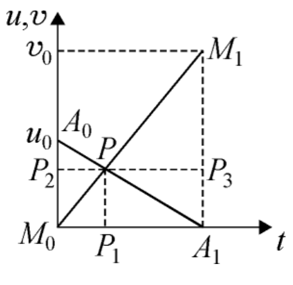
1. Султан обещал Алладину заплатить 100 золотых монет за ковер-самолет. Алладин доставил Султану диковинку и получил от него в качестве оплаты керамический кувшин с золотыми монетами общей массой, равной массе ста монет. Заподозрив обман, Алладин тем не менее не осмелился публично усомниться в честности Султана. Вместо этого он попросил у Султана глубокое блюдо, чан до краев наполненный водой, и одну золотую монету. Поставив чан на блюдо, Алладин опустил в него монету и попросил у Султана стаканчик, объем которого равен объему вылившейся в блюдо воды. Потом Алладин погрузил в чан кувшин с монетами. Обнаружив, что при этом на блюдо вылилось 273 стаканчика воды, Алладин сообщил Султану, сколько монет не хватает в кувшине до обещанного вознаграждения. Пораженный Султан приказал выдать Алладину в награду второй такой же кувшин с монетами. Сколько монет в итоге досталось сообразительному Алладину?
Для справки. Плотность золота 19,3 г/см^3, плотность керамики 2 г/см^3.

1. Решение. Пусть M – масса пустого кувшина, m – масса одной монеты, x – число недостающих монет. Тогда справедливо равенство $100m = M + (100 - x)\cdot m$, откуда $M = xm$. Учитывая соотношение между массой, объемом и плотностью тел, получаем $\rho_к V = x\rho_з v$, где $\rho_з$ и v – плотность золота и объем монеты, а $\rho_к$ и V – плотность керамики и объем кувшина. При погружении одной монеты в чан, заполненный водой, на блюдо вылилась воды объемом, равным объему одной монеты v. При погружении в чан кувшина с монетами на блюдо вылилась вода объемом, равным сумме объема кувшина и объема всех монет, лежащих в кувшине, что в пересчете на стаканчики объемом, равным объему одной монеты, составляет nv, где $n = 273$. Имеем $nv = V + (100 - x)v$. Объединяя записанные выражения, находим, что $x = \dfrac{(n-100)\rho_к}{\rho_з - \rho_к} = \dfrac{(273-100)\cdot 2000}{19300-200} = 20$. Таким образом, в кувшине не хватало $x = 20$ монет. Алладин получил от Султана $2\cdot(100 - x) = 160$ монет.
Ответ: 160.

2. По прямой дороге равнозамедленно двигался автомобиль. В момент времени, когда автомобиль проезжал мимо пункта C, его скорость была равна $u_0 = 30$ км/ч. В этот же момент из пункта C выехал мотоциклист, который двигался с постоянным ускорением в ту же сторону, что и автомобиль. К тому моменту, когда скорости автомобиля и мотоцикла сравнялись, расстояние от автомобиля до пункта C превышало расстояние от мотоцикла от пункта C на $s = 100$ м. Автомобиль остановился на расстоянии $3s$ от пункта C. Какова была скорость мотоцикла v_0 в момент остановки автомобиля? Какое расстояние S проехал мотоцикл к моменту остановки автомобиля?

2. Решение. Наиболее просто решить задачу, используя графический способ. На рисунке



изображены графики зависимости от времени скорости автомобиля u (прямая A_0A_1) и мотоцикла v (прямая M_0M_1). Точка P пересечения этих прямых соответствует моменту, когда скорости автомобиля и мотоцикла сравнялись и расстояние между ними было равно s. Площадь трапеции $A_0PP_1M_0$ равна перемещению автомобиля за время, прошедшее от начала отсчета до этого момента, а площадь треугольника M_0PP_1 – перемещению мотоцикла за это же время. Разность этих перемещений, т.е. площадь треугольника A_0PM_0, по условию равна s. Площадь треугольника $A_0A_1M_0$ (расстояние, пройденное автомобилем до остановки) по условию равна $3s$. Следовательно, высоты треугольников A_0PM_0 и $A_0A_1M_0$ (длины отрезков P_2P и M_0A_1) относятся как 1:3, а длины отрезков P_2P и PP_3 относятся как 1:2. Поскольку отрезки P_2P и PP_3 являются высотами подобных треугольников A_0PM_0 и

A_1PM_1, длины отрезков A_0M_0 и A_1M_1 также относятся как 1:2, а площади этих треугольников относятся, как 1:4. Поэтому $v_0 = 2u_0$, а площади треугольников PM_1A_1 и PA_1M_0 равны соответственно $4s$ и $2s$.Отсюда находим, что площадь треугольника $M_0M_1A_1$ равна $6s$. Таким образом, перемещение мотоцикла за время, прошедшее до остановки автомобиля, $S = 6s$.
Ответ: $v_0 = 2u_0 = 60$ км/ч; $S = 6s = 600$ м.

3. В основу системы отсчета времени на Земле сейчас положено так называемое всемирное координированное время (UTC), которое является современной версией среднего времени по Гринвичу, то есть среднего солнечного времени на Гринвичском меридиане. Поверхность Земли условно поделена на 24 часовых пояса. Местное время в часовом поясе, через который проходит Гринвичский меридиан, совпадает с UTC; этот часовой пояс обозначается UTC+0. При переходе из одного часового пояса в другой значения минут и секунд сохраняются, скачком изменяется лишь значение часов. Часовые пояса вокруг земного шара имеют как положительное (к востоку), так и отрицательное (к западу) смещение от UTC.

Проведем мысленно следующую игру. Подберем 194 176 участников и расположим их на линии экватора на одинаковом расстоянии друг от друга. Первого участника поместим в некоторой точке *А* в самом восточном часовом поясе (UTC+12) – именно здесь раньше всего на Земле наступает новый календарный день. Для последнего участника отведем место в точке *Б*, лежащей в самом западном часовом поясе (UTC–12). Пусть при этом кратчайшее расстояние от точки *А* до точки *Б* по линии экватора составляет 2 015 238,24 м. Ровно в 00 часов 00 минут 00 секунд 1 января 2012 года первый участник стреляет из хлопушки и тем самым передает сигнал о наступлении Нового года следующему участнику. Так, по цепочке, сигнал передается с востока на запад по линии экватора из точки *А* в точку *Б*. При этом каждый участник, хоть и готов к приему сигнала, но, замешкавшись, запаздывает при подаче очередного сигнала на 0,5 с.

Определите, на сколько минут при таком способе оповещения о начале праздника последний участник игры запоздает с празднованием Нового года.
Для справки. Длина экватора 40 075,676 км. Скорость распространения звука в воздухе при температуре 30°С равна 1 245,24 км/ч.

3. Решение. Разделив длину экватора 40 075 676 м на 24, найдем, что ширина часового пояса на экваторе равна 1 669 819,833 м. Для того чтобы две точки лежали в соседних часовых поясах расстояние между ними должно находиться в интервале от $1\,669\,820$ м до $3\,339\,639{,}667$ м. Заданное в условии кратчайшее расстояние между точками *А* и *Б* находится именно в этом интервале, следовательно, точки *А* и *Б* лежат в соседних часовых поясах, т.е. Новый год в точке *Б* наступает на 24 часа позже, чем в точке *А*.

Так как точка *Б* находится восточнее точки *А*, а по условию задачи сигнал о наступлении Нового года передается с востока на запад, то расстояние, на которое потребуется его передать, $L = 40\,075\,676 - 2\,015\,238{,}24 = 38\,060\,437{,}76$ м. Следовательно, каждый из N = 194176 участников игры передает сигнал на расстояние $\ell = \dfrac{L}{N} = 196{,}01$ м. В единицах СИ заданная скорость звука равна $v = 345{,}9$ м/с. Время распространения звука на расстояние ℓ равно $t = \dfrac{\ell}{v}$; время задержки сигнала t_0. Следовательно, время передачи сигнала от одного человека к другому равно $T_1 = \dfrac{\ell}{v} + t_0 = \dfrac{L}{N \cdot v} + t_0$. До точки *Б* сигнал потребуется передать $(N-1)$ раз. Таким образом, время передачи сигнала от точки *А* до точки *Б* равно $T_Б = \left(\dfrac{L}{N \cdot v} + t_0\right)(N-1)$ = 207120 с = 3452 мин.

В точке *Б* Новый год наступает через $T_{24} = 24$ часа = 1440 мин. после первого выстрела из хлопушки, а время, через которое участник, находящийся в этой точке примет сигнал, $T_Б = 3452$ мин. Значит, искомое время, на которое запоздает с началом празднования участник, находящийся в точке *Б*, равно

$$\Delta T = T_Б - T_{24} = \left(\frac{\ell}{v} + t_0\right)(N-1) - T_{24} = \left(\frac{215{,}4}{345{,}9} + 0{,}5\right)(84481-1) - 24 \cdot 3600 = 120720\ \text{с} = 2012\ \text{мин.}$$

Ответ: 2012.

4. Выполняя лабораторную работу, ученик 8-го класса соединил последовательно два выданных ему резистора и погрузил их в масло, налитое в калориметр. Затем он подключил к резисторам источник, установив на его выходе напряжение *U*. Через время $\Delta t_1 = 4{,}5$ мин. он обнаружил, что температура масла увеличилась на ΔT градусов. После этого он извлёк из калориметра резисторы, соединил их параллельно и, остудив резисторы до комнатной температуры, погрузил их в масло во втором калориметре, точно таком же, как первый. Зная, что калориметры содержали одинаковое количество одного и того же масла, имевшего до нагревания комнатную температуру, и температура масла во втором калориметре после создания на концах резисторов напряжения *U* увеличилась на ΔT градусов через время $\Delta t_2 = 1$ мин., определите, во сколько раз *k* отличаются сопротивления резисторов.

4. Решение. Пусть сопротивления резисторов равны R_1 и R_2. Введем обозначения $k = \dfrac{R_1}{R_2}$, $n = \dfrac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$. Сопротивление резисторов при их последовательном соединении равно $R_{посл} = R_1 + R_2 = (k+1)R_2$, а при параллельном соединении – $R_{пар} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{kR_2}{k+1}$. По закону Джоуля – Ленца выделенные на резисторах количества теплоты равны, соответственно $Q_{посл} = \dfrac{U^2}{R_{посл}}\Delta t_1$, $Q_{пар} = \dfrac{U^2}{R_{пар}}\Delta t_2$. Пусть *C* – суммарная теплоемкость масла и резисторов. Из уравнения теплового баланса $C\Delta T = Q$ следует, что $Q_{посл} = Q_{пар}$, или $\dfrac{\Delta t_1}{R_{посл}} = \dfrac{\Delta t_2}{R_{пар}}$ Используя введенные выше обозначения, получаем квадратное уравнение $k^2 - (n-2)k + 1 = 0$, корни которого $k_{1,2} = \dfrac{n}{2} - 1 \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{n^2 - 4n}$. Подставляя значение $n = 4{,}5$, получаем $k_1 = 2$, $k_2 = \dfrac{1}{2}$.

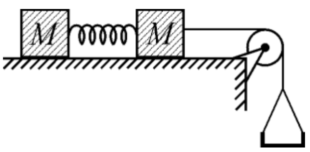
Ответ: $k_1 = \dfrac{n}{2} - 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{n^2 - 4n} = 2$, $k_2 = \dfrac{n}{2} - 1 - \dfrac{1}{2}\sqrt{n^2 - 4n} = \dfrac{1}{2}$, где $n = \dfrac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 4{,}5$.
Сопротивления резисторов отличаются в 2 раза.

5. Передний бампер полноприводного легкового автомобиля движущегося со скоростью $v = 60$ км/ч по прямолинейному участку горизонтального шоссе, в некоторый момент времени t_1 поравнялся с задним бампером прицепа грузовика, движущегося со скоростью $u = 40$ км/ч в том же направлении по параллельной полосе. Длина легкового автомобиля $l = 5$ м, а грузовика с прицепом $L = 20$ м. Определите минимальное время, за которое легковой автомобиль сможет обогнать грузовик с прицепом, если он с момента t_1 начнёт двигаться с максимально возможным постоянным ускорением. Коэффициент трения колёс автомобиля о дорогу $\mu = 0{,}8$. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

5. Решение. Пренебрегая действием воздуха и силами трения качения, получаем, что модуль максимального ускорения автомобиля со всеми ведущими колёсами на горизонтальном участке дороги равен $a = \mu g$, где g – модуль ускорения свободного падения. Обгон закончится, когда задний бампер легкового автомобиля поравняется с передним бампером грузовика. В системе отсчета, связанной с грузовиком, легковой автомобиль за время обгона должен переместиться на расстояние $L + l$, а его скорость в момент начала обгона равна $v - u$. Обозначив через τ искомое время обгона, имеем $(v - u)\tau + \frac{a\tau^2}{2} = L + l$.Учитывая, что $a = \mu g$, получаем квадратное уравнение $\tau^2 - \frac{2(u - v)}{\mu g} - \frac{2(L + l)}{\mu g} = 0$. Условию задачи удовлетворяет положительный корень $\tau = \frac{u - v + \sqrt{(v - u)^2 + 2\mu g(L + l)}}{\mu g} \approx 1{,}9$ с.

Ответ: $\tau = \frac{u - v + \sqrt{(v - u)^2 + 2\mu g(L + l)}}{\mu g} \approx 1{,}9$ с.

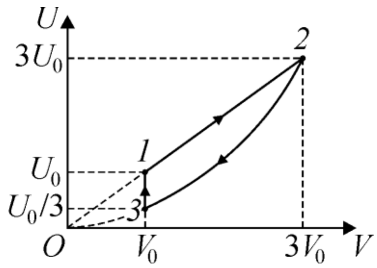
6. На горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика, связанных пружинкой (см. рисунок). Масса каждого кубика M = 200 г. Правый кубик соединен с легкой чашей нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения между кубиками и столом μ = 0,1. В исходном состоянии пружина не деформирована. Грузик какой минимальной массы m нужно осторожно (без толчка) положить на чашу, чтобы левый кубик сдвинулся с места? Нить, пружину и блок считайте невесомыми.



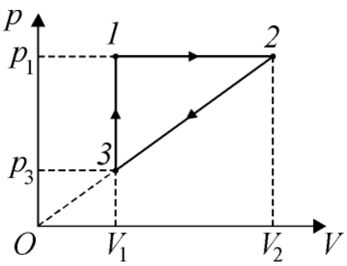
6. Решение. Левый кубик сдвинется с места, когда сила упругости растянутой пружины станет равной по модулю максимальному значению силы трения покоя, удерживающей его на месте, т.е. при условии, что $kx = \mu Mg$, где k – коэффициент жесткости пружины, x – ее растяжение. До тех пор, пока левый кубик остается неподвижным, растяжение пружины совпадает с модулем перемещения правого кубика и чаши. Масса m грузика, лежащего на чаше, минимальна, если левый кубик начнет сдвигаться в момент, когда правый кубик остановится. В этом случае изменение потенциальной энергии грузика mgx расходуется только на работу против сил трения при движение правого кубика и потенциальную энергию деформации пружины. Имеем $mgx = \mu Mgx + \frac{kx^2}{2}$. Учитывая, что жесткость пружины может быть выражена через x как $k = \frac{\mu Mg}{x}$, в итоге получаем величину минимальной массы $m = \frac{3}{2}\mu M = 30$ г.

Ответ: $m = \frac{3}{2}\mu M = 30$ г.

7. Некоторое количество идеального одноатомного газа участвует в циклическом процессе. При этом внутренняя энергия газа U меняется так, как показано на рисунке. Участок $2-3$ – часть параболы. Определите работу газа за один цикл процесса. Исходное значение внутренней энергии газа равно U_0 = 90 кДж.



7. Решение. Внутренняя энергия идеального одноатомного газа $U=\dfrac{3}{2}\nu RT$



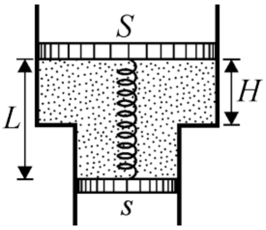
пропорциональна его абсолютной температуре T, где ν – количество газа, R – универсальная газовая постоянная. Поэтому на участке $2-3$, представляющем собой отрезок параболы, $T\sim V^2$. Из уравнения состояния идеального газа $pV=\nu RT$ следует, что на этом участке $p\sim V$. Поскольку участок $1-2$ – изобара, участок $3-1$ – изохора, pV–диаграмма процесса представляет собой треугольник (см. рисунок). Работу газа найдём, вычислив площадь этого треугольника:

$$A=\frac{1}{2}(p_1-p_3)(V_2-V_1)=\frac{1}{2}(p_1V_2-p_3V_2-p_1V_1+p_3V_1)\,.$$

Учитывая, что внутреннюю энергию идеального одноатомного газа можно представить как $U=\dfrac{3}{2}pV$, а также то, что точки 2 и 3 лежат на прямой проходящей через начало координат, перепишем выражение для работы газа в виде $A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(U_2-\dfrac{V_2}{V_1}U_3-U_1+U_3\right)$. Используя данные из рисунка задачи, получаем, что $A=\dfrac{1}{3}\left[3U_0-U_0-\dfrac{2}{3}U_0\right]=\dfrac{4}{9}U_0=40$ кДж.

Ответ: $A=\dfrac{4}{9}U_0=40$ кДж.

8. В открытой с обоих концов гладкой трубе переменного сечения, расположенной вертикально, находятся два тяжёлых поршня, соединённые пружиной жёсткостью k (см. рисунок). Между поршнями находится гелий. Площадь поперечного сечения верхнего поршня равна S, а малого – s. Абсолютная температура окружающего воздуха и гелия равна T_0. Длина растянутой пружины равна L, а верхний поршень находится на высоте H над ступенькой в трубе. Определите изменение температуры гелия, при котором верхний поршень опустится на расстояние $h<H$ при неизменном атмосферном давлении.

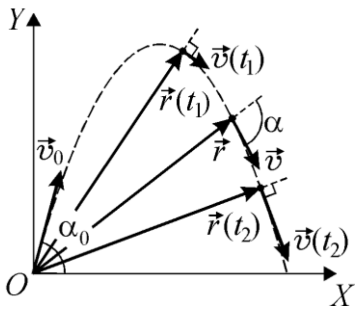


8. Решение. Пусть $p_а$ – атмосферное давление; $m_в$ – масса верхнего поршня; $m_н$ – масса нижнего поршня; $m_{пр}$ – масса пружины; $F_в$ – модуль силы, действующей со стороны пружины на верхний поршень; $F_н$ – модуль силы, действующей со стороны пружины на нижний поршень; g – модуль ускорения свободного падения. Массой гелия можно пренебречь, поэтому следует считать, что при равновесии давление p гелия во всех точках внутри трубы одинаково. Условия равновесия верхнего и нижнего поршней, а также пружины имеют вид: $m_вg+(p_а-p)S+F_в=0$, $m_нg+(p-p_а)s+F_н=0$, $m_{пр}g+F_н-F_в=0$. Из этих равенств находим $p=\dfrac{(m_в+m_н+m_{пр})g}{S-s}+p_а$. Таким образом, давление гелия остается постоянным. При охлаждении гелия длина пружины не изменяется, и процесс охлаждения является изобарным. По закону Гей-Люссака $\frac{HS+(L-H)s}{T_0}=\frac{(H-h)S+(L-H+h)s}{T}$, где T_0 – начальная температура гелия, $T=T_0-\Delta T$ – его конечная температура. Отсюда $\Delta T=\frac{(S-s)\,hT_0}{HS-(L-H)s}$.

Ответ: $\Delta T=\frac{(S-s)\,hT_0}{HS-(L-H)s}$.

9. Маленькое тело бросили под некоторым углом к горизонту и одновременно включили секундомер и датчик расстояния, расположенный в точке бросания. Измерения показали, что вначале расстояние от датчика до тела увеличивалось, затем, в промежутке времени от t_1 до t_2 уменьшалось, а потом вновь увеличивалось. С какой начальной скоростью v_0 было брошено тело? До какой максимальной высоты H оно поднялось? Сколько времени τ длился полет тела, если точка его падения находилась на одном уровне с точкой бросания? При каких углах α_0 бросания тела возможна ситуация, описанная в условии? Ускорение свободного падения равно g. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

9. Решение. Если в некотором промежутке времени расстояние от тела до точки бросания уменьшается, то в этом промежутке проекция вектора скорости тела на направление его радиус-вектора отрицательна, т.е. угол α между вектором скорости и радиус-вектором тела превышает 90º (см. рисунок). При этом в моменты времени t_1 и t_2 вектор скорости перпендикулярен радиус-вектору и $\alpha=90°$. Следовательно, скалярное произведение этих векторов в промежутке времени от t_1 до t_2 должно удовлетворять неравенству $(\vec{v},\vec{r})=\left(\vec{v}_0+\vec{g}t,\ \vec{v}_0t+\frac{\vec{g}t^2}{2}\right)\le 0$. Раскрывая скобки и



учитывая, что $(\vec{v}_0,\vec{v}_0)=v_0^2$, $(\vec{g},\vec{g})=g^2$, $(\vec{v}_0,\vec{g})=-v_0g\sin\alpha_0$, после сокращения на t приходим к неравенству $v_0^2-\frac{3}{2}v_0\sin\alpha_0\,gt+\frac{g^2t^2}{2}\le 0$. Поскольку t_1 и t_2 – корни квадратного уравнения $v_0^2-\frac{3}{2}v_0\sin\alpha_0\,gt+\frac{g^2t^2}{2}=0$, то по теореме Виета имеем $t_1+t_2=\frac{3v_0\sin\alpha_0}{g}$, $t_1\cdot t_2=\frac{2v_0^2}{g^2}$. Из последних равенств находим начальную скорость тела $v_0=g\sqrt{\frac{t_1t_2}{2}}$, максимальную высоту подъема $H=\frac{(v_0\sin\alpha_0)^2}{2g}=\frac{g(t_1+t_2)^2}{18}$ и время полета $\tau=\frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}=\frac{2(t_1+t_2)}{3}$. Для существования корней квадратного уравнения его дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. должно выполняться условие $9\sin^2\alpha_0\ge 8$, или $\alpha_0\ge\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}=\mathrm{arctg}\,2\sqrt{2}$.

Ответ: $v_0=g\sqrt{\frac{t_1t_2}{2}}$, $H=\frac{g(t_1+t_2)^2}{18}$, $\tau=\frac{2(t_1+t_2)}{3}$, $\alpha_0\ge\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}=\mathrm{arctg}\,2\sqrt{2}\approx 70{,}5°$.

10. Самолет совершает ночную посадку в условиях сильного снегопада. На крыльях самолета регулярно вспыхивают проблесковые бортовые огни, дающие две очень короткие вспышки в течение половины секунды с последующей паузой в одну секунду. Пассажир, сидящий у иллюминатора, отчетливо видит, как вспышки света выхватывают из темноты отдельные снежинки около крыла. После посадки пассажир узнал, что во время захода на посадку самолет летел со скоростью 330 км/ч, было безветренно, а интенсивность снегопада была такова, что за час выпал 1 мм осадков. (Это означает, что, если растопить выпавший за час снег, то получится слой воды толщиной 1 мм). Из энциклопедии пассажир выяснил, что снежинки имеют в среднем массу 5 мг и падают вниз со скоростью около 1 км/ч. После этого он без труда оценил длительность отдельной вспышки проблескового огня. Какой результат получил пассажир? Как изменилась бы его оценка, если интенсивность снегопада была бы в 10 раз меньше?

10. Решение. Для того чтобы отдельные снежинки отчетливо выделялись в свете проблескового огня, необходимо, чтобы среднее расстояние между ними было значительно больше видимого смещения снежинки за время ее освещения, т.е. $\bar{l} >> V\tau$, где V – скорость самолета, а τ – время вспышки посадочного огня. Масса снега M, падающего за единицу времени (1 с) на единицу площади земли (1 м^2), выражается через массу снежинки m, скорость ее падения на землю v и количество снежинок в единице объема n следующим образом: $M = nvm$. Количество снежинок в единице объема определяет среднее расстояние между ними: $\bar{l} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. В то же время известно, что при плавлении выпавших осадков за час получается слой толщиной d, что соотвествует массе снега на единицу площади в единицу времени $M = \rho d$, где ρ – плотность воды. Таким образом, из приведенных рассуждений следуют соотношения: $nvm = \rho d$, $\quad V\tau << \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Отсюда $\tau << \frac{1}{V}\sqrt[3]{\frac{mv}{\rho d}}$. Переходя к единицам системы СИ и учитывая, что величина d имеет размерность скорости (мм/час), получаем окончательно

$$\tau << \frac{3{,}6}{330}\sqrt[3]{\frac{5\cdot 10^{-6}\cdot 1\cdot 3{,}6\cdot 10^{3}}{3{,}6\cdot 10^{3}\cdot 1\cdot 10^{-3}}} \approx 0{,}002\,\text{с}.$$

т.е. время одной вспышки лампы не превышает 0,2 мс.

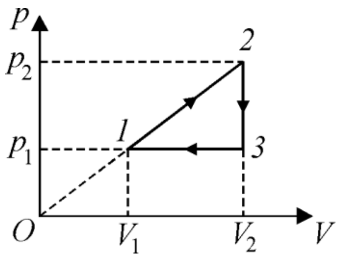
Поскольку скорость выпадения осадков входит в итоговое выражение под корнем третьей степени, то при изменении этого параметра в 10 раз оценка времени вспышки изменится лишь в $\sqrt[3]{10} \approx 2$ раза (при уменьшении интенсивности снегопада в 10 раз оценка увеличится в 2 раза и составит 0,4 мс).

Таким образом, располагая очень приблизительными сведениями о снегопаде и достаточно точной информацией о посадочной скорости самолета (которая известна из справочных данных с погрешностью примерно 20%), можно дать весьма достоверную оценку длительности вспышки бортового огня.

Ответ: $\tau \approx 0{,}2$ мс, $\quad \tau_1 \approx 0{,}4$ мс.

11. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, проводится циклический процесс, состоящий из трех участков. На каждом из этих участков теплоемкость газа постоянна, а график зависимости давления газа от объёма представляет собой отрезок прямой линии. Известно, что на участке, на котором теплоемкость газа максимальна, объем газа уменьшается в k раз. Каков коэффициент полезного действия η этого двигателя?

11. Решение. Определим, в каких процессах теплоемкость газа постоянна, а график зависимости давления газа от объёма представляет собой отрезок прямой линии. Согласно первому закону термодинамики $\Delta Q = \Delta U + A$, где ΔQ – количество теплоты, сообщенное газу, ΔU – изменение его внутренней энергии, $A = p\Delta V$ – совершенная газом работа, p – давление, ΔV – изменение объема газа. Для одного моля идеального одноатомного газа



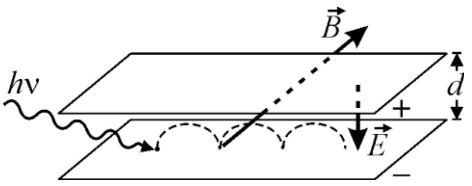
$U = \frac{3}{2}RT = \frac{3}{2}pV$ и $\Delta U = \frac{3}{2}(p\Delta V + V\Delta p)$. Из записанных выражений следует, что $\Delta Q = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p$. С другой стороны, $\Delta Q = C\Delta T$, где C – теплоемкость газа, ΔT – приращение его температуры. Поскольку идеальный газ подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона: $pV = RT$, где R – универсальная газовая постоянная, то $\Delta T = \frac{p\Delta V + V\Delta p}{R}$. Таким образом, справедливо равенство $\frac{C}{R}(p\Delta V + V\Delta p) = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p$, или $\left(C - \frac{5}{2}R\right)p\Delta V = \left(\frac{3}{2}R - C\right)V\Delta p$. Рассмотрим следствия из этого равенства. В частности, в изохорном процессе $\Delta V = 0$ и $C = C_V = \frac{3}{2}R$, а в изобарном процессе $\Delta p = 0$ и $C = C_p = \frac{5}{2}R$. В других процессах с постоянной теплоемкостью $\frac{\Delta p}{p} = \frac{C - 5R/2}{3R/2 - C} \cdot \frac{\Delta V}{V}$, откуда $\ln\left(\frac{p}{p_1}\right) = \frac{2C - 5R}{3R - 2C}\ln\left(\frac{V}{V_1}\right)$, или $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{V}{V_1}\right)^{\frac{2C-5R}{3R-2C}}$, где p_1 и V_1 – давление и объем газа в некотором состоянии. Зависимость давления газа от объема будет линейной, если показатель степени равен единице, т.е. если $C = 2R$. При этом продолжение прямой, отображающей график процесса на pV–диаграмме, будет проходить через начало координат.

По условию pV–диаграмма цикла представляет собой замкнутую ломаную, состоящую из трех отрезков. Как было установлено выше, это могут быть горизонтальные ($p = \text{const}$) и вертикальные ($V = \text{const}$) отрезки, а также отрезки прямых, проходящих через начало координат ($p \sim V$). Учитывая, что из всех рассмотренных процессов максимальной теплоемкостью $C_p = \frac{5}{2}R$ обладает изобарный процесс, и что в этом процессе газ по условию сжимается, приходим к выводу, что pV–диаграмма цикла должна иметь вид, изображенный на рисунке.

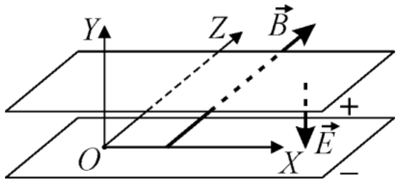
КПД цикла равен отношению работы, совершенной газом, к количеству теплоты, полученному от нагревателя в процессе *1–2*: $\eta = \frac{A}{Q_{12}}$. Имеем: $A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$, $Q_{12} = 2R(T_2 - T_1) = 2(p_2V_2 - p_1V_1)$. Учитывая, что по условию $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1} = k$, после несложных преобразований находим $\eta = \frac{k-1}{4(k+1)}$.

Ответ: $\eta = \frac{k-1}{4(k+1)}$.

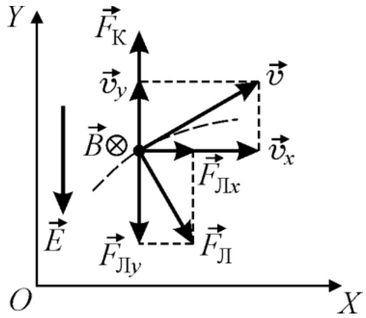
12. В плоском конденсаторе расстояние между пластинами равно d, разность потенциалов между обкладками равна U. Конденсатор находится в однородном магнитном поле с индукцией B, причем вектор $\vec{B}$ параллелен пластинам. На отрицательно заряженную пластину падает квант света с энергией, незначительно превышающей работу выхода. После этого выбитый из пластины фотоэлектрон начинает движение по траектории, в точности совпадающей с траекторией точки на ободе воображаемого колеса, катящегося по отрицательно заряженной пластине без проскальзывания. Чему равны радиус R этого колеса и скорость V его центра? Силу тяжести можно не учитывать, электрическое поле в конденсаторе считайте однородным. Удельный заряд электрона равен γ.



12. Решение. По второму закону Ньютона уравнение движения электрона в пространстве между пластинами конденсатора имеет вид: $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_К + \vec{F}_Л$, где m – масса электрона, $\dot{\vec{v}}$ – его ускорение (точкой обозначена производная скорости $\vec{v}$ по времени), $\vec{F}_К = -e\vec{E}$ – кулоновская сила, e – модуль заряда электрона, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля в конденсаторе, $\vec{F}_Л = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ – сила Лоренца (квадратные скобки означают векторное произведение). Совместим начало координат неподвижной системы отсчета с местом появления электрона на поверхности пластины, а координатные оси направим, как показано на рисунке *а*. Поскольку скорость электрона при выходе из пластины по условию пренебрежимо мала, его последующее движение происходит в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, т.е. в плоскости *XOY*. Разложим скорость электрона на составляющие $\vec{v}_x$ (вдоль оси *OX*) и $\vec{v}_y$ (вдоль оси *OY*): $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ (см. рисунок *б*). Тогда сила Лоренца может быть представлена в виде: $\vec{F}_Л = -e[\vec{v}_x, \vec{B}] - e[\vec{v}_y, \vec{B}]$. Применяя для определения направления составляющих силы Лоренца вдоль координатных осей правило буравчика, находим, что $\vec{F}_{Лx} = -e[\vec{v}_y, \vec{B}]$, $\vec{F}_{Лy} = -e[\vec{v}_x, \vec{B}]$. В проекциях на координатные оси уравнения движения электрона имеют вид:



а



б

$$m\dot{v}_x = ev_yB, \quad m\dot{v}_y = eE - ev_xB.$$

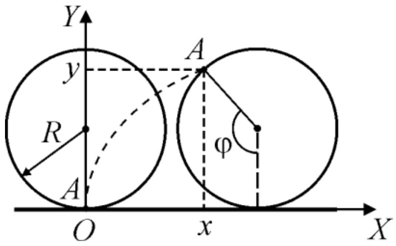
Начальные условия, т.е. значения координат и проекций скорости электрона при $t = 0$ по условию, а также в силу выбора координатной системы, таковы: $x = y = 0$, $v_x = v_y = 0$. Из первого уравнения с учетом начальных условий находим, что $v_x = \gamma By$. Подстановка этого выражения во второе уравнение дает: $\dot{v}_y = \gamma E - (\gamma B)^2 y$. Принимая во внимание, что $\dot{v}_y = \ddot{y}$, получаем уравнение: $\ddot{y} + (\gamma B)^2 y = \gamma E$. Заменой $y = \eta + \dfrac{E}{\gamma B^2}$ оно приводится к уравнению гармонических колебаний, а именно, $\ddot{\eta} + (\gamma B)^2 \eta = 0$, с начальными условиями: $\eta(0) = -\dfrac{E}{\gamma B^2}$, $\dot{\eta}(0) = 0$. Решение этого уравнения имеет вид: $\eta = -\dfrac{E}{\gamma B^2}\cos\gamma Bt$. Следовательно,

$$y = \frac{E}{\gamma B^2}(1 - \cos\gamma Bt) \text{ и } \dot{y} = v_y = \frac{E}{B}\sin\gamma Bt.$$

Обратимся вновь к проекции уравнения движения электрона на ось OY, а именно, $\dot{v}_y = \gamma E - \gamma B\dot{x}$. С учетом начального условия $x(0)=0$ из этого уравнения следует, что $v_y = \gamma Et - \gamma Bx$. Отсюда $x = \frac{E}{B}t - \frac{v_y}{\gamma B} = \frac{E}{B}t - \frac{E}{\gamma B^2}\sin\gamma Bt$. Поскольку $E = \frac{U}{d}$, получаем окончательно:

$$x = \frac{U}{\gamma dB^2}(\gamma Bt - \sin\gamma Bt), \quad y = \frac{U}{\gamma dB^2}(1-\cos\gamma Bt).$$

Рассмотрим теперь колесо радиусом R, катящееся по горизонтальной дороге без проскальзывания (см. рисунок *в*). Пусть точка *A*, расположенная на ободе колеса, первоначально находилась в начале координат. Тогда при повороте колеса на угол φ его центр переместится на расстояние $R\varphi$, а координаты точки A определятся по формулам: $x = R(\varphi - \sin\varphi)$, $y = R(1-\cos\varphi)$. Учитывая, что при равномерном качении колеса угол поворота φ связан с угловой скоростью вращения колеса ω соотношением $\varphi = \omega t$, получаем, что



в

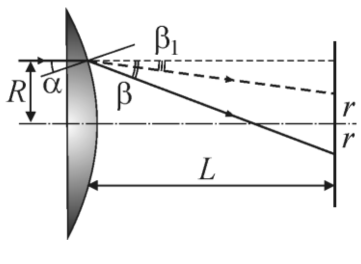
$$x = R(\omega t - \sin\omega t), \quad y = R(1-\cos\omega t).$$

Сравнивая эти формулы с полученными выше зависимостями координат электрона от времени, находим $R = \frac{U}{\gamma dB^2}$, $V = \frac{U}{dB}$.

Ответ: $R = \frac{U}{\gamma dB^2}$, $V = \frac{U}{dB}$.

13. На плоскую поверхность тонкой линзы, находящейся в воздухе, падает узкий пучок света, параллельный её главной оптической оси. На экране, расположенном за линзой, наблюдается светлое пятно, диаметр которого в k раз меньше диаметра падающего пучка, причем $k > 1$. Найдите показатель преломления n стекла линзы, если после погружения линзы с экраном (при неизменном расстоянии между ними) в жидкость с показателем преломления n_1 диаметр светлого пятна на экране не изменяется.

13. Решение. Поскольку диаметр светлого пятна на экране меньше диаметра падающего на линзу пучка, то линза является собирающей. Ход одного из лучей, ограничивающего пучок, изображен на рисунке сплошной линией до погружения линзы и экрана в жидкость и штриховой линией после погружения. Используя обозначения, приведенные на рисунке, с учетом малости углов β и β_1 имеем $R + r = L\beta$, $R - r = L\beta_1$. Согласно закону Снеллиуса, для малых углов падения и преломления справедливы равенства $\beta = (n-1)\alpha$,



$\beta_1 = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right)\alpha$. По условию задачи $\frac{R}{r} = k$. Исключая из записанных уравнений *R, L* и α, находим $n = \frac{2n_1}{1+k+(1-k)n_1}$.

Ответ: $n = \frac{2n_1}{1+k+(1-k)n_1}$.