период колебаний. Проекция скорости точки на ось Ox равна производной от координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_{\max} \omega \sin \omega t .$$

Отсюда находим максимальную величину скорости:

$$v_{\max} = x_{\max} \omega = x_{\max} \frac{2\pi}{T} .$$

Значения $x_{\max} = 2$ см и $T = 8$ с определяются из графика. Ответ:

$$v_{\max} \approx 1,57 \text{ см/с} .$$

4.4. Задача решается очень просто, если знать особенности использования собирающей линзы в качестве лупы. Для того чтобы получить увеличенное мнимое изображение предмета, его располагают вблизи фокальной плоскости линзы между линзой и фокусом. Записывая формулу линзы, имеем:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F-x} - \frac{1}{f} .$$

Это равенство легко преобразуется в квадратное уравнение относительно фокусного расстояния линзы

$$F^2 - xF - xf = 0 ,$$

корни которого имеют вид:

$$F_{1,2} = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + xf} .$$

Для собирающей линзы следует выбрать положительный корень. Фокусное расстояние линзы равно $F = 5$ см, а её оптическая сила $D = \frac{1}{F} = 20$ дптр.

4.5. Обозначим через α угол, который образует крыша с горизонталью. В отсутствие трения тела скользят вдоль крыши (наклонной плоскости) с ускорением $a = g \sin \alpha$. Длина наклонной плоскости $S = \frac{L}{\cos \alpha}$.

Из законов кинематики прямолинейного равноускоренного движения следует, что расстояние S скользящее тело проходит за время

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2L}{g \cos \alpha \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{4L}{g \sin 2\alpha}}.$$

Время скольжения минимально при максимальном значении $\sin 2\alpha$, которое достигается при $\alpha = 45^\circ$. Ответ: $H = L = 2,5$ м.

4.6. При равновесии поршня равнодействующая всех сил, действующих на него, равна нулю. Снизу вверх на поршень действует сила давления воздуха, находящегося в цилиндре, $F_1 = pS$, где p – давление воздуха, $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь поршня. Сверху на поршень действует сила атмосферного давления $F_2 = p_0 S$, где p_0 – атмосферное давление. Вниз также направлена сила тяжести $F_3 = Mg$, действующая на поршень, и сила давления стержня F_4 . Последняя вычисляется по правилу моментов и равна $F_4 = 2mg$. Учитывая направления сил, условие равновесия поршня запишется в виде:

$$p_0 S + Mg + 2mg = pS.$$

Отсюда находим искомую величину

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{4(M + 2m)g}{\pi d^2} \approx 4 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

4.7. Рассмотрим электрическую схему, описанную в условии (см. рис. 74). В процессе разрядки конденсатора после замыкания ключа K через резисторы протекает ток, сила которого меняется во времени, постепенно убывая. Однако в любой момент времени через резисторы те-

чет одинаковый ток. Согласно закону Джоуля–Ленца мощности, выделяющиеся в резисторах, равны, соответственно $N_1 = I^2 R_1$, $N_2 = I^2 R_2$. Их отношение

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

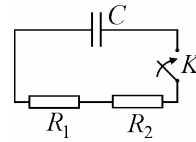


Рис. 74

не зависит от времени. Поэтому такое же отношение справедливо и для количеств теплоты, выделившихся в конденсаторах за время разрядки конденсатора:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

При этом полное количество выделившейся теплоты равно энергии, запасенной в конденсаторе:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{CU^2}{2}.$$

Из этих соотношений находим ответ:

$$Q_1 = \frac{CU^2}{2} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

4.8. Обозначим через V_0 начальный объем газа. Очевидно, что в исходном состоянии пружина не деформирована. Пусть в нагретом состоянии газ занимает объем V . При этом пружина удлинилась на величину $x = \frac{V - V_0}{S}$. Теперь со стороны пружины на поршень действует сила упругости, величина которой равна

$$F = kx = k \frac{V - V_0}{S}.$$

Главное – понимать, что в любом равновесном состоянии векторная сумма всех сил, действующих на поршень, равна нулю, т.е.

$$F + p_0 S = pS.$$

Здесь p – давление газа в объеме V . Из последнего соотношения находим ответ:

$$p = p_0 + \frac{k}{S^2}(V - V_0).$$

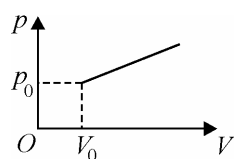


Рис. 75

Отсюда видно, что давление газа увеличивается при расширении по линейному закону (см. рис. 75), причем при объеме V_0 давление равно p_0 . Наклон прямой зависит от отношения величин k и S^2 .

4.9. Условие плавания льда массой m имеет вид:

$$mg = \rho Vg.$$

Здесь V – объем погруженной в воду части льда, равный объему вытесненной льдом воды, ρ – плотность воды. Высота подъема уровня воды h определяется из условия $V = Sh$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь основания цилиндрического сосуда. Из этих соотношений получаем ответ:

$$h = \frac{4m}{\rho \pi d^2} \approx 4,8 \text{ см.}$$

Заметим, что этот ответ справедлив для любого тела массой m , не обязательно льда. Важно лишь, чтобы погруженное в воду тело оставалось на плаву.

4.10. Так как при замыкании ключа ток по нему не течет, разность потенциалов между точками, которые соединяются ключом K , равна нулю. Отсюда вытекает, что

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \text{ и } R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} = 4 \text{ Ом.}$$

Следовательно, ключ K из схемы можно удалить. После этого легко найти полное сопротивление цепи, подключенной к источнику тока,

пользуясь правилами последовательного и параллельного соединений резисторов:

$$R = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)} = 4 \text{ Ом.}$$

Сила тока через источник определяется по закону Ома. Ответ:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1,5 \text{ А.}$$

БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

3. Работа, совершаемая против электрического поля при перемещении в нём заряда q , определяется формулой

$$A = q \cdot \Delta\phi,$$

где $\Delta\phi$ – разность потенциалов между точками, соответствующими конечному и начальному положениям заряда. Для однородного поля

$$\Delta\phi = EL,$$

где E – модуль напряженности электрического поля, L – перемещение заряда вдоль силовой линии поля. Решая записанные уравнения, получаем ответ:

$$E = \frac{A}{qL} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

4. Искомая зависимость давления газа от его объема (pV -диаграмма процесса) представлена на рис. 76. Отметим, что участки $1-2$ и $4-5$ являются гиперболами, описываемыми изотермическими зависимостями, $2-3$ и $3-4$ – прямыми, параллельными осям координат и соответствующие изобарному и изохорному процессам. Следует обратить внимание на то, что точки 1 , 3 и 4 находятся на одной вертикальной прямой (объем, занимаемый идеальным газом в этих состояниях одина-

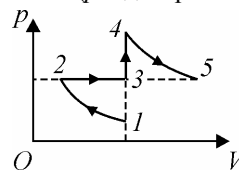


Рис. 76

ков). В состояниях 2 и 5 давление газа одно и то же (штриховая линия 1 – 5 параллельна оси абсцисс).

5. Если длительность соударения является пренебрежимо малой, то сумма проекций всех сил, действующих на систему «шарик + брусок», вдоль направления движения тел равна нулю. Поэтому импульс системы сохраняется: $m_1v = m_2u$. Отсюда легко определить начальную скорость шарика:

$$v = \frac{m_2u}{m_1}.$$

По закону сохранения энергии начальная кинетическая энергия шарика равна сумме кинетической энергии бруска (шарик по условию задачи остановился и, следовательно, не обладает кинетической энергией) и количества теплоты Q , выделившейся при ударе:

$$\frac{m_1v^2}{2} = \frac{m_2u^2}{2} + Q.$$

Таким образом, искомое количество теплоты Q может быть определено как разность кинетических энергий системы до и после удара. Ответ:

$$Q = \frac{m_2(m_2 - m_1)u^2}{2m_1} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

6. Используя кинематический закон равноускоренного движения, перемещения мотоциклиста S на двух равных отрезках пути можно записать в виде:

$$S = \frac{at_1^2}{2} \quad \text{и} \quad S = \Delta v_1 \cdot t_2 + \frac{a_2t_2^2}{2},$$

где t_1 и t_2 – времена прохождения мотоциклистом этих отрезков, а Δv_1 – скорость, которую имел мотоциклист перед прохождением второго отрезка. Здесь мы учли, что мотоциклист начал прохождение первого отрезка из состояния покоя. Изменения скорости мотоциклиста при прохождении им рассматриваемых отрезков пути можно записать как

$$\Delta v_1 = a_1 t_1, \quad \Delta v_2 = a_2 t_2.$$

Выразив отсюда t_1 , t_2 и подставив их в формулы для перемещения мотоциклиста, получим соотношение:

$$\frac{\Delta v_1^2}{a_1} = \frac{2\Delta v_1 \Delta v_2}{a_2} + \frac{\Delta v_2^2}{a_2}.$$

Отсюда легко определить искомое отношение ускорений:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\Delta v_1^2}{2\Delta v_1 \cdot \Delta v_2 + \Delta v_2^2} = 0,8.$$

7. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта имеет вид:

$$\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mv^2}{2},$$

где h – постоянная Планка, λ – длина волны света, A – работа выхода, $\frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия электрона, выбиваемого из металла. Из этого уравнения следует, что максимальная длина волны λ_0 , при которой ещё наблюдается фотоэффект (красная граница фотоэффекта), определяется равенством:

$$\frac{hc}{\lambda_0} = A.$$

Если металлическому шарiku сообщить заряд q , то квант света должен передать электрону энергию, необходимую не только для совершения работы выхода, но и преодоления кулоновского притяжения электрона к заряженному шарiku. Из закона сохранения энергии электрона, выбитого с поверхности шарика, следует, что

$$\frac{mv^2}{2} = E_n,$$

где $E_{\text{п}} = \frac{qe}{4\pi\epsilon_0 R}$ – приращение потенциальной энергии электрона при его перемещении с поверхности шарика в бесконечно удаленную точку, e – модуль заряда электрона. Таким образом, в нашем случае уравнение Эйнштейна приобретает вид:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R},$$

где λ – максимальная длина волны падающего света, при которой выбитые из шарика фотоэлектроны не будут возвращаться на него. Из последнего равенства получаем ответ:

$$\lambda = \frac{hc}{hc/\lambda_0 + eq/4\pi\epsilon_0 R}.$$

8. На рис. 77 изображены силы, действующие на материальную точку при максимальном отклонении математического маятника от положения равновесия. Поскольку скорость материальной точки в этом положении равна нулю, то центростремительное ускорение также равно нулю. Поэтому сила натяжения нити T_1 равна по модулю проекции силы тяжести на направление нити:

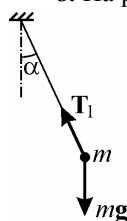


Рис. 77

$$T_1 = mg \cos \alpha.$$

При прохождении маятником положения равновесия, когда нить маятника занимает вертикальное положение, материальная точка обладает скоростью и, следовательно, центростремительным ускорением. Из второго закона Ньютона, записанного для движения по окружности, в проекции на ось, направленную вертикально вверх, следует уравнение:

$$m \frac{v^2}{L} = T_2 - mg,$$

где T_2 – натяжение нити в этом положении, v – скорость материальной точки, L – длина нити. При движении маятника от крайней точки к положению равновесия происходит превращение потенциальной энергии

в кинетическую. Поэтому по закону сохранения механической энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

где $h = L(1 - \cos \alpha)$ – разница высот материальной точки в крайнем положении и в нижней точке. Решая записанные выражения, находим:

$$T_2 = mg + 2mg(1 - \cos \alpha).$$

Учитывая, что $T_2 = kT_1$, получаем ответ: $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{k+2}\right)$.

9. В электрической цепи, представленной в условии задачи, при разомкнутом ключе K ток течет только через резистор R_1 (конденсатор представляет собой разрыв электрической цепи, и ток через резистор R_2 равен нулю). При замкнутом ключе внешняя цепь состоит из параллельно соединенных резисторов R_1 , R_2 и имеет сопротивление $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Полный ток во внешней цепи в обоих случаях:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Приравнявая мощности, выделяющиеся во внешней цепи при разомкнутом и замкнутом ключе K , имеем:

$$\frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(r + R_1)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{\left(r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^2} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Из решения этого уравнения получаем ответ: $R_2 = \frac{R_1 r^2}{R_1^2 - r^2} = 1,3 \text{ Ом}$.

10. Работа, совершенная газом за цикл численно равна площади трапеции 1234 на pV -диаграмме:

$$A = \frac{1}{2}(p_1 - p_4 + p_2 - p_3)(V_2 - V_1).$$

Согласно уравнению Клапейрона-Менделеева для одного моля идеального газа имеем:

$$p_1V_1 = RT_1.$$

Для изобарного процесса $3-4$ по закону Гей-Люссака:

$$V_2 = V_1 \frac{T_3}{T_4};$$

для изохорного процесса $4-1$ по закону Шарля:

$$p_3 = p_1 \frac{T_4}{T_3};$$

для состояний 1 и 2 по закону Бойля-Мариотта:

$$p_2V_2 = p_1V_1.$$

Решая записанную систему уравнений, получаем ответ:

$$A = \frac{RT_1}{2} \left(1 - \frac{2T_4}{T_1} + \frac{T_4}{T_3} \right) \left(\frac{T_3}{T_4} - 1 \right) \approx 625 \text{ Дж.}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

I. МЕХАНИКА

I.1. При упругом ударе о наклонную плоскость составляющая скорости шарика, параллельная плоскости, не изменяется, а составляющая, перпендикулярная плоскости, оставаясь той же по величине, меняет направление на противоположное. Следовательно, после удара шарик отскочит от наклонной плоскости со скоростью v_0 под углом $\beta = \pi - 2\alpha$ к горизонту. Кинематические уравнения движения шарика в системе координат, изображенной на рис. 78, имеют вид:

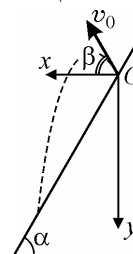


Рис. 78

$$x = v_0 \cos \beta \cdot t, \quad y = -v_0 \sin \beta \cdot t + \frac{gt^2}{2}.$$

В точке падения шарика на плоскость выполняются соотношения:

$$x = l, \quad y = l \operatorname{tg} \alpha.$$

Исключая из записанных выражений время, получаем ответ:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gl}{2 \cos^2(\pi - 2\alpha)[\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\pi - 2\alpha)]}} = \sqrt{\frac{gl \cos \alpha}{2 \sin \alpha |\cos 2\alpha|}}.$$

I.2. Траектория мяча, соответствующая максимальной скорости, удовлетворяющей условию задачи, изображена на рис. 79. При упругом ударе о стенку вертикальная составляющая скорости мяча не изменяется, а горизонтальная, оставаясь той же по величине, меняет направление

на противоположное. Зависимость высоты мяча над поверхностью земли имеет вид:

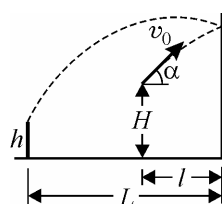


Рис. 79

$$y = H + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} .$$

Время полета мяча до ограждения

$$t_0 = \frac{L+l}{v_0 \cos \alpha} .$$

Мяч не перелетит через ограждение, если $y(t_0) \leq h$.

Исключая из записанных выражений время, получаем ответ:

$$v_0 = \frac{L+l}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2[(H-h) + (L+l) \operatorname{tg} \alpha]}} \approx 7,17 \text{ м/с} .$$

1.3. Лодка движется равномерно под действием двух сил: горизон-

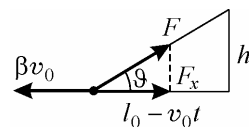


Рис. 80

тальной составляющей силы натяжения веревки и силы сопротивления воды. Модули этих сил на рис. 80 обозначены через F_x и βv_0 , где β – коэффициент сопротивления воды. По второму закону Ньютона имеем: $F_x = \beta v_0$. Из рисунка видно, что $F_x = F \cos \vartheta$, где ϑ – угол, который веревка образует с горизонталью, причем

$$\cos \vartheta = \frac{l_0 - v_0 t}{\sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 + h^2}} .$$

Объединяя записанные равенства, получаем:

$$F = \beta v_0 \frac{\sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 + h^2}}{l_0 - v_0 t} .$$

Положив в последнем равенстве $t = 0$, $F(0) = F_0$, имеем:

$$F_0 = \beta v_0 \frac{\sqrt{l_0^2 + h^2}}{l_0}, \text{ откуда } \beta v_0 = F_0 \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + h^2}}.$$

$$\text{Ответ: } F(t) = F_0 \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + h^2}} \frac{\sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 + h^2}}{l_0 - v_0 t}.$$

Замечание: Из этой формулы видно, что по мере приближения лодки к пристани сила F неограниченно возрастает. Приведенный ответ имеет смысл до тех пор, пока F не превысит силу тяжести, действующую на лодку.

I.4. Брусок движется по горизонтальной окружности под действием сил, изображенных на рис. 81, где mg – сила тяжести, N – нормальная составляющая силы реакции сферы, F – сила трения. В проекциях на оси OX и OY неподвижной координатной системы имеем:

$$\begin{aligned} m\omega^2 R \cos \alpha &= N \cos \alpha - F \sin \alpha, \\ F \cos \alpha + N \sin \alpha - mg &= 0. \end{aligned}$$

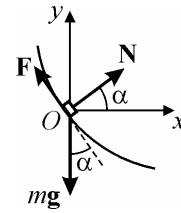


Рис. 81

Исключая отсюда N , находим

$$F = m \cos \alpha (g - \omega^2 R \sin \alpha).$$

Если угловая скорость вращения сферы такова, что $\omega^2 R \sin \alpha > g$, то сила трения направлена противоположно. В общем случае ответ имеет вид: $F = m \cos \alpha |g - \omega^2 R \sin \alpha|$.

I.5. На правую чашу весов, заполненную водой до краев, действует сила

$$F = Mg + N,$$

где $M = \rho Sh$ – масса воды в этой чаше, N – сила давления падающих капель дождя. Поскольку соударение капель с водой, находящейся в чаше, является неупругим, по второму закону Ньютона имеем:

$$\Delta m \cdot v = (N - \Delta m \cdot g) \Delta t ,$$

где $\Delta m = \frac{M}{\tau} \Delta t$ – масса дождевых капель, попадающих в чашу за малое время Δt . Отсюда

$$N \Delta t = \frac{Mv}{\tau} \Delta t + \frac{Mg}{\tau} \Delta t^2 .$$

Учитывая малость Δt , находим, что приближенно $N \approx \frac{Mv}{\tau}$. Весы будут уравновешены, если масса гири на левой чаше $m = \frac{F}{g} = \rho Sh + \frac{N}{g}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $m = \rho Sh \left(1 + \frac{v}{g\tau} \right) = 50,5$ г.

1.6. В момент, когда достигается максимальное сжатие пружины, скорость бруска обращается в нуль. По закону изменения механической энергии имеем:

$$mgH = mg(l - \Delta l) \sin \alpha + \frac{k\Delta l^2}{2} + A_{\text{тр}} ,$$

где $A_{\text{тр}}$ – модуль работы силы трения $F_{\text{тр}}$ на перемещении бруска S , причем $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$, $S = \left(\frac{H}{\sin \alpha} - (l - \Delta l) \right)$. Следовательно,

$$A_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha \left(\frac{H}{\sin \alpha} - (l - \Delta l) \right) .$$

Объединяя записанные выражения, получаем квадратное уравнение относительно Δl :

$$\Delta l^2 - \frac{2mg}{k}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)\Delta l - \frac{2mg}{k}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)\left(\frac{H}{\sin \alpha} - l\right) = 0.$$

Поскольку по условию задачи предоставленный самому себе брусок приходит в движение, $\sin \alpha > \mu \cos \alpha$. Кроме того, $\frac{H}{\sin \alpha} > l$. Поэтому свободный член в квадратном уравнении заведомо отрицателен, и, следовательно, корни этого уравнения существуют. Условию задачи удовлетворяет положительный корень. Ответ:

$$\Delta l = \frac{mg}{k}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2k}{mg \sin \alpha} \cdot \frac{(H - l \sin \alpha)}{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} \right\}$$

1.7. Шарики находятся в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рис. 82, где mg – модуль силы тяжести. В проекции на горизонтальное и вертикальное направления условия равновесия шариков имеют вид:

$$T_1 \sin \alpha = T_2 \sin \beta, \quad T_1 \cos \alpha = mg + T_2 \cos \beta,$$

$$T_2 \sin \beta = T_3, \quad T_2 \cos \beta = mg.$$

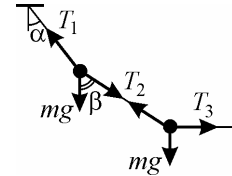


Рис. 82

Отсюда вытекают следующие равенства:

$$T_1 \cos \alpha = 2T_2 \cos \beta, \quad T_1^2 = T_2^2 (\sin^2 \beta + 4 \cos^2 \beta) = T_2^2 (4 - 3 \sin^2 \beta).$$

Из последнего равенства находим $T_2 \sin \beta = \sqrt{(4T_2^2 - T_1^2)}/3$. Ответ:

$$T_3 = \sqrt{(4T_2^2 - T_1^2)}/3.$$

1.9. стакан будет находиться под водой в безразличном равновесии при выполнении условия

$$mg = \rho V g ,$$

где V – объем воздуха в стакане. Отсюда $V = \frac{m}{\rho}$. По закону Бойля-Мариотта

$$p_0 V_0 = p V ,$$

где $p = p_0 + \rho g h$ – давление воды на глубине h . Объединяя записанные выражения, находим

$$h = \frac{p_0}{\rho g m} (\rho V_0 - m) .$$

При меньшей глубине погружения предоставленный самому себе стакан будет всплывать. Наоборот, при увеличении глубины погружения стакан начнет опускаться вниз, так как с ростом давления воды выталкивающая сила будет уменьшаться. Ответ: $h \geq \frac{p_0}{\rho g m} (\rho V_0 - m) = 10$ м.

***1.9.** Пусть p – давление, создаваемое насосом, v – скорость воды в шланге. Согласно уравнению Бернулли,

$$p = \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} .$$

Работа $\Delta A = p \Delta V$, совершаемая насосом по перемещению воды объемом $\Delta V = S v \Delta t$, равна

$$\Delta A = \rho \left(g h + \frac{v^2}{2} \right) S v \Delta t .$$

По условию $V = S v \tau$, откуда $v = \frac{V}{S \tau}$. Объединяя записанные выраже-

ния и учитывая, что $N = \frac{\Delta A}{\Delta t}$, получаем ответ: $N = \frac{\rho V}{\tau} \left(gh + \frac{V^2}{2S^2 \tau^2} \right)$.

1.10. По закону сложения ускорений ускорение свободного падения относительно системы отсчета, связанной с вагоном, $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g} - \mathbf{a}$. Из рис. 83 видно, что модуль этого ускорения равен $g_1 = \sqrt{a^2 + g^2}$, а само ускорение образует с вертикалью угол α , причем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}$. Следовательно, в

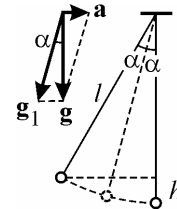


Рис. 83

момент начала движения вагона маятник оказывается отклоненным от устойчивого положения равновесия на угол α . В результате возникших колебаний максимальный угол отклонения маятника от вертикали составит 2α . Как видно из рисунка, $h = l(1 - \cos 2\alpha) = 2l \sin^2 \alpha$. Используя формулу

$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, получаем ответ: $h = \frac{2la^2}{g^2 + a^2}$.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. Поскольку сжатие пружины совпадает с высотой поршня над дном сосуда, давление газа пропорционально его объему: $p \sim V$. Пусть p_0 , V_0 и T_0 – начальные давление, объем и температура газа. Уравнения начального и конечного состояний газа имеют вид:

$$p_0 V_0 = \nu R T_0, \quad n p_0 n V_0 = \nu R m T_0.$$

Отсюда $n^2 = m$. Ответ: $n = \sqrt{m} \approx 1,41$.

II.2. Условие равновесия поршня в неподвижном сосуде:

$$p_1 S = p_0 S + Mg ,$$

откуда давление газа в неподвижном сосуде

$$p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S} .$$

По второму закону Ньютона для поршня в сосуде, движущемся с ускорением $g/2$,

$$Mg/2 = p_2 S - p_0 S - Mg .$$

Отсюда установившееся давление газа в движущемся сосуде

$$p_2 = p_0 + \frac{3Mg}{2S} .$$

Считая это давление одинаковым во всех точках сосуда, по закону Бойля-Мариотта имеем:

$$\left(p_0 + \frac{Mg}{S} \right) V_1 = \left(p_0 + \frac{3Mg}{2S} \right) V_2 .$$

Учитывая, что $\frac{V_1}{V_2} = \alpha$, получаем ответ: $M = \frac{(\alpha - 1)p_0 S}{(1,5 - \alpha)g} = 30$ кг.

II.3. Пусть при температуре T давление воздуха в пространстве под поршнем равно p , а смещение поверхности воды вниз от первоначального уровня в правом сосуде составляет y . При этом в левом сосуде уровень воды повышается на такую же величину, а пружина сжимается на величину x . Из условия равновесия поршня следует равенство

$$(p - p_0)S = kx .$$

Условие равновесия жидкости дает соотношение

$$p = p_0 + 2\rho gy .$$

Уравнения начального и конечного состояний воздуха имеют вид:

$$p_0Sl = \nu RT_0, \quad pS(l + x + y) = \nu RT .$$

Решая полученную систему уравнений, находим ответ:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{x}{l} + \frac{kx}{2\rho g l S} \right) \cdot \left(1 + \frac{kx}{p_0 S} \right).$$

II.4. Записывая для вытекающего воздуха уравнение Бернулли и учитывая, что давление воздуха за рассматриваемый промежуток времени меняется незначительно, имеем:

$$p_0 = \frac{\rho v^2}{2},$$

откуда скорость истечения воздуха $v = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$. Здесь $\rho = \frac{p_0 M}{RT}$ – плотность воздуха, которая также практически постоянна. Следовательно, массовый расход воздуха равен:

$$\mu = Sv\rho = S\sqrt{2p_0\rho} = Sp_0\sqrt{\frac{2M}{RT}} .$$

Из уравнения Клапейрона-Менделеева находим изменение давления воздуха за время τ : $\Delta p = \frac{\mu\tau}{MV}RT$. Объединяя записанные выражения,

получаем ответ: $\tau = \frac{\Delta p}{p_0} \cdot \frac{V}{S} \cdot \sqrt{\frac{M}{2RT}} \approx 241$ с.

II.5. Поскольку система теплоизолирована и газы работу не совершают, внутренняя энергия в системе остается постоянной. Обозначив

через T температуру газов после установления теплового равновесия, имеем:

$$\frac{3}{2} \frac{m_1}{M_1} RT_1 + \frac{3}{2} \frac{m_2}{M_2} RT_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT,$$

откуда

$$T = \frac{m_1 M_2 T_1 + m_2 M_1 T_2}{m_1 M_2 + m_2 M_1}.$$

Парциальные давления газов в конечном состоянии:

$$p_1 = \frac{m_1 RT}{2VM_1}, \quad p_2 = \frac{m_2 RT}{2VM_2}.$$

По закону Дальтона $p = p_1 + p_2$.

Ответ: $p = \frac{R}{2V} \cdot \frac{m_1 M_2 T_1 + m_2 M_1 T_2}{M_1 M_2} \approx 1,97 \cdot 10^5$ Па.

II.6. Пусть m_0 и m – массы водяного пара в начальном и конечном состояниях. Давление насыщенного водяного пара при температуре 100°C равно атмосферному: $p_0 = 10^5$ Па. Поскольку при сжатии объем пара уменьшается в 5 раз, а $p = p_0/2$, пар достигнет насыщения и часть его превратится в воду. Из уравнений начального и конечного состояний пара:

$$pV_0 = \frac{m_0}{M} RT, \quad p_0 V = \frac{m}{M} RT$$

получаем ответ: $\Delta m = m_0 - m = \frac{M}{RT} (pV_0 - p_0 V) \approx 0,87$ г.

II.7. Изменение силы натяжения нити равно изменению архимедовой силы, действующей на поплавок: $\Delta F = V(\rho_2 - \rho_1)g$. Плотность жидкости меняется с температурой по закону

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{1 + \alpha(t - t_0)}.$$

Следовательно,

$$\Delta F = \frac{V\rho_0 g \alpha (t_1 - t_2)}{[1 + \alpha(t_2 - t_0)][1 + \alpha(t_1 - t_0)]}.$$

Учитывая, что в рассматриваемом температурном диапазоне $\alpha(t - t_0) \ll 1$, получаем ответ: $\Delta F \approx V\rho_0 g \alpha (t_1 - t_2) = -7,5 \cdot 10^{-2}$ Н. Сила натяжения нити уменьшится.

III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

III.1. На участок лепестка площадью ΔS действует сила тяжести $\Delta m \cdot g = \rho g \delta \Delta S$, направленная вертикально вниз, и сила кулоновского отталкивания от плоскости $\Delta F_K = 2\sigma \Delta S \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, направленная горизонтально (см. рис.

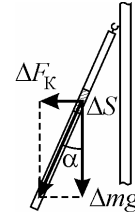


Рис. 84

84). Направление равнодействующей этих сил для всех точек лепестка одно и то же, поэтому лепесток будет находиться в равновесии, если равнодействующая проходит через точку подвеса. Поэтому $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta F_K}{\Delta mg} = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0 \rho \delta g}$. Ответ:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon_0 \rho \delta g} \right).$$

III.2. Пусть E_0 – напряженность электрического поля в той части конденсатора, где нет диэлектрика. Напряжение между обкладками

$$U = E_0(d - h) + Eh,$$

где $E = E_0 / \varepsilon$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$E = \frac{U}{h + \varepsilon(d - h)}.$$

III.3. Модули напряженностей электрических полей, создаваемых пластинами,

$$E_1 = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S}, \quad E_2 = \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S}.$$

Эти поля однородны и в пространстве между пластинами направлены противоположно друг другу. По принципу суперпозиции модуль результирующего поля между пластинами

$$E = \frac{|q_1 - q_2|}{2\varepsilon_0 S}.$$

Разность потенциалов между пластинами $U = Ed$. Ответ:

$$U = \frac{|q_1 - q_2| d}{2\varepsilon_0 S} = \frac{2qd}{\varepsilon_0 S}.$$

III.4. За время τ на экране электронно-лучевой трубки соберется заряд $q = I\tau$ с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{q}{S}$, где S – площадь эк-

рана. При заданном отношении сторон экрана $S = \frac{3}{5}d \cdot \frac{4}{5}d = \frac{12}{25}d^2$. Напряженность электрического поля вблизи экрана

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{25I\tau}{24\epsilon_0 d^2}.$$

Напряженность поля на поверхности уединенного металлического шара, заряженного до потенциала φ , $E_1 = \frac{\varphi}{R}$. Приравнивая эти величины,

получаем ответ: $\tau = \frac{24d^2\epsilon_0\varphi}{25IR} \approx 133$ мкс.

III.5. При неограниченном сближении пластин плоского конденсатора, заряд на котором постоянен, энергия конденсатора стремится к нулю. Поэтому вся начальная энергия конденсатора переходит в кинетическую энергию движущейся пластины. Из закона сохранения энергии следует:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh + \frac{CU^2}{2},$$

где $C = \frac{\epsilon_0 S}{h}$ – емкость конденсатора в начальном состоянии. Ответ:

$$v = \sqrt{2gh + \frac{\epsilon_0 S U^2}{mh}} \approx 0,2 \text{ м/с.}$$

III.6. В начальном состоянии заряд на каждом конденсаторе $q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}$, энергия системы $W_0 = \frac{q^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2} = \frac{C_1 C_2 \mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)}$. При подключении резистора к конденсатору C_2 этот конденсатор полностью разрядится, а конденсатор C_1 зарядится до напряжения \mathcal{E} . Конечная

энергия системы $W = \frac{C_1 \mathcal{E}^2}{2}$. При перезарядке конденсаторов источник переместит по цепи заряд $q = \left(C_1 - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) \mathcal{E}$, совершив работу $A = q \mathcal{E} = \frac{C_1^2 \mathcal{E}^2}{C_1 + C_2}$. По закону сохранения энергии $A + W_0 = W + Q$.
 Ответ: $Q = \frac{C_1^2 \mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)}$.

III.7. При неизменном внешнем напряжении справедливо отношение $\frac{N_1}{N_2} = \frac{R_2}{R_1}$, где R_1 и R_2 – сопротивления нагревателя в первом и во втором случаях. Пусть R_0 – сопротивление нагревателя при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Тогда

$$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1), \quad R_2 = R_0(1 + \alpha t_2).$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$t_2 = t_1 \frac{N_1}{N_2} - \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{N_1}{N_2} \right) \approx 384,6^\circ\text{C}.$$

III.8. Напряжение между точкой 1 и нижним узлом схемы равно

$$V_1 = \frac{R_0(1 + \alpha_2 t)}{R_0(1 + \alpha_1 t) + R_0(1 + \alpha_2 t)} U = \frac{1 + \alpha_2 t}{2 + (\alpha_1 + \alpha_2) t} U.$$

Аналогично, напряжение между точкой 2 и нижним узлом схемы

$$V_2 = \frac{1 + \alpha_1 t}{2 + (\alpha_1 + \alpha_2) t} U.$$

Следовательно, $V = V_2 - V_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)t}{2 + (\alpha_1 + \alpha_2)t} U$. Учитывая, что $\alpha_1 t \ll 1$,

$\alpha_2 t \ll 1$, получаем ответ:

$$V \approx \frac{1}{2} U (\alpha_1 - \alpha_2) t.$$

III.9. Обозначим энергию, требующуюся для того, чтобы вскипятить воду в нагревателе, через E . При поочередном подключении спиралей к сети имеем:

$$E = \frac{U^2}{R_1} t_1 = \frac{U^2}{R_2} t_2,$$

где U – напряжение сети, R_1 и R_2 – сопротивления спиралей. Отсюда

$R_1 = \frac{U^2}{E} t_1$, $R_2 = \frac{U^2}{E} t_2$. При параллельном подключении к сети двух спиралей

$$E = \left(\frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2} \right) t_{\text{пар}},$$

при их последовательном подключении к сети

$$E = \frac{U^2}{R_1 + R_2} t_{\text{посл}}.$$

Подставляя в эти формулы сопротивления спиралей, получаем ответ:

$$t_{\text{пар}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 6 \text{ мин}, \quad t_{\text{посл}} = t_1 + t_2 = 25 \text{ мин}.$$

III.10. При движении проводников в магнитном поле в них возникают ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_1 = Bv_1l, \quad \mathcal{E}_2 = Bv_2l$$

с одинаковой полярностью. Данная цепь эквивалентна двум параллельно соединенным источникам с ЭДС \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 и внутренними сопротивлениями R_1 , R_2 , подключенным к нагрузке сопротивлением R . Обозначив токи, текущие через левый и правый проводники, через I_1 и I_2 , имеем:

$$I_1R_1 + (I_1 + I_2)R = \mathcal{E}_1, \quad I_2R_2 + (I_1 + I_2)R = \mathcal{E}_2.$$

Домножая первое из этих уравнений на R_2 , а второе на R_1 и складывая, получаем:

$$(I_1 + I_1)R_1R_2 + (I_1 + I_1)(R_1 + R_2)R = \mathcal{E}_1R_2 + \mathcal{E}_2R_1.$$

Учитывая, что искомый ток $I = I_1 + I_2$, находим ответ:

$$I = \frac{Bl(v_1R_2 + v_2R_1)}{R_1R_2 + R(R_1 + R_2)}.$$

III.11. Величина заряда, протекшего по контуру, $\Delta q = \frac{\Delta\Phi}{R}$, где $\Delta\Phi$ – модуль изменения магнитного потока через контур. В начальном положении контура поток $\Phi_1 = Bab$. В конечном положении потоки через каждую половину контура одинаковы по величине и противоположны по знаку, поэтому полный поток через контур $\Phi_2 = 0$. Ответ:

$$\Delta q = \frac{Bab}{R} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

***III.12.** После замыкания ключа в контуре возникнут гармонические колебания со смещенным положением равновесия. Пусть $\mathcal{E} > U_0$. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени изображена на

рис. 85. Начальная энергия конденсатора $W_0 = \frac{CU_0^2}{2}$, работа источника по зарядке конденсатора до максимального напряжения $A = C(U_{\max} - U_0)\mathcal{E}$, энергия контура в момент достижения максимального напряжения $W_{\max} = \frac{CU_{\max}^2}{2}$ (ток через катушку в этот момент равен нулю). По закону сохранения энергии $W_0 + A = W_{\max}$.

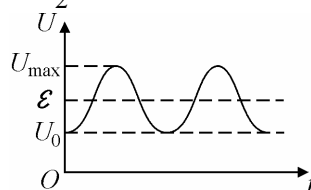


Рис. 85

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно U_{\max} :

$$U_{\max}^2 - 2\mathcal{E}U_{\max} + 2\mathcal{E}U_0 - U_0^2 = 0.$$

Корни этого уравнения: $U_{\max} = 2\mathcal{E} - U_0$, $U_{\max} = U_0$. Ответ:

$$U_{\max} = 2\mathcal{E} - U_0 \text{ при } U_0 < \mathcal{E}, \quad U_{\max} = U_0 \text{ при } U_0 \geq \mathcal{E}.$$

IV. ОПТИКА

IV.1. Ход луча при исходном и смещенном положениях зеркала 1 изображен на рис. 86 сплошной и штриховой линиями соответственно. Видно, что при перемещении зеркала параллельно самому себе на расстояние d_1 отраженный от него луч смещается на расстояние $a = 2d_1 \sin \alpha$, где α – угол падения. По условию треугольник ABC прямоугольный. Следовательно, $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$ и угол падения β на зеркало 2 равен $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$. Из рисунка видно, что отраженный от зер-

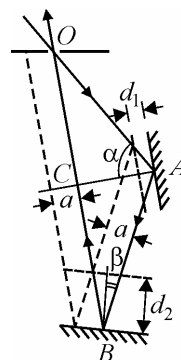


Рис. 86

кала 2 луч попадет в отверстие O , если его сместить вправо на расстояние a . Имеем: $d_1 \sin \alpha = d_2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$. Ответ: $d_2 = d_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}$.

IV.2. Максимальное смещенное от нижнего края экрана световое пятно даст луч, испытавший при отражении от призмы наименьшее отклонение от первоначального распространения. Ход такого луча изображен на рис. 87. Этот луч падает на грань AC рядом с ребром призмы. При повороте призмы из данного положения на малый угол грань AC уйдет из-под луча и на ее месте окажется грань BA , на которую луч будет падать нормально и отразится назад, т.е. не попадет на экран. Луч, отраженный от призмы, вновь начнет попадать на экран, когда грань BA повернется на угол 45° . Таким образом, как видно из рисунка, максимальное отклонение преломленного линзой луча достигается в момент, когда падающий луч составляет с главной оптической осью линзы угол 30° . Это соответствует смещению светового пятна от нижнего края экрана на расстояние $d = f \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{f}{\sqrt{3}}$.

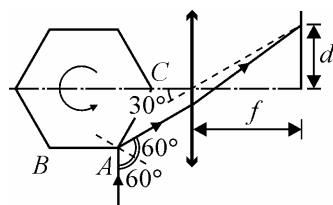


Рис. 87

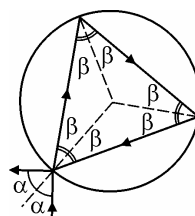


Рис. 88

IV.3. Ход луча изображен на рис. 88. По закону преломления $\sin \alpha = n \sin \beta$, где α – угол падения луча на поверхность шара, β –

угол преломления. Как видно из рисунка, $6\beta = \pi$. По условию $2\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $n = \sqrt{2}$.

IV.4. Построение изображения приведено на рис. 89. При построении учтено, что лучи, идущие от предмета, после преломления в линзе и отражения от зеркала, вторично преломляются в линзе. В частности луч l , идущий к линзе параллельно главной оптической оси, после выхода из линзы пересекает оптическую ось в середине отрезка OF . Отсюда следует, что фокусное расстояние оптической системы, состоящей из тонкой линзы и прижатого к ней плоского зеркала, равно $F/2$. Применяя для системы формулу тонкой линзы

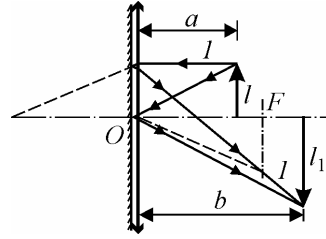


Рис. 89

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{F},$$

находим, что $b = \frac{aF}{2a - F}$. Из рисунка видно, что увеличение, даваемое

системой, $m = \frac{l_1}{l} = \frac{b}{a}$. Ответ: $m = \frac{F}{2a - F} = 2$.

IV.5. Обозначим через Δ геометрическую разность хода двух лучей, идущих на расстоянии r от главной оптической оси линзы: луча l' , отраженного от верхней поверхности стеклянной пластинки, и луча l'' , отраженного от нижней поверхности линзы (см. рис. 90). По теореме Пифагора имеем: $R^2 = r^2 + (R - \Delta/2)^2$. Отсюда $R\Delta = r^2 + \Delta^2/4$. Учитывая, что $\Delta^2/4 \ll r^2$,

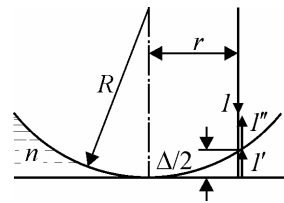


Рис. 90

приближенно получаем: $\Delta \approx \frac{r^2}{R}$. Поскольку волны l и l' распространяются в бензоле, заполняющем зазор между линзой и пластинкой, оптическая разность хода между волнами l' и l'' равна

$$\Delta_{\text{опт}} = n\Delta = \frac{nr^2}{R}.$$

Дополнительный фазовый набег, равный π , волна l' приобретает при отражении волны l от оптически более плотной среды. Таким образом, условие первого интерференционного минимума имеет вид:

$$\Delta_{\text{опт}} + \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2}\lambda.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $r = \sqrt{\frac{\lambda R}{n}} \approx 2$ мм.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

I. МЕХАНИКА

I.1. Пусть расстояние между столбами равно S , скорость велосипедиста в момент проезда первого столба равна v_0 , а его ускорение равно a . Кинематические уравнения движения велосипедиста на заданных в условии отрезках пути имеют вид:

$$S = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}, \quad S = (v_0 + a t_1) t_2 + \frac{a t_2^2}{2}, \quad S = (v_0 + a t_1 + a t_2) t_3 + \frac{a t_3^2}{2}.$$

Вводя обозначения $t_0 = \frac{2v_0}{a}$, $\tau = \sqrt{\frac{2S}{a}}$, последнее из этих уравнений приведем к виду:

$$t_3^2 + 2(t_1 + t_2 + (t_0/2))t_3 - \tau^2 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень этого уравнения:

$$t_3 = -(t_1 + t_2 + (t_0/2)) + \sqrt{(t_1 + t_2 + (t_0/2))^2 + \tau^2}.$$

Чтобы получить ответ, осталось найти t_0 и τ . Для этого воспользуемся первым и вторым кинематическими уравнениями движения велосипедиста, которые в наших обозначениях принимают вид:

$$\tau^2 = t_0 t_1 + t_1^2, \quad \tau^2 = (t_0 + 2t_1)t_2 + t_2^2.$$

Решая эту систему, находим

$$t_0 = \frac{t_2^2 - t_1^2 + 2t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 1 \text{ с}, \quad \tau^2 = \frac{(t_1 + t_2)t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 6 \text{ с}^2.$$

Следовательно, $t_3 = -3,5 + \sqrt{3,5^2 + 6} \approx 0,77 \text{ с}$.

1.2. Пусть v_0 – скорость автопоезда при равномерном движении, F – сила тяги двигателя тягача, постоянная до момента выключения двигателя, μ – коэффициент сопротивления, имеющий размерность ускорения. Согласно второму закону Ньютона, при равномерном движении автопоезда выполняется равенство:

$$F = \mu M .$$

После того, как от автопоезда отцепится прицеп, уравнения движения тягача и прицепа примут вид:

$$(M - m)a_1 = F - \mu(M - m) , \quad ma_2 = -\mu m .$$

Следовательно, до момента выключения двигателя прицеп будет двигаться равноускоренно с ускорением $a_1 = \mu \frac{m}{M - m}$, а прицеп – равнозамедленно с ускорением, модуль которого $|a_2| = \mu$. Из кинематических уравнений движения прицепа следует, что расстояние, пройденное им до полной остановки, равно

$$s_2 = \frac{v_0^2}{2|a_2|} = \frac{v_0^2}{2\mu} .$$

К моменту выключения двигателя тягач наберет скорость $v = \sqrt{v_0^2 + 2a_1 s}$. После выключения двигателя он будет двигаться равнозамедленно с ускорением, модуль которого $|a_2|$. Поэтому при движении накатом тягач пройдет путь

$$s_1 = \frac{v^2}{2|a_2|} = \frac{v_0^2}{2\mu} + \frac{m}{M - m} s .$$

Учитывая, что искомое расстояние $L = s + s_1 - s_2$, получаем ответ:

$$L = \frac{Ms}{M - m} = 500 \text{ м} .$$

1.3. Вычислим силу натяжения стержня в том его сечении, которое находится на границе между гладкой и шероховатой частями наклонной

поверхности клина. Пусть полная масса стержня равна m . Рассмотрим момент, когда на гладкой части клина окажется нижняя часть стержня массой βm , а на шероховатой части клина – верхняя часть стержня массой $(1-\beta)m$, причем значения коэффициента β лежат в диапазоне $0 \leq \beta \leq 1$. Уравнения движения нижней и верхней частей стержня имеют вид:

$$\beta m a = \beta m g \sin \alpha - T,$$

$$(1-\beta)m a = (1-\beta)m g \sin \alpha + T - \mu(1-\beta)m g \cos \alpha,$$

где a – ускорение стержня, g – ускорение свободного падения, T – сила взаимодействия нижней и верхней частей стержня (сила натяжения стержня) в рассматриваемый момент. Решая эту систему, находим

$$T = \beta(1-\beta)\mu m g \cos \alpha.$$

Видно, что сила натяжения стержня в сечении, которое находится на границе между гладкой и шероховатой частями клина, зависит от значения коэффициента β . Очевидно, она будет максимальной при $\beta = 0,5$, т.е. когда одна половина стержня окажется на гладкой нижней части клина, а другая половина – на его шероховатой верхней части. Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно установить, что сила натяжения стержня будет линейно убывать с расстоянием от сечения стержня, совпадающего с границей между гладкой и шероховатой частями клина. Предлагаем самостоятельно убедиться в этом. Следовательно, $T_{\max} = \frac{1}{4}\mu m g \cos \alpha$.

***I.4.** Когда кубик и груз освободят, они придут в движение под действием сил, модули и направления которых указаны на рис. 91. Здесь mg и μN – модули силы тяжести и силы трения скольжения, действующих на груз, N – модуль нормальной составляющей силы взаимодействия кубика и груза, F – модуль силы натяжения нити, равный модулю заданной в условии силы, прило-

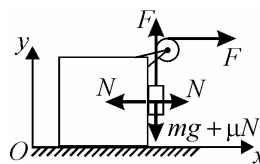


Рис. 91

женной к свободному концу нити. Полагая, что система отсчета, связанная со столом, является инерциальной, запишем уравнения движения кубика и груза в проекциях на координатные оси Ox и Oy :

$$Ma_x = F - N, \quad ma_x = N, \quad ma_y = F - mg - \mu N,$$

где a_x – модуль ускорения кубика, равный модулю горизонтальной составляющей ускорения груза, a_y – модуль вертикальной составляющей ускорения груза. Из этих уравнений находим

$$a_x = \frac{F}{M + m}, \quad a_y = F \frac{M + (1 - \mu)m}{(M + m)m} - g.$$

Пусть за время τ перемещение кубика составило Δx , а груз поднялся на высоту Δy . Поскольку движение этих тел начинается из состояния

покоя, то $\Delta x = \frac{a_x \tau^2}{2}$, $\Delta y = \frac{a_y \tau^2}{2}$. Следовательно, $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{a_x}{a_y}$. Перемеще-

ние свободного конца нити относительно неподвижной системы отсчета при этом равно $\Delta x + \Delta y$. Работа, которую совершает сила F ,

$$A = F(\Delta x + \Delta y) = F \Delta x \left(1 + \frac{a_y}{a_x} \right).$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$\Delta x = \frac{A}{(2 - \mu + (M/m))F - (m + M)g}.$$

Анализ этого выражения показывает, что оно теряет смысл при $F \leq F_0 = \frac{(m + M)mg}{M + m(2 - \mu)}$. Таким образом, найденное решение существует, если $F > F_0$.

1.5. Рассмотрим движение груза после того, как нить, на которой он подвешен, зацепится за нижний гвоздь. В верхней точке окружности, по которой движется груз, на него действуют сила тяжести и сила натяже-

ния нити (см. рис. 92). Обозначив через mg и T модули этих сил, по второму закону Ньютона имеем:

$$\frac{mv^2}{R} = mg + T,$$

где v – скорость груза в верхней точке, R – радиус окружности. Отсюда следует, что груз совершает на нити полный оборот по окружности, если $v^2 \geq gR$. Обозначив через v_0 скорость груза в нижней точке, по закону сохранения механической энергии имеем:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + 2mgR.$$

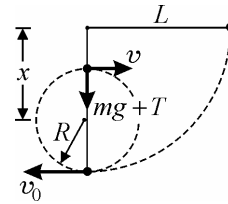


Рис. 92

Отсюда $v_0^2 = v^2 + 4gR$. С учетом найденного выше условия для скорости груза в верхней точке находим, что $R \leq \frac{v_0^2}{5g}$. Таким образом, максимальное значение радиуса, при котором груз совершит полный оборот по окружности, равно

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{5g}.$$

Применяя для движения груза от исходного положения до нижней точки закон сохранения механической энергии, получаем, что $v_0^2 = 2gL$. Следовательно, $R_{\max} = \frac{2}{5}L$, и максимальная высота, на которую поднимется груз

$$h_{\max} = 2R_{\max} = \frac{4}{5}L.$$

Чтобы эта высота была достигнута, нужно вбить нижний гвоздь на расстоянии $x = x_0 = L - R_{\max} = \frac{3}{5}L$ от верхнего. Если вбить гвоздь ниже найденной точки (при этом $x > x_0$), то радиус окружности, по которой

движется груз, будет меньше R_{\max} , и груз достигнет в верхней точке окружности высоты, меньшей чем h_{\max} . Если же вбить гвоздь выше найденной точки (при этом $x < x_0$), то натяжение нити обратится в нуль, т.е. нить провиснет, когда груз еще не достигнет верхней точки. В этом случае траектория груза кроме дуги окружности будет включать в себя отрезок параболы. Таким образом, ответ имеет вид: $x = 0,6L$.

1.6. Выделим малый элемент кольца массой $\Delta m = m \frac{\Delta\phi}{2\pi}$, где

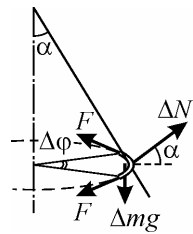


Рис. 93

$\Delta\phi \ll 1$. Этот элемент находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рис. 93, где Δmg – модуль силы тяжести, ΔN – модуль силы реакции поверхности конуса, F – модуль силы натяжения кольца. Векторная сумма сил натяжения, действующих на выделенный элемент со стороны соседних участков кольца, направлена к центру кольца и по модулю равна $\Delta F = 2F \sin \frac{\Delta\phi}{2} \approx F\Delta\phi$.

Условия равновесия элемента кольца имеют вид:

$$\Delta mg = \Delta N \sin \alpha, \quad F\Delta\phi = \Delta N \cos \alpha.$$

Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta mg}{F\Delta\phi} = \frac{mg}{2\pi F}$. Полагая, что F – максимально допустимое

натяжение кольца, получаем ответ: $\alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \frac{mg}{2\pi F}$.

1.7. Цилиндр и доски находятся в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рис. 94, где Mg и mg – модули сил тяжести, действующих на цилиндр и на каждую из досок, N – модуль нормальной составляющей силы взаимодействия каждой из досок и цилиндра, $F_{\text{тр}}$ – модуль силы трения покоя между цилиндром и каждой из досок. Силы реакции оси, на которой подвешены дос-

ки, на рисунке не показаны. Для облегчения анализа рисунка в левой его части изображены силы, действующие только на цилиндр, а в правой – только на правую доску. Уравнение моментов сил, действующих на одну из досок, записанное относительно точки O , имеет вид:

$$mg \frac{L}{2} \sin \alpha = N \frac{L}{2}.$$

Цилиндр находится в равновесии при выполнении условия:

$$Mg + 2N \sin \alpha = 2F_{\text{тр}} \cos \alpha.$$

Из записанных уравнений находим, что

$$N = mg \sin \alpha, \quad F_{\text{тр}} = \frac{Mg + 2mg \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

Сила трения покоя удовлетворяет неравенству: $F_{\text{тр}} \leq \mu N$. Следовательно, система будет находиться в равновесии при условии, что $\mu \geq \frac{F_{\text{тр}}}{N}$.

Учитывая, что $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}}$, $\cos \alpha = \frac{L/2}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}}$, получаем

$$\text{ответ: } \mu \geq \frac{(L^2 + 4R^2)M}{4mRL} + \frac{2R}{L}.$$

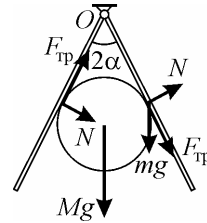


Рис. 94

1.8. Согласно формуле Гюйгенса, период колебаний математического маятника длиной l равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где g – ускорение свободного падения в той области вблизи поверхности планеты, где расположен маятник. В частности, на полюсе ускорение свободного падения g_n целиком определяется силой гравитационного притяжения тела к планете. По закону всемирного тяготения

$$g_{\text{п}} = G \frac{M}{R^2},$$

где $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ – гравитационная постоянная, M – масса планеты, R – ее радиус. Тело, находящееся на экваторе, движется относительно инерциальной системы, связанной с центром планеты, по окружности радиусом R . По второму закону Ньютона для тела массой m , покоящегося на экваторе, имеем:

$$m\omega^2 R = mg_{\text{п}} - N,$$

где ω – угловая скорость вращения планеты, N – модуль силы реакции опоры. Отсюда находим, что сила, с которой тело, находящееся на экваторе, давит на опору, $N = m(g_{\text{п}} - \omega^2 R)$. Следовательно, предоставленное самому себе тело будет совершать на экваторе свободное падение с ускорением $g_3 = g_{\text{п}} - \omega^2 R$. По условию период колебаний маятника на экваторе T_3 связан с периодом колебаний на полюсе $T_{\text{п}}$ соотношением:

$T_3 = nT_{\text{п}}$. Поэтому $g_{\text{п}} = n^2 g_3$, откуда

$$\omega = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{g_{\text{п}}}{R} (n^2 - 1)}.$$

Учитывая, что масса планеты $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, а искомый период вращения

планеты вокруг ее оси $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, после несложных преобразований нахо-

дим ответ: $\tau = n \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho(n^2 - 1)}} \approx 2,5$ часа.

1.9. Поскольку грузы смещают от положений равновесия на одинаковые расстояния, центр масс системы, совпадающий с центром треугольника (точкой O) остается неподвижным. Пусть смещение каждого груза равно x . Из рис. 95 видно, что удлинение любой из трех пружин составит при этом величину $\Delta x = 2x_1$, где $x_1 = x \cos 30^\circ$. По закону Гука сила упругости, возникающая при растяжении пружины, равна по мо-

дулю $F = k\Delta x$. На каждый груз действуют две такие силы, направленные под углом 60° друг к другу. Их векторная сумма направлена к центру треугольника и по модулю равна $2F \cos 30^\circ$. Объединяя записанные выражения, находим, что возвращающие силы, возникающие при смещении грузов на расстояние x , равны по модулю $3kx$. Поэтому уравнение движения каждого из грузов имеет вид:

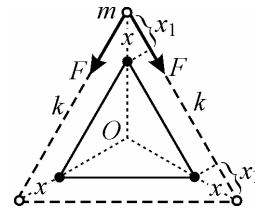


Рис. 95

$$m\ddot{x} = -3kx.$$

Следовательно, $\omega^2 = \frac{3k}{m}$. Учитывая, что период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$, по-

лучаем ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$.

I.10. Поскольку грузы смещают от положений равновесия на одинаковые расстояния, центр масс системы, совпадающий с центром n -угольника (точкой O) остается неподвижным. Пусть смещение каждого груза равно x . Из рис. 96 видно, что удлинение любой из n пружин составит при этом величину $\Delta x = 2x_1$, где $x_1 = x \sin \frac{\alpha}{2}$, а $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. По закону Гука сила упругости, возникающая при растяжении пружины, равна по модулю $F = k\Delta x$. На каждый груз действуют две такие силы, направленные под углом 2β друг к другу,

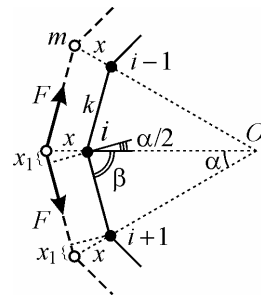


Рис. 96

где $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Их векторная сумма направлена к центру n -угольника и по модулю равна $2F \cos \beta = 2F \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2F \sin \frac{\alpha}{2}$. Объединяя записанные выражения, находим, что возвращающие силы, возникающие

при смещении грузов на расстояние x , равны по модулю $\left(4k \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)x$.

Поэтому уравнение движения каждого из грузов имеет вид:

$$m\ddot{x} = -\left(4k \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)x.$$

Следовательно, $\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Учитывая, что период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ получаем ответ: } T = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. В ходе изобарического нагревания при давлении p газ совершил работу $A = p(V_1 - V)$, где V_1 – объем газа в конце нагревания. В соответствии с первым началом термодинамики, $Q_1 = A + \Delta U_2 = A + Q_2$, где $\Delta U = Q_2$ – изменение внутренней энергии газа при изохорическом нагревании. Следовательно, $Q_1 - Q_2 = A = p(V_1 - V)$, откуда

$V_1 = V + \frac{Q_1 - Q_2}{p}$. Применим к процессу изобарического нагревания газа

закон Гей-Люссака: $\frac{V}{T} = \frac{V_1}{T_1}$, где T и T_1 – абсолютные температуры

газа в начале и в конце нагревания. Отсюда, с учетом выражения для объема V_1 , получаем ответ:

$$T_1 = \left(1 + \frac{Q_1 - Q_2}{pV}\right)T = 400 \text{ К, то есть } t_1 \approx T_1 - 273 = 127 \text{ }^\circ\text{C}.$$

II.2. В соответствии с определением, КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q}$, где A – работа, совершенная гелием за один цикл, а Q – количество теплоты, полученное гелием за цикл. Указанную работу можно найти, вычислив площадь фигуры, ограниченной графиком цикла на приведенной в условии задачи pV -диаграмме:

$$A = 3p_0V_0.$$

Гелий получает от нагревателя теплоту на участках 1 , 4 и 6 . Молярные теплоемкости гелия при изобарическом и изохорическом нагревании равны $C_p = \frac{5}{2}R$ и $C_V = \frac{3}{2}R$ соответственно, где R – универсальная газовая постоянная. Поэтому для количеств теплоты, получаемых газом на указанных участках, можно записать:

$$Q_1 = 5\nu R \Delta T_1 / 2, \quad Q_4 = 3\nu R \Delta T_4 / 2 \quad \text{и} \quad Q_6 = 3\nu R \Delta T_6 / 2.$$

С помощью уравнения Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT$, примененного к процессам 1 , 4 и 6 , выражения для количеств теплоты можно представить в виде:

$$Q_1 = (5/2) \cdot 3p_0 \cdot 2V_0 = 15p_0V_0;$$

$$Q_4 = (3/2) \cdot p_0 \cdot 2V_0 = 3p_0V_0;$$

$$Q_6 = (3/2) \cdot p_0 \cdot V_0 = 3p_0V_0 / 2.$$

Следовательно, $Q = Q_1 + Q_4 + Q_6 = \frac{39}{2} p_0V_0$. С учетом этого получаем

ответ: $\eta = \frac{2}{13} \approx 0,154$, то есть $\eta \approx 15,4\%$.

II.3. На участке $1-2$ газ получил от нагревателя количество теплоты, равное приращению его внутренней энергии, $\Delta Q_{12} = \Delta U_{12} = 4$ кДж. Следовательно, процесс $1-2$ – изохорный. На участке $2-3$ газ не обменивался теплотой с окружающими телами, то есть данный процесс – адиабатный. На участке $3-1$ внутренняя энергия газа оставалась неиз-

менной, то есть это изотермический процесс. На участке 3–1 газ отдал количество теплоты, модуль которого равен $\Delta Q_{31} = 3$ кДж. По определению, КПД цикла $\eta = 1 - \frac{\Delta Q_{31}}{\Delta Q_{12}} = \frac{1}{4}$, то есть $\eta = 25\%$.

II.4. Давление насыщенных паров жидкости в цилиндре равно $p_n = p_0 + (Mg/S)$. В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона, плотность насыщенных паров при температуре T равна $\rho_n = \frac{p_n \mu}{RT}$, где R – универсальная газовая постоянная. Так как нагревание осуществлялось медленно, то температура жидкости оставалась неизменной, давление насыщенных паров также не изменялось, а вся сообщаемая системе теплота расходовалась на испарение жидкости при данной температуре. Поэтому масса испарившейся жидкости $\Delta m = \frac{Q}{r}$. С другой стороны, эта масса может быть выражена через искомую высоту поднятия поршня: $\Delta m = \rho_n S \Delta h$. Объединяя все записанные выражения, получаем:

$$\Delta h = \frac{Q}{r \rho_n S} = \frac{QRT}{r \mu S p_n} = \frac{QRT}{(Mg + p_0 S) r \mu}.$$

II.5. Будем считать, что газ и пар подчиняются уравнению Менделеева–Клапейрона. Тогда плотности газа и пара ρ_r и ρ_n связаны с их парциальными давлениями p_r и p_n следующими соотношениями:

$$\rho_r = \frac{p_r \mu_r}{RT} \quad \text{и} \quad \rho_n = \frac{p_n \mu_n}{RT},$$

где R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура. Из закона Дальтона для смеси газа и пара следует, что давление в сосуде равно сумме парциальных давлений газа и пара: $p = p_r + p_n$. В соответствии с определением относительной влажности, $p_n = f p_n$. Объединяя записанные выражения, найдем искомое отношение:

$$n = \frac{\rho_r}{\rho_n} = \frac{p_r \mu_r}{p_n \mu_n} = \frac{(p - fp_n) \mu_r}{fp_n \mu_n}.$$

III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

III.1. До соединения внешних пластин электростатическая энергия системы была равна

$$W_0 = \frac{q^2}{2C},$$

где $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$, а ϵ_0 – электрическая постоянная. После соединения между собой внешних пластин на обращенных друг к другу поверхностях внутренних пластин останутся заряды, модули которых равны q_1 , а на их внешних поверхностях окажутся заряды q_2 . Из закона сохранения электрического заряда следует, что $q = q_1 + q_2$. Обозначим через $U_1 = \frac{q_1}{C}$ модуль напряжения между внутренними пластинами, а через $U_2 = \frac{q_2}{C}$ модуль напряжения между крайней и ближайшей к ней внутренней пластиной. Так как потенциалы внешних пластин после их соединения становятся равными, то $2U_2 - U_1 = 0$. Из записанных уравнений следует, что $q_1 = \frac{2}{3}q$ и $q_2 = \frac{1}{3}q$. В конечном состоянии электростатическая энергия системы равна

$$W_k = \frac{q_1^2}{2C} + 2 \cdot \frac{q_2^2}{2C} = \frac{q^2}{3C}.$$

Согласно закону сохранения энергии, $Q = W_0 - W_k = \frac{q^2}{6C}$. Отсюда

$$q = \sqrt{6QC} = \sqrt{\frac{6Q\epsilon_0 S}{d}}.$$

***III.2.** После переключения ключа K в положение 2 конденсатор зарядится до напряжения, равного ЭДС батарейки \mathcal{E} , и приобретет заряд $q = C\mathcal{E}$. При этом сторонние силы источника совершат работу

$$A = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2, \text{ а конденсатор приобретет энергию } W = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

После возврата ключа обратно в положение 1 конденсатор будет разряжаться через последовательно соединенные резисторы r_1 и r_2 . Через резистор r_3 ток течь не будет, так как диод D будет все время заперт. Пусть в некоторый момент времени t через резисторы r_1 и r_2 протекает ток $I(t)$. В соответствии с законом Джоуля–Ленца, количества теплоты, выделяющейся в резисторах r_1 и r_2 за малый промежуток времени Δt , равны $\Delta Q_1 = I^2(t)r_1\Delta t$ и $\Delta Q_2 = I^2(t)r_2\Delta t$. Отношение этих количеств теплоты зависит только от отношения сопротивлений резисторов и не зависит от времени t . Следовательно, полные количества теплоты Q_1 и Q_2 , выделившейся на резисторах r_1 и r_2 , также относятся как сопро-

тивления резисторов: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}$. В соответствии с законом сохранения

энергии, вся запасенная в конденсаторе энергия после возврата ключа в положение 1 перейдет в теплоту: $W = Q_1 + Q_2$. Из двух последних урав-

нений получаем: $Q_2 = \frac{C\mathcal{E}^2 r_2}{2(r_1 + r_2)}$ и $\frac{A}{Q_2} = 2\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)$.

III.3. На носители электрического заряда, движущиеся в проводящей жидкости, действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = quB$, направленная в сторону одной из пластин. Из-за этого на одной из пластин возникает избыточный положительный, а на другой – избыточный отрицательный заряд. Эти заряды создают в пространстве между пластинами электри-

ческое поле с напряженностью \mathbf{E} , которое можно считать однородным, поскольку расстояние между пластинами мало по сравнению с их размерами. При установившемся течении жидкости действие силы Лоренца на движущиеся носители заряда компенсируется действием силы со стороны электрического поля: $quB = qE$. Поэтому между пластинами будет существовать разность потенциалов $\Delta\varphi = Eh = uBh$. Следовательно, искомый заряд подключенного к пластинам конденсатора будет равен $q = C\Delta\varphi = CuBh$. Отметим, что описанная в условии задачи система иллюстрирует собой принцип действия *магнитогидродинамического генератора*.

III.4. В отсутствие электрического поля частица массой m с зарядом q двигалась бы под действием силы Лоренца $F_{\text{Л}} = qvB$ в плоскости рис. 44 по дуге окружности с постоянной скоростью. Радиус R этой окружности можно найти, записав уравнение движения частицы: $\frac{mv^2}{R} = qvB$, откуда $R = \frac{mv}{qB}$. При этом частица вылетела бы из области, где есть магнитное поле, в обратном направлении через время $\tau = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB}$ со скоростью $\mathbf{v}_k = -\mathbf{v}$. При наличии электрического поля

движение частицы можно представить как сумму рассмотренного выше равномерного движения по окружности и равноускоренного движения вдоль силовых линий поля \mathbf{E} . Это можно сделать потому, что составляющая скорости в направлении вектора \mathbf{B} , которую будет приобретать частица под действием электрического поля, не окажет никакого влияния на величину и направление силы Лоренца. За время τ скорость частицы получит в направлении вектора \mathbf{E} приращение $u = \frac{qE\tau}{m} = \frac{\pi E}{B}$.

Следовательно, вектор скорости частицы при ее вылете из полупространства будет составлять с нормалью к его границе угол $\varphi = \text{arctg} \frac{u}{v} = \text{arctg} \frac{\pi E}{vB}$. Таким образом, частица отклонится от первоначального направления полета на угол

$$\alpha = \pi - \varphi = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\pi E}{vB} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{vB}{\pi E}.$$

III.5. Между полусферой и точкой O действует ЭДС индукции, возникающая при движении стержня. Для того чтобы найти модуль ЭДС индукции \mathcal{E} заметим, что при повороте вокруг вертикальной оси стержень за малое время Δt «заметает» поверхность площадью

$$\Delta S = \frac{1}{2} Rv\Delta t, \text{ где } v = \omega R \sin \alpha - \text{ скорость вращательного движения}$$

конца стержня, касающегося полусферы. Поток вектора индукции магнитного поля через эту поверхность равен

$$\Delta \Phi = B \sin \alpha \cdot \Delta S = \left(\frac{1}{2} \omega B R^2 \sin^2 \alpha \right) \cdot \Delta t. \text{ В соответствии с законом электромгнитной индукции Фарадея, } |\mathcal{E}| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega B R^2 \sin^2 \alpha. \text{ Так как}$$

сопротивление включенного в цепь резистора достаточно велико, то можно считать, что вся теплота выделяется именно в нем. По закону Джоуля–Ленца, выделяющаяся в резисторе мощность равна

$$N = \frac{\mathcal{E}^2}{r} = \frac{\omega^2 B^2 R^4 \sin^4 \alpha}{4r}.$$

III.6. Пусть ЭДС источника равна \mathcal{E} . В соответствии с законом Джоуля–Ленца, за время τ в резисторе выделяется количество теплоты

$$Q_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \tau. \text{ При этом сила тока через катушку нарастает с постоянной}$$

по модулю скоростью $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ такой, что $\mathcal{E} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$. Поэтому при отключении источника через время $\Delta t = \tau$ сила тока в катушке составляет

$$I_0 = \frac{\mathcal{E} \tau}{L}. \text{ Количество теплоты, которое выделяется в резисторе после отключения источника, равно энергии, запасенной в магнитном поле}$$

катушки: $Q_2 = \frac{LI_0^2}{2}$. По условию задачи $Q_1 = Q_2$, то есть $\frac{\mathcal{E}^2 \tau}{R} = \frac{\mathcal{E}^2 \tau^2}{2L}$.

Отсюда $L = \frac{R\tau}{2}$. Заметим, что ответ не зависит от ЭДС источника.

IV. ОПТИКА

IV.1. Проведем луч F_1D через передний фокус F_1 параллельно лучу CA , который по условию проходит через линзу, не преломляясь (см. рис. 97). Луч F_1D , проходящий через передний фокус, после преломления в линзе идет параллельно главной оптической оси и пересекается с лучом CA в побочном фокусе – точке A , лежащей в задней фокальной плоскости AF_2 . Поскольку $BCED$ – параллелограмм, то ΔF_1CB равен ΔADE , и $AD = F_1C = f_2$. Отсюда получаем ответ: $CO = f_1 - f_2$.

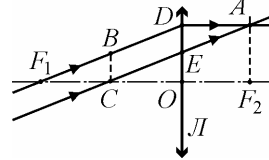


Рис. 97

IV.2. Источник S и его изображение S_1 должны лежать на одной прямой – продолжении луча I , проходящего через оптический центр C линзы (см. рис. 98). Поэтому, проведя прямую S_1S до ее пересечения с оптической осью OO_1 в точке C , можно установить местонахождение линзы L . Луч 2, выходящий из источника параллельно главной оптической оси, после преломления в точке D линзы L должен пересечь эту ось в главном фокусе F , местонахождение которого можно установить, проведя от точки S_1 через точку D прямую S_1D до ее пересечения с оптической осью OO_1 в точке F . Таким образом, изображение источника является мнимым, а линза – собирающей. В соответствии с формулой тонкой линзы имеем:

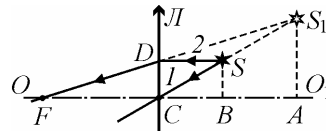


Рис. 98

$$\frac{1}{CB} - \frac{1}{CA} = \frac{1}{F}.$$

Величина $1/CA$ входит в записанное выражение со знаком «минус», потому что изображение является мнимым. Поскольку $\triangle CSB$ подобен $\triangle CS_1A$, то $\frac{h_1}{CB} = \frac{h_2}{CB + \Delta a}$, откуда

$$CB = \frac{h_1 \Delta a}{h_2 - h_1}, \quad CA = CB + \Delta a = \frac{h_2 \Delta a}{h_2 - h_1}.$$

Подставляя эти выражения для CB и CA в записанную выше формулу линзы, получаем ответ: $\Delta a = \frac{F(h_2 - h_1)^2}{h_1 h_2}$.

IV.3. Источник S и его изображение S_1 должны лежать на одной прямой – луче l , проходящем через оптический центр C линзы (см. рис. 99). Поэтому, проведя прямую SS_1 до ее пересечения с оптической осью OO_1 в точке C , можно установить местонахождение линзы L . Луч 2 , выходящий из источника параллельно главной оптической оси, преломляется в точке D линзы L , и после этого сам луч (или его продолжение) должен пересечь эту ось в главном фокусе F . Местонахождение главного фокуса можно установить, проведя от точки D через точку S_1 прямую DS_1 до ее пересечения с оптической осью OO_1 в точке F . Таким образом, изображение источника является мнимым, а линза – рассеивающей. В соответствии с формулой тонкой линзы имеем:

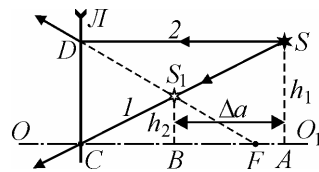


Рис. 99

прямой – луче l , проходящем через оптический центр C линзы (см. рис. 99). Поэтому, проведя прямую SS_1 до ее пересечения с оптической осью OO_1 в точке C , можно установить местонахождение линзы L . Луч 2 , выходящий из источника параллельно главной оптической оси, преломляется в точке D линзы L , и после этого сам луч (или его продолжение) должен пересечь эту ось в главном фокусе F . Местонахождение главного фокуса можно установить, проведя от точки D через точку S_1 прямую DS_1 до ее пересечения с оптической осью OO_1 в точке F . Таким образом, изображение источника является мнимым, а линза – рассеивающей. В соответствии с формулой тонкой линзы имеем:

$$\frac{1}{CA} - \frac{1}{CB} = -\frac{1}{F}.$$

Величины $1/CB$ и $1/F$ входят в записанное выражение со знаком «минус» потому, что изображение является мнимым, а линза – рассеивающей. Поскольку $\triangle CS_1B$ подобен $\triangle CSA$, то $\frac{h_2}{CB} = \frac{h_1}{CB + \Delta a}$, откуда

$$CB = \frac{h_2 \Delta a}{h_1 - h_2}, \quad CA = CB + \Delta a = \frac{h_1 \Delta a}{h_1 - h_2}.$$

Подставляя эти выражения для CA и CB в записанную выше формулу линзы, получаем ответ: $F = -\frac{h_1 h_2 \Delta a}{(h_1 - h_2)^2}$.

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2007»

I. МЕХАНИКА

I.1. Обозначим расстояние O_1C через x (см. рис. 100). Тогда искомая скорость равна $v = \dot{x}$, где точка над буквой x означает производную от x по времени. Из $\triangle O_1CO_2$ по теореме синусов можно записать:

$\frac{x}{\sin \gamma} = \frac{h}{\sin \alpha}$. Учитывая, что $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, из

этой формулы находим

$$x = h \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

При дифференцировании данного выражения по времени примем во внимание, что производная от частного двух функций, зависящих от времени (например $y(t)$ и $z(t)$), вычисляется по формуле:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y}{z} \right) = \frac{y\dot{z} - y\dot{z}}{z^2},$$

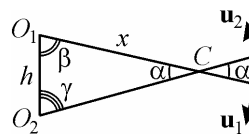


Рис. 100

а производная от сложной функции $y(z(t))$ равна

$$\frac{d}{dt} y(z) = \dot{y}(z) \dot{z}; \text{ например, } \frac{d}{dt} \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}.$$

С учетом сказанного получаем:

$$\dot{x} = h \frac{\cos(\alpha + \beta) \sin \alpha \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}}{\sin^2 \alpha}.$$

В нашем случае $\dot{\beta} = -u_1 / L$, $\dot{\gamma} = -u_2 / L$ и $\dot{\alpha} = -(\dot{\beta} + \dot{\gamma}) = (u_1 + u_2) / L$. Знак «минус» в первых двух выражениях отражает тот факт, что при указанных в условии направлениях скоростей u_1 и u_2 углы β и γ уменьшаются. Объединяя записанные выражения, находим ответ:

$$v = h \frac{u_2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha - (u_1 + u_2) \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha}{L \sin^2 \alpha}.$$

1.2. Куб и цилиндр движутся под действием сил, модули и направления которых изображены на рис. 101, где mg – модуль силы тяжести, N – модуль нормальной составляющей силы взаимодействия куба и цилиндра, F – модуль силы трения между кубом и цилиндром, N_1 и N_2 – модули нормальных составляющих сил взаимодействия куба и цилиндра со столом, F_1 и F_2 – модули сил трения, возникающих при скольжении куба и цилиндра по столу.

Рис. 101

По второму закону Ньютона уравнения движения центров масс куба и цилиндра в проекции на горизонтальное направление запишутся как:

$$ma = f - N - F_1, \quad ma = N - F_2,$$

где a – модуль ускорения этих тел. В проекции на вертикальное направление имеем:

$$0 = F + N_1 - mg, \quad 0 = N_2 - F - mg.$$

Отсюда $N_1 = mg - F$, $N_2 = mg + F$. Поэтому силы трения скольжения

$$F_1 = \mu N_1 = \mu(mg - F), \quad F_2 = \mu N_2 = \mu(mg + F).$$

Поскольку цилиндр по условию движется, не вращаясь, сумма моментов сил F и F_2 относительно его оси равна нулю, откуда следует, что $F = F_2$. При этом сила трения покоя F достигает максимального значения: $F = \mu N$. Следовательно, $N = N_2$. Объединяя эти соотношения с записанными выше выражениями для сил F_1 и F_2 , получаем, что

$$F = \frac{\mu mg}{1 - \mu}, \quad F_1 = \frac{\mu mg(1 - 2\mu)}{1 - \mu}, \quad F_2 = \frac{\mu mg}{1 - \mu}, \quad N = \frac{mg}{1 - \mu}.$$

Подставляя найденные значения сил в уравнения движения центров масс куба и цилиндра, находим ответ: $m = \frac{f}{2g(1 + \mu)}$.

1.3. При решении этой задачи придётся использовать как законы сохранения, так и законы кинематики. Прежде всего, выясним, какие величины сохраняются в системе «шарик + клин». Удар абсолютно упругий, поэтому *механическая энергия системы* до и после удара одинакова. Можно приравнять кинетическую энергию шарика непосредственно перед соударением и кинетическую энергию клина и шарика сразу после соударения:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Здесь v_0 и v – скорости шарика до и после удара, u – скорость клина после удара.

Импульс системы «шарик + клин» в результате соударения *изменяется*: до удара он горизонтален, а после удара появляется вертикальная составляющая этого импульса, связанная с отскочившим вверх шариком. Это обусловлено появлением в процессе соударения дополнительной нескомпенсированной составляющей внешней силы – силы реакции опоры. Однако поскольку реакция опоры не имеет проекции на горизонтальное направление, сохраняется горизонтальная составляющая импульса системы, (поверхность опоры гладкая и импульсом силы трения можно пренебречь):

$$mv_0 = Mu .$$

Из этих уравнений находим скорости $v = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M}}$ и $u = v_0 \frac{m}{M}$.

Теперь можно записать закон движения для каждого из тел после соударения. Направим оси системы координат по горизонтали (Ox) и по вертикали (Oy). Клин движется равномерно, поскольку трения нет:

$$x(t) = ut .$$

Движение шарика – равнопеременное:

$$y(t) = v \cdot t - \frac{gt^2}{2} .$$

Последние два равенства превращаются в алгебраические уравнения, включающие искомую величину, если записать их для момента времени $t = \tau$, когда шарик вернется в ту точку, где он столкнулся с клином:

$$S = u\tau, \quad 0 = v\tau - \frac{g\tau^2}{2} .$$

Решение записанной системы уравнений позволяет найти ответ:

$$S = 2 \frac{mv_0^2}{Mg} \sqrt{\frac{M-m}{M}} \approx 2 \frac{mv_0^2}{Mg} = 10 \text{ см.}$$

1.4. По условию сила сопротивления воздуха $F = \beta v$, где v – скорость автобуса, β – коэффициент сопротивления. Поэтому часть мощности двигателя, расходуемая на преодоление этой силы, равна $N_1 = Fv = \beta v^2$. При движении автобуса массой m по наклонному участку шоссе часть мощности двигателя расходуется также на увеличение потенциальной энергии автобуса: $N_2 = mg \sin \alpha \cdot v$. Полная мощность, развиваемая двигателем, $N_0 = \beta v^2 + mgv \sin \alpha$. Из условия задачи следует система уравнений:

$$\beta v_0^2 = \beta v_1^2 + mgv_1 \sin \alpha_1 = \beta v_2^2 + mgv_2 \sin \alpha_2 .$$

Исключая из этой системы β и m , получаем ответ:

$$v_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{u^2 + 4v_0^2} - u \right), \quad \text{где} \quad u = \frac{(v_0^2 - v_1^2) \sin \alpha_2}{v_1 \sin \alpha_1}.$$

I.5. Стержень находится в равновесии под действием сил, изображенных на рис. 102, где mg и Mg – силы тяжести, действующие на шарик и на стержень, N_1 и N_2 – нормальные составляющие сил реакции горизонтальной и вертикальной поверхностей, F_1 и F_2 – силы трения покоя. Максимальное расстояние l соответствует случаю, когда обе силы трения покоя принимают максимально возможные значения: $F_1 = \mu N_1$, $F_2 = \mu N_2$. Записывая для этого случая условия равновесия стержня, имеем:

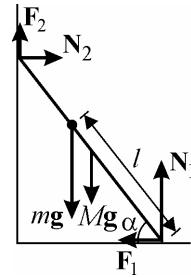


Рис. 102

$$N_2 = \mu N_1, \quad \mu N_2 + N_1 = (M + m)g,$$

$$\mu N_2 L \cos \alpha + N_2 L \sin \alpha = mgl \cos \alpha + Mg \frac{L}{2} \cos \alpha.$$

Исключая из этих уравнений N_1 и N_2 , получаем ответ:

$$l = L \left(\frac{\mu(\mu + \operatorname{tg} \alpha)}{(\mu^2 + 1)} \cdot \frac{(M + m)}{m} - \frac{M}{2m} \right).$$

Замечание: Заданные в условии величины m , M , α и μ должны принимать такие значения, чтобы выполнялось неравенство $0 \leq l \leq L$.

I.6. Пусть M – масса груза, m – масса стержня, s – его длина. Стержень находится в равновесии под действием сил, показанных на рис. 103, где Mg и mg – силы тяжести, T – сила натяжения проволоки. В целях экономии места сила реакции шарнира на рисунке не изображена. Уравнение моментов,

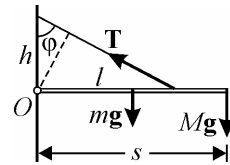


Рис. 103

записанное относительно оси шарнира (точки O) имеет вид:

$$Mgs + mg \frac{s}{2} = Th \sin \varphi, \quad \text{причем } \sin \varphi = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}}.$$

Пусть L_0 – длина недеформированной проволоки, а ΔL – ее абсолютное удлинение под действием силы натяжения T . По закону Гука

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{T}{ES},$$

где E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения проволоки. Поскольку проволока жесткая, ее длина в растянутом состоянии мало отличается от L_0 . Поэтому можно приближенно положить $L_0 \approx \sqrt{l^2 + h^2}$. В итоге уравнение моментов и закон Гука принимают вид:

$$\left(M + \frac{m}{2}\right)gs = Th \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}}, \quad \frac{\Delta L}{\sqrt{l^2 + h^2}} = \frac{T}{ES}.$$

Исключая из этих равенств натяжение проволоки T , найдем ее абсолютное удлинение:

$$\Delta L = \left(h + \frac{l^2}{h}\right) \frac{(M + (m/2))gs}{ESl}.$$

Минимум этого выражения легко определить, приравняв нулю производную

$$\frac{d}{dh} \left(h + \frac{l^2}{h}\right) = 1 - \frac{l^2}{h^2} = 0.$$

Отсюда находим ответ: $h = l = 30$ см.

1.7. Введем ось Ox , направление которой совпадает с осью стержня. Поскольку сумма проекций на эту ось сил, действующих на шарик при прохождении положения равновесия равна нулю (пружина не де-

формирована, сила трения отсутствует), то можно применить закон сохранения импульса для системы «шарик + муха»:

$$Mv_0 = (M + m)u_0,$$

где v_0 – скорость шарика без мухи при прохождении им положения равновесия, u_0 – скорость шарика с мухой сразу после ее посадки на шарик. В процессе колебаний шарика на пружине (или шарика с мухой) механическая энергия каждой из этих систем постоянна во времени. Поэтому можно записать:

$$\frac{kX_0^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2}, \quad \frac{kX_1^2}{2} = \frac{(M + m)u_0^2}{2},$$

где k – жесткость пружины. Отметим, что механическая энергия системы в этих двух случаях различна. Используя записанные уравнения,

получаем ответ: $X_1 = X_0 \sqrt{\frac{M}{M + m}}$.

1.8. Совместим начало системы координат, связанной с кабиной лифта, с нижним концом недеформированной пружины; координатную ось Ox направим вертикально вниз. Когда кабина неподвижна, координата гири в положении равновесия равна $x_0 = mg/k$. В момент начала движения кабины скачком смещается вниз положение равновесия гири, координата которой в равновесии становится равной $x_1 = m(g + a)/k$. В результате начинаются гармонические колебания гири с периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. График зависимости координаты гири x от времени t изображен на рис. 104, на котором $t = 0$ соответствует моменту начала движения кабины. Как видно из рисунка, время τ , за которое длина пружины в первый раз достигает максимального значения, равно половине периода колебаний гири: $\tau = T/2$. Путь, пройден-

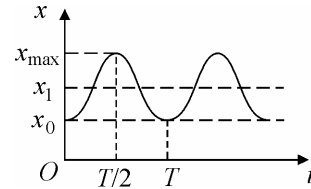


Рис. 104

ный кабиной за это время, $S = \frac{at^2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$S = \frac{\pi^2 at}{2k}.$$

I.9. Пусть массы шариков m_1 и m_2 , а жесткость пружины k . Частоты колебаний каждого из шариков при условии, что другой шарик закреплен, находятся по известной формуле для частоты колебаний груза на пружине:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}.$$

Если после растяжения пружины отпустить шарики одновременно, то их колебания будут происходить так, что центр масс системы останется неподвижным. Обозначим через x_1 и x_2 модули смещений шариков от положения равновесия. Из определения центра масс следует равенство:

$$m_1 x_1 = m_2 x_2.$$

Отсюда находим, что растяжение пружины $\Delta l = x_1 + x_2$ выражается через x_1 и x_2 как:

$$\Delta l = \frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} x_2.$$

По закону Гука модуль силы упругости, возникающей при растяжении пружины, равен $F = k\Delta l$. Уравнения движения шариков имеют вид:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k\Delta l, \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k\Delta l,$$

или, с учетом записанных выше выражений для Δl ,

$$\ddot{x}_1 + k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} x_2 = 0.$$

Как и следовало ожидать, оба шарика совершают гармонические колебания на одной и той же частоте

$$\omega = \sqrt{k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} .$$

Учитывая, что частота колебаний связана с периодом T соотношением $\omega = \frac{2\pi}{T}$, получаем ответ: $T = \frac{T_1 T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}$.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. Поскольку поршень вытаскивают из цилиндра медленно (без ускорения), то внешняя сила *нарастает постепенно*, оставаясь равной

$$F = (p_0 - p)S + mg .$$

Поршень покинет цилиндр, если сила превысит значение

$$F_1 = (p_0 - p_1)S + mg ,$$

где p_1 — давление воздуха в цилиндре в тот момент, когда поршень достигает крайнего верхнего положения. В этом положении объем, занимаемый воздухом, увеличился по отношению к первоначальному в два раза. Давление p_1 определяется, исходя из закона Бойля–Мариотта:

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S} \right) \frac{V}{2} = p_1 V .$$

Совместное решение записанных уравнений позволяет получить ответ:

$$F_1 = \frac{1}{2}(p_0 S + mg) .$$

Отметим, что найденное значение силы F_1 является минимально достаточным, для того чтобы медленно вытащить поршень из цилиндра.

II.2. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии газа

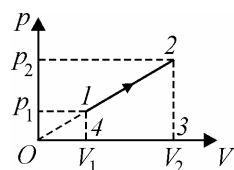


Рис. 105

$$\Delta U = Q - A.$$

Работа A , совершенная газом при переходе из состояния 1 в состояние 2, численно равна площади трапеции 1234 (см. рис. 105):

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1).$$

Поскольку точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат, справедливо равенство:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Поэтому в рассматриваемом процессе работа газа

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)V_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right).$$

Ответ: $\Delta U = Q - A = Q - \frac{1}{2}(p_1 + p_2)V_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) = 150 \text{ Дж}.$

II.3. Пусть p_0 , V_0 и T_0 – начальные, а p , V и T – конечные давление, объем и температура газа. По первому закону термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где $\Delta U = \frac{3}{2}R(T - T_0)$ – изменение внутренней энергии, A – работа газа.

Поскольку сжатие пружины x совпадает с высотой поршня над дном сосуда, давление газа $p = kx/S$ пропорционально его объему: $p \sim V$ и

$$\frac{p}{V} = \frac{p_0}{V_0}.$$

При этом работа газа

$$A = \frac{1}{2}(p + p_0)(V - V_0) = \frac{1}{2}(pV - p_0V_0).$$

Из уравнения состояния газа имеем:

$$p_0 V_0 = RT_0, \quad pV = np_0 n V_0 = RT.$$

Отсюда $T = n^2 T_0$. Следовательно, $A = \frac{1}{2} p_0 V_0 (n^2 - 1) = \frac{1}{2} RT_0 (n^2 - 1)$,

$$\Delta U = \frac{3}{2} RT_0 (n^2 - 1). \text{ Ответ: } Q = 2RT_0 (n^2 - 1) = 6225 \text{ Дж.}$$

II.4. Поскольку плотность насыщенного водяного пара при комнатной температуре примерно на 5 порядков меньше плотности воды, а масса воды в начальном состоянии равна массе пара, объемом воды в цилиндре можно пренебречь. Обозначим давление насыщенного пара через p_n , а парциальное давление воздуха – через $x p_n$. В соответствии с законом Дальтона начальное давление смеси равно $p_0 = (1 + x) p_n$. После изотермического уменьшения объема смеси в k раз пар останется насыщенным (то есть его парциальное давление не изменится), парциальное давление воздуха увеличится в k раз, а давление смеси возрастет в n раз:

$$n p_0 = (1 + kx) p_n = n(1 + x) p_n.$$

Отсюда $x = \frac{n-1}{k-n} = 1$, то есть начальное давление смеси равно

$p_0 = \frac{k-1}{k-n} p_n = 2 p_n$. Так как масса воды в начальном состоянии равна массе пара, то при изотермическом увеличении объема смеси в два раза вся вода испарится. При этом парциальное давление воздуха уменьшится в 2 раза, и конечное давление под поршнем станет равным

$$p_k = p_n + \frac{1}{2} x p_n = \frac{2k-n-1}{2(k-n)} p_n = 1,5 p_n.$$

Следовательно, $\frac{p_k}{p_0} = \frac{2k-n-1}{2(k-1)} = 0,75$, то есть давление смеси уменьшится в $4/3$ раз.

II.5. Пусть перемещение l правого поршня таково, что пар в левом отсеке остается ненасыщенным. Обозначив через x смещение левого поршня, по закону Бойля-Мариотта имеем:

$$pSL = p_1S(L-l+x) \quad (\text{для воздуха}); \quad pSL = p_1S(L-x) \quad (\text{для пара}).$$

Отсюда $x = l/2$, что справедливо, пока $p_1 \leq 2p$, т.е. при $l \leq L$. Когда перемещение правого поршня превысит L , пар в левом отсеке начнет конденсироваться, и давление в обоих отсеках станет постоянным и равным $2p$. Следовательно, постоянным и равным $L/2$ будет и расстояние между поршнями. Длина левого отсека при этом

$$L'' = 2L - (l + (L/2)) = 3L/2 - l,$$

и смещение левого поршня составит величину

$$x = L - L'' = l - L/2.$$

Если $l \geq 3L/2$, пар полностью сконденсируется и левый поршень перестанет перемещаться. Пренебрегая объемом образовавшейся в левом отсеке воды, получаем ответ в виде: $x = l/2$ при $l \leq L$; $x = l - L/2$ при $L \leq l \leq 3L/2$; $x = L$ при $3L/2 \leq l \leq 2L$.

III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

III.1. Пусть m – масса каждого из шариков, q_1 и q_2 – заряды шариков, v – модуль скорости первого шарика в момент, когда расстояние между шариками равно $2a$, v_1 и v_2 – модули скоростей первого и второго шариков в момент, когда расстояние между ними равно $3a$. Из законов сохранения энергии и импульса следуют равенства:

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2a} + \frac{mv^2}{2}, \quad \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3a} + \frac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2},$$

$$mv = mv_1 - mv_2.$$

Исключая из этих равенств v и $\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 a}$, получаем уравнение

$$v_1^2 - 8v_1v_2 + v_2^2 = 0,$$

откуда $v_1 = v_2(4 \pm \sqrt{15})$. Условию задачи удовлетворяет больший по величине корень. Ответ: $n = \frac{v_1}{v_2} = 4 + \sqrt{15} \approx 8$.

III.2. Ключевым моментом в условии этой задачи является тот факт, что сферы одинаковые. Отсюда следует, что при поочередном соприкосновении шарика с каждой из сфер образуются тождественные друг другу системы проводников. Поэтому отношения заряда сферы к заряду шарика в обоих случаях должны быть одними и теми же. Если исходить из этого, то провести дальнейшие расчеты не составит труда. Пусть при соприкосновении шарика с первой сферой на него со сферы перетек заряд q_1 , а на сфере остался заряд $Q_1 - q_1$. Тогда справедливо равенство:

$$\frac{Q_1 - q_1}{q_1} = \frac{Q_{2к}}{q_2}.$$

Из закона сохранения электрического заряда, примененного к процессу соприкосновения шарика со второй сферой, следует, что $Q_2 + q_1 = Q_{2к} + q_2$. Исключая из записанных уравнений $Q_{2к}$, получим квадратное уравнение относительно неизвестной величины q_1 :

$$q_1^2 + Q_2q_1 - Q_1q_2 = 0.$$

Решая его, найдем, что $q_1 = \frac{-Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 4Q_1q_2}}{2}$. Следовательно,

$$Q_{2к} = Q_2 + q_1 - q_2 = \frac{Q_2 - 2q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 4Q_1q_2}}{2} = 3,5 \text{ мкКл.}$$

III.3. При замкнутом ключе напряжение на конденсаторе C_1 равно

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}, \text{ конденсатор } C_2 \text{ не заряжен, и энергия системы } W_1 = \frac{C_1U_1^2}{2}.$$

Когда ключ разомкнули, конденсатор C_1 разрядился через резистор, а конденсатор C_2 зарядился до напряжения $U_2 = \mathcal{E}$. При этом энергия системы стала равной $W_2 = \frac{C_2 \mathcal{E}^2}{2}$, а через источник протек заряд $q_2 = C_2 \mathcal{E}$, в результате чего источник совершил работу $A = q_2 \mathcal{E}$. По закону сохранения энергии имеем:

$$W_1 + A = W_2 + Q.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$Q = \frac{\mathcal{E}^2}{2} \left(C_2 + C_1 \frac{R^2}{(R+r)^2} \right) = 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

III.4. Поскольку конденсатор был полностью заряжен и отключён от источника, начальный заряд конденсатора равен $q_0 = C\mathcal{E}$. Здесь использовано определение ёмкости конденсатора и тот факт, что конденсатор зарядится до разности потенциалов, равной ЭДС источника. Начальная энергия – это энергия электрического поля заряженного конденсатора:

$$W_0 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

В тот момент, когда заряд конденсатора уменьшится в n раз, эта энергия перераспределится между электрическим и магнитным полями, оставаясь неизменной:

$$W_0 = \frac{(q_0/n)^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}.$$

Решая записанную систему уравнений, найдём силу тока в этот момент:

$$I = \sqrt{\frac{(n^2-1)C}{L}} \cdot \frac{\mathcal{E}}{n} = \sqrt{\frac{3C}{4L}} \cdot \mathcal{E} = 50 \text{ мА.}$$

III.5. На рис. 106 изображена рамка $ABCD$, к вершинам A и D которой подключен источник ЭДС. Таким образом, сторона рамки AD подключена параллельно участку $ABCD$. В магнитном поле на проводники с током (стороны рамки) действуют силы Ампера. Направления магнитной индукции, токов и сил Ампера представлены на рис. 106. Пренебрегая внутренним сопротивлением источника и используя закон Ома для полной цепи, найдем значения токов I_1 и I_2 , текущих по участкам AD и $ABCD$:

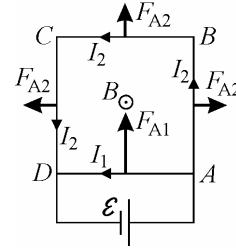


Рис. 106

$$I_1 = \frac{4\mathcal{E}}{R}, \quad I_2 = \frac{4\mathcal{E}}{3R}.$$

Из рис. 106 видно, что силы Ампера, действующие на стороны AB и CD , уравновешивают друг друга, а на стороны AD и BC – складываются. Поэтому на рамку действует результирующая сила, модуль которой равен

$$F = F_{A1} + F_{A2} = (I_1 + I_2) \cdot a \cdot B.$$

Здесь учтено, что плоскость рамки перпендикулярна направлению вектора магнитной индукции \mathbf{B} . Поэтому входящий в закон Ампера синус угла между проводником с током и вектором \mathbf{B} для каждой из сторон рамки обращается в единицу. Подставляя в выражение для F найденные выше значения токов, находим ответ:

$$F = \frac{16\mathcal{E}aB}{3R} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

III.6. Рассмотрим момент времени, когда напряжение на катушке равно U . Обозначим через I_L , I_R , и I_r силы токов, текущих в этот момент через катушку, резистор и источник, соответственно. По закону электромагнитной индукции

$$U = L \frac{\Delta I_L}{\Delta t},$$

где ΔI_L – изменение за малое время Δt силы тока, текущего через катушку. По закону Ома для однородного участка цепи напряжение на

резисторе

$$U = I_R R.$$

По закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС,

$$U = \mathcal{E} - I_r r.$$

Поскольку согласно первому правилу Кирхгофа $I_r = I_L + I_R$, из последнего равенства можно исключить переменную I_r , переписав его в виде:

$$U = \mathcal{E} - \left(I_L + \frac{U}{R} \right) r.$$

Кроме того, из записанных выше уравнений следует, что

$$L \Delta I_L = R I_R \Delta t = R \Delta q,$$

где $\Delta q = I_R \Delta t$ – заряд, протекший через резистор R за время Δt . Так как до замыкания ключа ток через катушку отсутствовал, а к рассматриваемому моменту времени стал равным I_L , то $L I_L = R q$. Выражая отсюда величину I_L и подставляя ее в записанное выше соотношение для U , получим уравнение:

$$U = \mathcal{E} - \left(\frac{Rq}{L} + \frac{U}{R} \right) r,$$

из которого следует, что

$$U = \frac{R}{R+r} \left(\mathcal{E} - \frac{Rr q}{L} \right).$$

Заметим, что решение задачи существует при $q \leq \frac{\mathcal{E} L}{Rr}$, в противном случае решения нет.

IV. ОПТИКА

IV.1. Построение изображения для случая, когда правая линза смещена, приведено на рис. 107. Для построения использованы два луча, идущие от источника: луч 1, совпадающий с главной оптической осью левой линзы, и луч 2, проведенный в точку пересечения преломляющей плоскости левой линзы с главной оптической осью правой линзы. Из

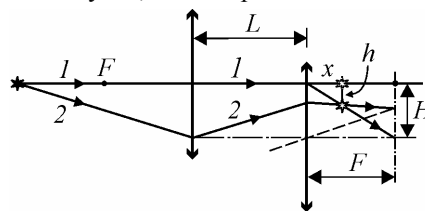


Рис. 107

рис. 107 видно, что на основании подобия треугольников $h = Hx/F$. При вычислении величины x учтем, что изображение источника, даваемое левой линзой, находится на ее главной оптической оси на расстоянии $2F - L$ от правой линзы справа от нее. Используя для правой линзы формулу:

$$-\frac{1}{2F-L} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F},$$

находим, что $x = F \frac{2F-L}{3F-L}$. Ответ: $h = H \frac{2F-L}{3F-L}$.

IV.2. Первое действительное изображение высотой h формируется лучами, которые исходят непосредственно из стержня и преломляются линзой (см. рис. 108). Второе действительное изображение высотой h_1 образуется при преломлении линзой лучей, продолжения которых формируют мнимое изображение стержня в зеркале. Обозначим высоту стержня через H , расстояние между линзой и мнимым изображением стержня в зер-

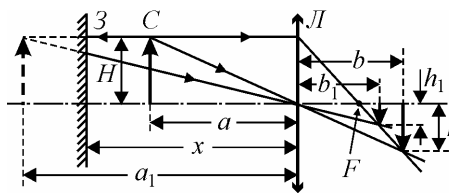


Рис. 108

кале через a_1 , расстояния между действительными изображениями стержня и линзой через b и b_1 . Из рисунка видно, что:

$$\frac{h}{H} = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \frac{h_1}{H} = \frac{b_1}{a_1},$$

причем $a_1 = a + 2(x - a) = 2x - a$. Пусть $k = \frac{h}{h_1}$. В соответствии с формулой тонкой линзы,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}.$$

Отсюда находим, что $\frac{a}{b} = \frac{a - F}{F}$ и $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 - F}{F}$. Следовательно,

$$k = \frac{a_1 b}{a b_1} = \frac{a_1 - F}{a - F} = 2 \frac{x - F}{a - F} - 1.$$

Переписывая последнее уравнение в виде $(k + 1)(a - F) = 2(x - F)$, получаем ответ:

$$x = \frac{(k + 1)a - (k - 1)F}{2}.$$

Заметим, что, в силу условий $a > F$ и $k > 1$, величина x положительна.

IV.3. Энергия одного кванта света $E = \frac{hc}{\lambda}$. Пусть в единицу времени на фотокатод падает n фотонов. Тогда мощность падающего света

$$N = nE.$$

Только малая часть поглощенных фотонов вызывает фотоэффект. По условию задачи доля таких фотонов составляет всего $\eta = 1/k = 0,1 = 10\%$ (это – так называемый квантовый выход процесса). Поэтому количество электронов, покидающих катод в единицу времени равно

$$n_e = \frac{n}{k}.$$

Ток насыщения через фотоэлемент достигается при условии, что все покинувшие катод электроны достигают анода. Поскольку сила тока равна величине заряда, переносимого в единицу времени, $I = n_e e$.

$$\text{Ответ: } I = \frac{eN\lambda}{khc} = 8 \text{ мА.}$$

IV.4. Расстояние внутри пластинки свет проходит за время $t_1 = \frac{d}{v_1}$, где v_1 – скорость света внутри пластинки. Из волновой теории света известно, что $v_1 = \frac{c}{n}$, где c – скорость света в вакууме. То же самое расстояние в воздухе свет проходит за время $t_2 = \frac{d}{v_2}$, где $v_2 = \frac{c}{n_0}$. Таким образом, после внесения пластинки световая волна, прошедшая через пластинку, будет запаздывать по сравнению с волной, распространяющейся в воздухе, на промежуток времени

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{d}{c}(n - n_0).$$

Такое запаздывание приводит к появлению сдвига фаз

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = \frac{\omega d}{c}(n - n_0),$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – круговая частота, а T – период колебаний в световой волне. Учитывая, что $\lambda = cT$, получаем окончательно

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d(n - n_0) = 3\pi.$$

Учебное издание

**ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ
И ОЛИМПИАД ПО ФИЗИКЕ В МГУ – 2007**

Оригинал-макет: *Чесноков С.С.*

Подписано в печать 12.11.07 г. Формат 60x90 1/16
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 8,75 п.л.
Тираж 1100 экз. Зак. № 825

Физический факультет МГУ
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова

Типография МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, Ленинские горы