Задача 1. Условие. На обочине прямолинейного участка шоссе установлены на равных расстояниях друг от друга четыре столбика. Мотоциклист разгоняется по шоссе, двигаясь с постоянным ускорением. При этом отрезок пути между первым и вторым столбиками он преодолевает за время $t_1 = 2$ с, а отрезок пути между вторым и третьим столбиками – за время $t_2 = 1$ с. Каково время t_3 движения мотоциклиста на отрезке пути между третьим и четвертым столбиками?

Задача 1. Решение. Пусть расстояние между столбиками равно S, скорость мотоциклиста в момент проезда первого столбика равна v_0, а его ускорение равно a. Кинематические уравнения движения мотоциклиста на заданных в условии отрезках пути имеют вид:

$$S = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}, \quad S = (v_0 + a t_1) t_2 + \frac{a t_2^2}{2}, \quad S = (v_0 + a t_1 + a t_2) t_3 + \frac{a t_3^2}{2}.$$

Вводя обозначения $t_0 = \frac{2v_0}{a}$, $\tau = \sqrt{\frac{2S}{a}}$, последнее из этих уравнений приведем к виду:

$$t_3^2 + 2(t_1 + t_2 + (t_0/2)) t_3 - \tau^2 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень этого уравнения:

$$t_3 = -(t_1 + t_2 + (t_0/2)) + \sqrt{(t_1 + t_2 + (t_0/2))^2 + \tau^2}.$$

Чтобы получить ответ, осталось найти t_0 и τ. Для этого воспользуемся первым и вторым кинематическими уравнениями движения мотоциклиста, которые в наших обозначениях принимают вид:

$$\tau^2 = t_0 t_1 + t_1^2, \quad \tau^2 = (t_0 + 2t_1) t_2 + t_2^2.$$

Решая эту систему, находим

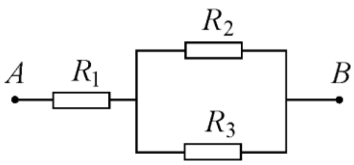
$$t_0 = \frac{t_2^2 - t_1^2 + 2t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 1 \text{ с}, \quad \tau^2 = \frac{(t_1 + t_2) t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 6 \text{ с}^2.$$

Следовательно, $t_3 = -3{,}5 + \sqrt{3{,}5^2 + 6} \approx 0{,}77$ с.

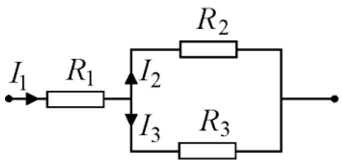
Задача 2. Условие. К дну кастрюли примерз кусок льда, имеющий температуру $0\,^\circ\mathrm{C}$. В кастрюлю налили воду при $0\,^\circ\mathrm{C}$ в таком количестве, что она полностью покрыла кусок льда. При этом высота уровня воды составила $h_0 = 20$ см. После того, как содержимому кастрюли передали $Q = 60$ кДж теплоты, $\eta = 10\%$ льда растаяло, а оставшийся лед поднялся на поверхность воды. На какой высоте h оказался при этом уровень воды в кастрюле? Кастрюля имеет цилиндрическую форму, площадь ее поперечного сечения $S = 200$ см^2.

Задача 2. Решение. Пусть m_0 – начальная масса льда. Тогда примерзший ко дну лед вытесняет объем $V_0 = \dfrac{m_0}{\rho_л}$. Всплывший лед массой $m = m_0\left(1 - \dfrac{\eta}{100\%}\right)$ вытеснит объем $V = \dfrac{m}{\rho_в}$, а образовавшаяся при таянии льда массой $\dfrac{\eta m_0}{100\%}$ вода займет объем $V' = \dfrac{\eta m_0}{100\% \cdot \rho_в}$. Обозначив через $V_в$ начальный объем воды в кастрюле, имеем: $Sh_0 = V_в + V_0$, $Sh = V_в + V + V'$. Из записанных равенств находим $h = h_0 - \dfrac{m_0}{S} \cdot \dfrac{(\rho_в - \rho_л)}{\rho_в \rho_л}$ Для определения начальной массы льда m_0 воспользуемся уравнением теплового баланса: $Q = \dfrac{\eta}{100\%} m_0 \lambda$, откуда $m_0 = \dfrac{100\%}{\eta} \cdot \dfrac{Q}{\lambda}$. Ответ: $h = h_0 - \dfrac{100\%}{\eta} \cdot \dfrac{Q(\rho_в - \rho_л)}{S \lambda \rho_в \rho_л} \approx 19$ см.

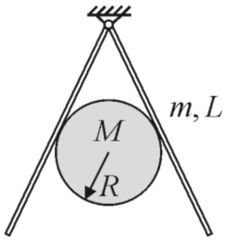
Задача 3. Условие. При выполнении лабораторной работы по физике ученик получил от учителя три резистора. При этом он обнаружил, что заводская маркировка на резисторах стерлась, и установить по ней значения сопротивлений резисторов невозможно. По указанию учителя ученик собрал цепь, схема которой изображена на рисунке, и подключил к точкам A и B источник постоянного тока. Затем он измерил силу тока I_1, протекающего по резистору R_1, и напряжение U_2 на резисторе R_2. Оказалось, что $I_1 = 1{,}6$ А, а $U_2 = 2$ В. Узнав от учителя, что сопротивление R_3 в $n = 3$ раза больше сопротивления R_2, ученик смог по этим данным рассчитать значение сопротивления R_3. Какой ответ получил ученик?



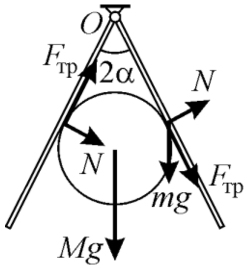
Задача 3. Решение. Обозначим токи, текущие в ветвях схемы, как показано на рисунке. Тогда справедлива следующая система уравнений: $I_1 = I_2 + I_3$, $U_2 = I_2 R_2$, $U_2 = I_3 R_3$, $R_3 = nR_2$. Разрешая ее относительно R_3, получаем ответ: $R_3 = (n+1)\dfrac{U_2}{I_1} = 5$ Ом.



Задача 4. Условие. Изучив в школе законы равновесия твердых тел, ученик решил проверить эти законы на опыте. Для этой цели он раздобыл две одинаковые тонкие шероховатые дощечки длиной L и массой m каждая, а также отрезок шероховатой круглой палки радиусом R и массой M. С помощью дверной петли он соединил концы дощечек и подвесил их к опоре, как показано на рисунке. Затем он отклонил дощечки от вертикали и поместил между ними палку, добившись того, чтобы она касалась дощечек точно в их центрах. Отпустив дощечки и палку, ученик убедился в том, что все тела остались в равновесии. При каком значении коэффициента трения между палкой и дощечками это возможно?



Задача 4. Решение. Цилиндр и доски находятся в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где Mg и mg – модули сил тяжести, действующих на цилиндр и на каждую из досок, N – модуль нормальной составляющей силы взаимодействия каждой из досок и цилиндра, $F_{\text{тр}}$ – модуль силы трения покоя между цилиндром и каждой из досок. Силы реакции оси, на которой подвешены доски, на рисунке не показаны. Для облегчения анализа рисунка в левой его части изображены силы, действующие только на цилиндр, а в правой – только на правую доску. Уравнение моментов сил, действующих на одну из досок, записанное относительно точки O, имеет вид:



$$mg\frac{L}{2}\sin\alpha = N\frac{L}{2}.$$

Цилиндр находится в равновесии при выполнении условия:

$$Mg + 2N\sin\alpha = 2F_{\text{тр}}\cos\alpha.$$

Из записанных уравнений находим, что

$$N = mg\sin\alpha, \quad F_{\text{тр}} = \frac{Mg + 2mg\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}.$$

Сила трения покоя удовлетворяет неравенству: $F_{\text{тр}} \le \mu N$. Следовательно, система будет находиться в равновесии при условии, что $\mu \ge \frac{F_{\text{тр}}}{N}$. Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}}$, $\cos\alpha = \frac{L/2}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}}$, получаем ответ: $\mu \ge \frac{(L^2 + 4R^2)M}{4mRL} + \frac{2R}{L}$.

Задача 5. Условие. Знойным летом школьник Вася захотел помочь родителям уберечь урожай на дачном участке от засухи. Для этой цели он решил использовать электрический насос, установленный в колодце и подающий воду наверх с помощью шланга. Желая узнать перед началом работы, какова мощность насоса, Вася измерил время τ, за которое насос наполняет водой ведро объемом V, стоящее на поверхности земли. Затем, зная глубину h, на которой установлен насос, площадь поперечного сечения шланга S и плотность воды ρ, Вася легко рассчитал искомую мощность насоса. Какой результат получил дотошный школьник?

Задача 5. Решение. Пусть v – скорость воды в шланге. Через любое поперечное сечение шланга за время Δt перемещается вода массой $\Delta m = \rho S v \Delta t$. Работа, совершаемая насосом за это время по перемещению воды массой Δm, равна приращению кинетической и потенциальной энергии этого количества воды: $\Delta A = \frac{\Delta m v^2}{2} + \Delta m\, gh = \rho\left(gh + \frac{v^2}{2}\right) S v \Delta t$. По условию $V = S v \tau$, откуда $v = \frac{V}{S\tau}$.

Объединяя записанные выражения и учитывая, что $N = \frac{\Delta A}{\Delta t}$, получаем ответ: $N = \frac{\rho V}{\tau}\left(gh + \frac{V^2}{2S^2\tau^2}\right)$.

Задача 6. Условие. В цилиндрический сосуд, содержащий воздух, налили небольшое количество воды и закрыли сверху подвижным поршнем. Через некоторое время водяной пар в цилиндре стал насыщенным, причем его масса оказалась равной массе воды. Поддерживая температуру сосуда постоянной, объем под поршнем уменьшили в $k = 2$ раза, в результате чего давление смеси в сосуде увеличилось в $n = 1{,}5$ раза. Затем, вернув поршень в исходное положение, объем смеси стали увеличивать при той же постоянной температуре. Во сколько раз изменится давление смеси по отношению к первоначальному давлению в тот момент, когда вода в сосуде полностью испарится?

Задача 6. Решение. Поскольку плотность насыщенного водяного пара при комнатной температуре примерно на 5 порядков меньше плотности воды, а масса воды в начальном состоянии равна массе пара, объемом воды в сосуде можно пренебречь. Обозначим давление насыщенного пара через $p_{н}$, а парциальное давление воздуха – через $xp_{н}$. В соответствии с законом Дальтона начальное давление смеси равно $p_0 = (1 + x)p_{н}$. После изотермического уменьшения объема смеси в k раз пар останется насыщенным (то есть его парциальное давление не изменится), парциальное давление воздуха увеличится в k раз, а давление смеси возрастет в n раз:

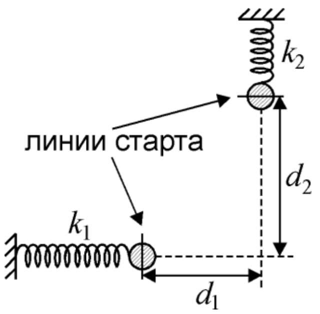
$$np_0 = (1 + kx)p_{н} = n(1 + x)p_{н}.$$

Отсюда $x = \dfrac{n-1}{k-n} = 1$, то есть начальное давление смеси равно $p_0 = \dfrac{k-1}{k-n}p_{н} = 2\,p_{н}$. Так как масса воды в начальном состоянии равна массе пара, то при изотермическом увеличении объема смеси в два раза вся вода испарится. При этом парциальное давление воздуха уменьшится в 2 раза, и конечное давление под поршнем станет равным

$$p_{к} = p_{н} + \frac{1}{2}x\,p_{н} = \frac{2k-n-1}{2(k-n)}p_{н} = 1{,}5p_{н}.$$

Следовательно, $\dfrac{p_{к}}{p_0} = \dfrac{2k-n-1}{2(k-1)} = 0{,}75$, то есть давление смеси уменьшится в 4/3 раз.

Задача 7. Условие. Легкую пружину разрезают на две части, отношение длин которых $n = 144/25$. Полученные пружины располагают на горизонтальном гладком столе перпендикулярно друг другу, закрепив их концы на неподвижных опорах, как показано на рисунке. К свободным концам пружин вплотную приближают одинаковые плоские фишки в виде дисков радиусами r. На столе проводят линии старта фишек, проходящие через их центры перпендикулярно осям пружин. Затем, перемещая фишки вдоль осей пружин, сжимают пружины на одинаковую величину и отпускают фишки так, что их центры пересекают линии старта одновременно. При каких значениях радиуса r фишек они будут скользить по столу, не сталкиваясь друг с другом? Расстояния от линий старта до точки пересечения траекторий фишек равны соответственно $d_1 = 13$ см и $d_2 = 26$ см.



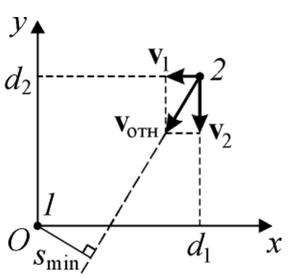
Задача 7. Решение. Пусть длины пружин равны, соответственно, $l_1 = l$ и $l_2 = l/n$. Тогда жесткости пружин связаны соотношением $k_1 = k$ и $k_2 = nk$. Так как массы фишек m и начальные деформации пружин Δl по условию одинаковы, то из закона сохранения энергии $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{k(\Delta l)^2}{2}$ следует, что скорости фишек после взаимодействия с пружинами будут $v_1 = v$ и $v_2 = \sqrt{n}\,v$. Таким образом, фишки одновременно начинают равномерное движение со скоростями v_1 и v_2, направленными перпендикулярно друг другу. Найдем минимальное расстояние между центрами фишек при таком движении. Рассмотрим два способа решения.

Первый способ. Спустя время t после начала движения квадрат расстояния между центрами фишек равен

$$s^2 = (d_1 - v_1 t)^2 + (d_2 - v_2 t)^2 = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(d_1 v_1 + d_2 v_2)t + d_1^2 + d_2^2 = at^2 - 2bt + c\,,$$

где $a = v_1^2 + v_2^2$, $b = d_1 v_1 + d_2 v_2$, $c = d_1^2 + d_2^2$. Минимум этой квадратичной функции времени достигается при $t_0 = \dfrac{b}{a}$ и составляет величину $s_{\min}^2 = c - \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{(d_1 v_2 - d_2 v_1)^2}{v_1^2 + v_1^2}$. Учитывая полученное выше соотношение между скоростями v_1 и v_2, получаем окончательно: $s_{\min} = \dfrac{|\,d_1\sqrt{n} - d_2\,|}{\sqrt{n+1}}$

Второй способ. Перейдем в систему отсчета, движущуюся поступательно вместе с фишкой *1*. В этой системе отсчета фишка *1* неподвижна, а фишка *2* движется со скоростью $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ вдоль прямой, описываемой уравнением $(y - d_2) = \dfrac{v_2}{v_1}(x - d_1)$, или $y - \dfrac{v_2}{v_1}x + (d_1 - d_2) = 0$. Запишем последнее уравнение в виде $Ax + By + C = 0$, где $A = 1$, $B = -\dfrac{v_2}{v_1}$, $C = d_1 - d_2$, и воспользуемся формулой, для определения расстояния между этой прямой и точкой с координатами (x_0, y_0): $s_{\min} = \dfrac{|\,Ax_0 + By_0 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Полагая $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, после несложных преобразований получаем, как и ранее, что $s_{\min} = \dfrac{|\,d_1\sqrt{n} - d_2\,|}{\sqrt{n+1}}$.



Для того чтобы фишки не столкнулись друг с другом, минимальное расстояние между ними должно превышать $2r$. Отсюда получаем ответ: $r < \dfrac{|\,d_1\sqrt{n} - d_2\,|}{2\sqrt{n+1}} = 1$ см.

Задача 8. Условие. На столе покоится вертикально расположенный цилиндрический сосуд. В сосуде под тяжелым подвижным поршнем находится гелий. Сверху на поршень очень медленно опустили груз массой m. Насколько изменилась при этом внутренняя энергия гелия? Теплообменом гелия с окружающей средой можно пренебречь. Масса груза мала по сравнению с массой поршня. Начальная высота H поршня над дном сосуда известна.

Задача 8. Решение. Изменение внутренней энергии гелия (идеального одноатомного газа) равно $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$, где ν – количество молей гелия, R – универсальная газовая постоянная. Уравнения Менделеева– Клапейрона для начального и конечного состояний гелия имеют вид: $pV = \nu RT$, $(p+\Delta p)(V-\Delta V) = \nu R(T+\Delta T)$. Здесь p, V и T – начальные давление, объем и температура газа; Δp, ΔV и ΔT – их приращения. Пренебрегая произведением малых величин $\Delta p\Delta V$, из этих уравнений находим, что $\nu R\Delta T = V\Delta p - p\Delta V$. Поскольку гелий теплоизолирован, из первого закона термодинамики следует, что $p\Delta V = \Delta U$. Условия равновесия поршня массой M в начальном и конечном состояниях имеют вид: $pS = Mg + p_0 S$, $(p+\Delta p)S = (M+m)g + p_0 S$, где S – площадь поршня, p_0 – атмосферное давление. Отсюда $\Delta p = \frac{mg}{S} = \frac{mgH}{V}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $\Delta U = \frac{3}{5}mgH$.

Задача 9. Условие. Два одинаковых металлических шара расположены на достаточно большом расстоянии друг от друга и несут заряды $Q_1 = 8$ мкКл и $Q_2 = 3$ мкКл. Экспериментатор имеет в своем распоряжении незаряженный металлический шарик, закрепленный на длинной изолирующей ручке. Держа незаряженный шарик за ручку, экспериментатор поочередно коснулся им сначала первого, а затем второго заряженных шаров. После этого он измерил заряд q_2, накопившийся на изначально незаряженном шарике. Какой заряд остался на втором шаре, если известно, что $q_2 = 0{,}5$ мкКл?

Задача 9. Решение. Ключевым моментом в условии этой задачи является тот факт, что шары одинаковые. Отсюда следует, что при поочередном соприкосновении пробного шарика с каждым из шаров образуются тождественные друг другу системы проводников. Поэтому отношения заряда шара к заряду пробного шарика в обоих случаях должны быть одними и теми же. Если исходить из этого, то провести дальнейшие расчеты не составит труда. Пусть при соприкосновении пробного шарика с первым шаром на него с шара перетек заряд q_1, а на шаре остался заряд $Q_1 - q_1$. Тогда справедливо равенство:

$$\frac{Q_1 - q_1}{q_1} = \frac{Q_{2к}}{q_2},$$

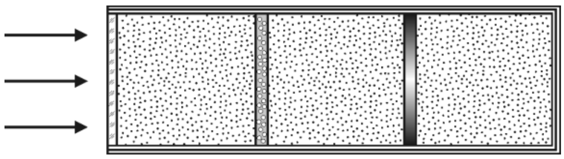
где $Q_{2к}$ – заряд, оставшийся на втором шаре. Из закона сохранения электрического заряда, примененного к процессу соприкосновения пробного шарика со вторым шаром, следует, что $Q_2 + q_1 = Q_{2к} + q_2$. Исключая из записанных уравнений $Q_{2к}$, получим квадратное уравнение относительно неизвестной величины q_1:

$$q_1^2 + Q_2 q_1 - Q_1 q_2 = 0.$$

Решая его, найдем, что $q_1 = \dfrac{-Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 4Q_1 q_2}}{2}$. Следовательно,

$$Q_{2к} = Q_2 + q_1 - q_2 = \frac{Q_2 - 2q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 4Q_1 q_2}}{2} = 3{,}5 \text{ мкКл}.$$

Задача 10. Условие. Герметично закрытый цилиндрический сосуд, одна из торцевых стенок



которого является прозрачной, разделен на три отсека неподвижной пористой перегородкой и подвижным поршнем, способным перемещаться без трения. В начальном равновесном состоянии объемы всех трех отсеков равны и в каждом из них находится одно и то же количество идеального одноатомного газа. Через прозрачный торец левый отсек сосуда начинают облучать лазерным излучением, которое переводит часть атомов, содержащихся в этом отсеке, в возбужденное состояние. Возбужденные атомы в последующем могут излучать кванты и вновь переходить в основное состояние. Спустя некоторое время после начала облучения газ приходит к новому равновесному состоянию, в котором относительная доля возбужденных атомов в облучаемом отсеке составляет q $(0<q<1)$. Поскольку пористая перегородка проницаема для невозбужденных атомов и непроницаема для возбужденных, давление газа в отсеках изменяется и поршень занимает новое положение. Найдите отношение x нового объема среднего отсека к его первоначальному значению, если температура газа поддерживается постоянной.

Задача 10. Решение. Обозначим через V объем каждого из трех отсеков сосуда до включения лазера, а через N – число атомов в каждом из них. Пусть N_1 – равновесное число атомов левом отсеке после включения лазера, а V_1 – новый объем среднего отсека. В результате действия лазерного излучения в левом отсеке будут находиться два различных идеальных газа: газ из $N_1 q$ возбужденных атомов и газ из $N_1(1-q)$ невозбужденных атомов. Поскольку перегородка проницаема для невозбужденных атомов, их концентрация в новом равновесном состоянии будет одинаковой с обеих сторон от перегородки, т.е. $\frac{N_1(1-q)}{V}=\frac{2N-N_1}{V_1}$. Учитывая, что давление p идеального газа связано с концентрацией атомов n уравнением $p=nkT$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, условие механического равновесия поршня в новом состоянии можно записать в виде: $\frac{2N-N_1}{V_1}=\frac{N}{2V-V_1}$. Введем обозначения $x=\frac{V_1}{V}$ и $y=\frac{N_1}{N}$. Тогда записанные выше уравнения примут вид: $x=\frac{2-y}{y(1-q)}$, $y=\frac{4-3x}{2-x}$. Исключая из этих уравнений y, находим искомое отношение объемов: $x=\frac{3-4q}{3(1-q)}$. Видно, что при $q>\frac{3}{4}$ ответ теряет физический смысл. Это означает, что при больших значениях q в среднем отсеке останется так мало атомов, что создаваемое ими давление будет недостаточным для того, чтобы уравновесить давление газа в правом отсеке. В результате поршень сместится до самой перегородки.

Ответ: $x=\frac{3-4q}{3(1-q)}$ при $q\le\frac{3}{4}$; $x=0$ при $q>\frac{3}{4}$.