Олимпиады школьников по физике, проводимые физическим факультетом МГУ имени М.В.Ломоносова

Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова традиционно участвует в организации и проведении олимпиад школьников по физике «Ломоносов», «Покори Воробьёвы горы!» и «Московской олимпиады школьников».

В 2020-2021 учебном году в соответствии с Перечнем олимпиад школьников этим олимпиадам присвоены следующие уровни:

–«Московская олимпиада школьников» по физике – 1-й уровень

– «Ломоносов» по физике – 2-й уровень

– «Покори Воробьёвы горы!» по физике – 1-й уровень

– «Робофест» по физике – 2-й уровень

Победители олимпиад 1-го и 2-го уровней, а также призеры олимпиад 1-го уровня зачислялись в 2021 г. на физический факультет МГУ без вступительных испытаний, а призеры олимпиад 2-го уровня получали 100 баллов за дополнительное вступительное испытание по физике. Всего в 2021 году на физический факультет было зачислено 196 человек, являющихся победителями и призерами олимпиад школьников, что составляет 52% от общего числа зачисленных на 1 курс абитуриентов.

Олимпиада «Ломоносов 2020-2021» по физике

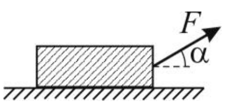
Отборочный этап

В 2020/2021 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный. Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. Задания отборочного этапа составлялись раздельно для учащихся младших (7-х – 9-х) и старших (10-х – 11-х) классов. Эти задания были размещены в личных кабинетах участников на сайте http://olymp.msu.ru. Доступ к условиям заданий был открыт для участников с 29 октября по 05 ноября 2020 года. Прием решений и ответов прекращался одновременно с их завершением.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады. Ниже приводятся примеры заданий для участников отборочного тура олимпиады Ломоносов. Поскольку числовые данные в условиях задач для каждого участника были индивидуальными, приводимые здесь решения задач и ответы к ним приведены в общем виде.

Задания для 7–9-х классов

1. Брусок массой $m = 1$ кг, лежащий на плоской горизонтальной поверхности стола, начинают тянуть за привязанную к нему невесомую нить с силой F, направленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. На какое расстояние L переместился брусок за время $t = 1$ с? Коэффициент трения бруска о стол $\mu = 0{,}1$. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.

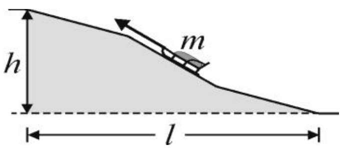


Решение. Уравнение движения бруска по горизонтали имеет вид $ma = F\cos\alpha - F_{\text{тр}}$, где $F_{\text{тр}} = \mu N$ – модуль силы трения скольжения, $N = mg - F\sin\alpha$ – модуль силы нормального давления бруска на стол. Отсюда ускорение бруска

$a = \dfrac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g$. За время t брусок переместится по поверхности стола на расстояние $L = \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{Ft^2}{2m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \dfrac{\mu g t^2}{2}$.

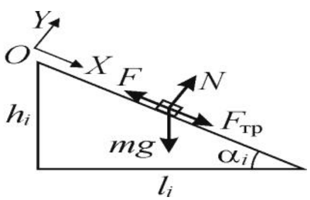
Ответ: $L = \dfrac{Ft^2}{2m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \dfrac{\mu g t^2}{2}$.

2. Снежная горка, профиль которой изображен на рисунке,



состоит из трех плоских поверхностей, плавно переходящих из одной в другую. Высота горки $h = 15$ м, длина основания $l = 30$ м. Санки с грузом общей массой $m = 50$ кг медленно затаскивают на горку, прикладывая к ним силу, на каждом участке траектории санок направленную по касательной к их траектории. Работа этой силы, совершённая при затаскивании санок наверх, оказалась равной A. Определите коэффициент трения μ между санками и поверхности горки. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до сотых.

Решение. Разобьём траекторию санок на три участка, каждый из



которых представляет собой наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α_i, имеющую перепад высот h_i и длину основания l_i ($i = 1, 2, 3$, см. рисунок). Поскольку санки перемещаются медленно, их ускорение равно нулю. Поэтому в проекциях на оси OX и OY уравнения движения санок на таком участке траектории имеют вид: $0 = mg\sin\alpha_i + F_{тр} - F$, $0 = N - mg\cos\alpha_i$. Поскольку $F_{тр} = \mu N$, то $F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$, а работа силы F на участке траектории длиной s_i равна $A_i = (mg\sin\alpha_i + \mu mg\cos\alpha_i)s_i = mg(s_i\sin\alpha_i + \mu s_i\cos\alpha_i) = mg(h_i + \mu l_i)$.

Суммируя работы на всех участках, вычислим работу силы по подъёму тела на горку: $A = mg\sum_{i=1}^{3}(h_i + \mu l_i) = mg(h + \mu l)$. Из полученного соотношения следует, что коэффициент трения равен $\mu = \dfrac{A - mgh}{mgl}$.

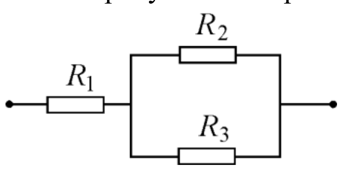
Ответ: $\mu = \dfrac{A - mgh}{mgl}$.

3. Стоявшую на столе в комнате длительное время открытую банку объёмом $V = 1$ л герметично закрыли и поместили в морозильную камеру. Температура воздуха в комнате была равна $t_к = 20°C$, а его относительная влажность φ (%). Определите массу льда, который образуется в банке через достаточно большой промежуток времени после помещения банки в морозильную камеру, в которой поддерживается температура $t_х = -10°C$. Плотность насыщенных паров воды при температуре $t_к$ равна $\rho_к = 17{,}32$ г/м^3, а при температуре $t_х$ равна $\rho_х = 2{,}14$ г/м^3. Ответ приведите в миллиграммах, округлив до десятых.

Решение. До охлаждения масса водяных паров в банке была равна $m_к = \varphi_1 \rho_к V$, где $\varphi_1 = \varphi / 100\%$. После охлаждения масса насыщенного пара в банке будет равна $m_х = \rho_х V$. Поэтому масса образовавшегося в банке льда будет равна $m = m_к - m_х = (\rho_к \varphi_1 - \rho_х)V$.

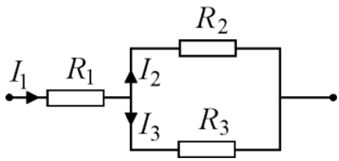
Ответ: $m = \left(\rho_к \dfrac{\varphi}{100\%} - \rho_х\right)V$.

4. На рисунке изображен участок цепи постоянного тока, содержащий три резистора, сопротивления которых неизвестны. При этом через резистор R_1 протекает ток I_1 = 1,6 А, а напряжение на резисторе R_2



составляет U_2. Найдите величину сопротивления R_3, если известно, что она в $n = 3$ раза превышает величину сопротивления R_2. Ответ приведите в омах, округлив до целых.

Решение. Обозначим токи, текущие в ветвях схемы, как показано на рисунке. Тогда справедлива следующая система уравнений: $I_1 = I_2 + I_3$, $U_2 = I_2R_2$, $U_2 = I_3R_3$, $R_3 = nR_2$. Разрешая ее относительно R_3, получаем, что

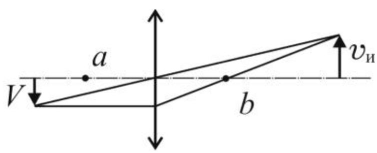


$$R_3 = (n+1)\frac{U_2}{I_1}.$$

Ответ: $R_3 = (n+1)\dfrac{U_2}{I_1}$

5. По свисающей с потолка комнаты нити вертикально вниз спускается паук со скоростью, модуль которой равен V. Между нитью и стеной комнаты помещают тонкую линзу с фокусным расстоянием $F = 20$ см так, что её главная оптическая ось оказывается перпендикулярной этой стене и пересекает нить. При этом на стене появляется чёткое изображение нити и паука. Определите модуль скорости v, с которой паук движется относительно своего изображения. Расстояние от нити до плоскости линзы равно $a = 30$ см. Ответ приведите в см/с, округлив до десятых.

Решение. Из формулы для тонкой собирающей линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ получаем, что расстояние от линзы до стенки $b = \dfrac{aF}{a - F}$. Из подобия треугольников находим, что

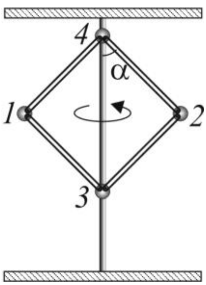


модуль скорости изображения паука относительно стенки $v_и = V\dfrac{b}{a} = \dfrac{VF}{a-F}$. Следовательно, модуль искомой скорости $v = V + v_и = \dfrac{aV}{a-F}$.

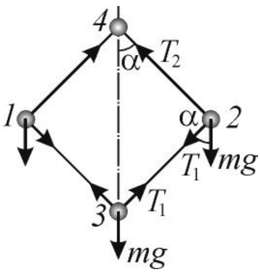
Ответ: $v = V + v_и = \dfrac{aV}{a-F}$.

Задания для 10-х – 11-х классов

1. Три груза массой m каждый шарнирно соединены невесомыми стержнями длиной l = 0,2 м (см. рисунок) с закреплённым на вертикальном стержне грузом *4*. Груз *3* может скользить по центральному гладкому стержню без трения. Система была приведена во вращение вокруг вертикали, совпадающей с осью центрального стержня. Какую работу A при этом совершили, если при вращении стержни отклонились на угол α = 45°. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2, размерами грузов можно пренебречь. Ответ приведите в джоулях, округлив до сотых.



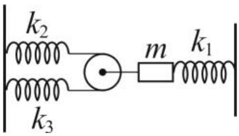
Решение. На рисунке показаны силы, действующие на грузы *2* и *3*. Из рисунка следует, что проекции уравнения движения грузов *2* и *3* на вертикальную координатную ось имеют вид: $T_2\cos\alpha = T_1\cos\alpha + mg$ и $2T_1\cos\alpha = mg$. Проекция уравнения движения груза *2* на горизонтальную координатную ось есть $\dfrac{mv^2}{l\sin\alpha} = T_2\sin\alpha + T_1\sin\alpha$, где v – линейная скорость груза *2*. Из записанных уравнений находим, что $v^2 = 2gl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Следовательно, приращение кинетической энергии системы



$\Delta E_к = 2\dfrac{mv^2}{2} = 2mgl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Приращение её потенциальной энергии $\Delta E_п = 2mgl(1-\cos\alpha) + mg2l(1-\cos\alpha)$. По закону изменения механической энергии искомая работа $A = \Delta E_к + \Delta E_п = 2mgl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + 4mgl(1-\cos\alpha)$.

Ответ: $A = 2mgl[\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2(1-\cos\alpha)]$.

2. Колебательная система состоит из груза массой m, лежащего



на гладкой горизонтальной плоскости, невесомого гладкого блока, двух невесомых, нерастяжимых нитей и трёх невесомых пружин жёсткостью k_1 = 2/3 Н/см, k_2 = 1/2 Н/см и k_3 = 1 Н/см, соответственно, соединённых так, как показано на рисунке. Центр масс груза лежит на одной горизонтали с прикреплённой к нему нитью и осью пружины $k_{1.}$ В положении равновесия все пружины растянуты. Считая, что нити все время остаются натянутыми, определите круговую частоту ω малых гармонических колебаний груза. Ответ приведите в рад/с, округлив до целых.

Решение. Пусть растяжения пружин в положении равновесия равны l_1, l_2 и l_3, соответственно. Тогда сила натяжения пружины k_1 и правой нити, прикреплённой к грузу, равна $F_1 = k_1 l_1$, а сила натяжения нити, переброшенной через блок, равна $F_2 = k_2 l_2 = k_3 l_3$, т.к. блок гладкий. Из условия невесомости блока следует, что $F_1 = 2F_2$, а потому $l_2 = \dfrac{k_1}{2k_2} l_1$ и $l_3 = \dfrac{k_1}{2k_3} l_1$.

При смещении груза вправо на расстояние Δx первая пружина сократится на Δx, а вторая и третья удлинятся на Δx_2 и Δx_3, соответственно, причём $\Delta x_2 + \Delta x_3 = 2\Delta x$ (т.к. нити нерастяжимы) и $k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3$ (т.к. пружины невесомы). Отсюда находим, что $\Delta x_2 = \dfrac{2k_3}{k_2 + k_3}\Delta x$, $\Delta x_3 = \dfrac{2k_2}{k_2 + k_3}\Delta x$.

Изменение потенциальной системы при этом будет

$$\Delta E_{\Pi} = \frac{1}{2}\left[k_1(l_1 - \Delta x)^2 + k_2(l_2 + \Delta x_2)^2 + k_3(l_3 + \Delta x_3)^2 - k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2 - k_3 l_3^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-2k_1 l_1 \Delta x + 2k_2 l_2 \Delta x_2 + 2k_3 l_3 \Delta x_3\right) + k_1 \Delta x^2 + k_2 \Delta x_2^2 + k_3 \Delta x_3^2\right].$$

Используя записанные выше соотношения между l_i и Δx_i, нетрудно убедиться в том, что выражение в круглых скобках обращается в нуль. Кроме того, $k_2 \Delta x_2^2 = \dfrac{4k_2 k_3^2}{(k_2 + k_3)^2}\Delta x^2$ и $k_3 \Delta x_3^2 = \dfrac{4k_3 k_2^2}{(k_2 + k_3)^2}\Delta x^2$. Следовательно $\Delta E_{\Pi} = \dfrac{1}{2}\left(k_1 + \dfrac{4k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right)\Delta x^2$.

Обозначив через v_0 скорость груза в положении равновесия, по закону сохранения механической энергии имеем $\left(k_1 + \dfrac{4k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right)\dfrac{\Delta x^2}{2} = \dfrac{m v_0^2}{2}$. Поскольку амплитудное значение скорости v_0 связано с амплитудой смещения Δx соотношением $v_0 = \omega \Delta x$, искомая частота $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{m}\left(k_1 + \dfrac{4k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right)}$.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{m}\left(k_1 + \dfrac{4k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right)}$.

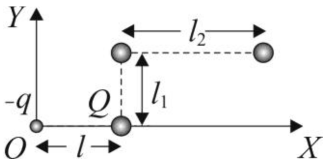
3. В полностью заполненном баллоне объёмом $V_0 = 5$ л помещается $m_0 = 2{,}5$ кг сжиженного пропана (C_3H_8). Если часть пропана из баллона выпустить наружу, то в нем будут находиться в равновесии жидкий пропан и его насыщенный пар. Найдите массу m_1 пропана, находящегося в баллоне в газообразном состоянии, когда из этого баллона выпущено α (%) первоначально находившегося пропана, если температуру пропана поддерживают постоянной и равной $t = 17$ ºС. Давление насыщенных паров пропана при этой температуре $p = 0{,}8$ МПа. Молярная масса пропана $\mu = 44$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Ответ приведите в граммах, округлив до целых.

Решение. Плотность жидкого пропана в баллоне $\rho = \dfrac{m_0}{V_0}$, давление в баллоне p. По условию в баллоне всего осталось $m = (1-\alpha_1)m_0$ пропана, где $\alpha_1 = \alpha/100\%$. Пусть часть пропана, которая находится в газообразном состоянии, занимает объем V. Тогда $m_1 = \dfrac{\mu p V}{RT}$ и $(1-\alpha_1)m_0 = \rho(V_0 - V) + \dfrac{\mu p V}{RT}$.

Отсюда $V = \dfrac{\alpha_1 m_0 V_0 RT}{m_0 RT - \mu p V_0}$. Следовательно, $m_1 = \dfrac{\alpha_1 m_0 V_0 \mu p}{(m_0 RT - \mu p V_0)}$.

Ответ: $m_1 = \dfrac{\alpha m_0 V_0 \mu p}{100\%[m_0 R(t+273) - \mu p V_0]}$.

4. Две разноименно заряженные частицы находятся на оси OX декартовой системы координат на расстоянии $l = 3$ см друг от друга. Удерживая одну частицу неподвижной, вторую частицу переместили в направлении оси OY на расстояние $l_1 = 4$ см. При этом была совершена работа A_1. Какую работу A_2 понадобится совершить, чтобы после этого передвинуть вторую частицу на расстояние $l_2 = 2$ см в направлении оси OX? Ответ приведите в миллиджоулях, округлив до сотых.



Решение. Потенциальная энергия притяжения зарядов в исходном положении равна $W_0 = -\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 l}$. Когда вторую частицу переместили перпендикулярно линии, соединяющей частицы, на расстояние l_1, потенциальная энергия стала равной $W_1 = -\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{l^2+l_1^2}}$. При этом была совершена работа $A_1 = W_1 - W_0 = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\sqrt{l^2+l_1^2}-l}{l\sqrt{l^2+l_1^2}}$. Потенциальная энергия системы при конечном положении второй частицы

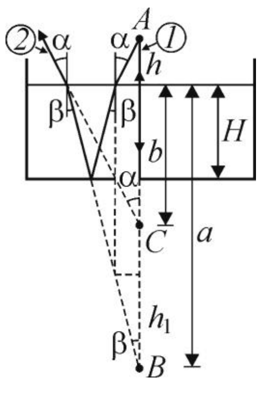
$W_2 = -\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(l+l_2)^2+l_1^2}}$. Совершенная при таком перемещении работа $$A_2 = W_2 - W_1 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sqrt{(l+l_2)^2+l_1^2}-\sqrt{l^2+l_1^2}}{\sqrt{l^2+l_1^2}\sqrt{(l+l_2)^2+l_1^2}}.$$

Следовательно, $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{l}{\sqrt{l^2+l_1^2}-l}\left(1-\dfrac{\sqrt{l^2+l_1^2}}{\sqrt{(l+l_2)^2+l_1^2}}\right)$.

Ответ: $A_2 = \dfrac{A_1 l}{\sqrt{l^2+l_1^2}-l}\left(1-\dfrac{\sqrt{l^2+l_1^2}}{\sqrt{(l+l_2)^2+l_1^2}}\right)$.

5. На горизонтальном дне аквариума лежит плоское зеркало. Человек, наклонившийся над водой и смотрящий вертикально вниз, видит изображение своего глаза в зеркале на расстоянии $l = 50$ см. Определите толщину слоя H воды в аквариуме, если глаз расположен на расстоянии $h =$ см от её поверхности. Показатель преломления воды считайте равным $n = 4/3$. Учтите, что для малых значений аргумента φ, заданного в радианах, можно считать, что $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.

Решение. На рисунке показан ход лучей, дающих изображение



C глаза человека *A* в зеркале. Луч *1* идет от глаза по нормали к зеркалу и после отражения от него возвращается в глаз по тому же пути. Луч *2* идет от глаза под углом α к нормали к поверхности воды и после отражения от зеркала и повторного прохождения сквозь воду также попадает в глаз человека. Продолжения лучей *1* и *2* пересекаются в точке *C*, являющейся искомым изображением глаза. Согласно закону преломления, $\sin\alpha = n\sin\beta$. Поскольку диаметр зрачка человеческого глаза составляет несколько миллиметров, в глаз попадут только те лучи, которые идут под малыми углами к вертикали, т.е. справедливо приближенное равенство $\alpha \approx n\beta$. Поэтому

$\frac{h_1}{h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = n$ и $a = 2H + h_1 = 2H + nh$. Из рисунка видно, что $l = h + b$. Поскольку $\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n}$, то $b = \frac{2H + nh}{n}$.

Следовательно, $l = \frac{2H}{n} + 2h$, а потому $H = \frac{(l - 2h)n}{2}$.

Ответ: $H = \frac{(l - 2h)n}{2}$.

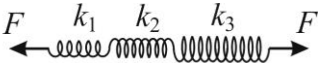
Заключительный этап

Проведение заключительного этапа олимпиады «Ломоносов» было назначено на 25 февраля 2021 года для учащихся 7-9 классов, с 26 по 27 февраля 2021 года для учащихся 10-11 классов. Заключительный этап проводился для всех участников в онлайн формате с использованием прокторинга. Задание для учащихся 7-х − 8-х, а также 9-х классов состояло из четырех задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10-х – 11-х классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2021 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно, 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание состояло из четырех различных разделов, состоящих из задач и уточняющих вопросов по теории. В первом разделе были помещены задания по механике, во втором разделе – задания по молекулярной физике и термодинамике, в третьем разделе – задания по электродинамике, в четвертом разделе – задания по оптике

Ниже приводятся задания заключительного этапа олимпиады «Ломоносов – 2020/2021»

Задания для 7-х – 9-х классов

1. При выполнении лабораторной работы по физике ученик получил в свое распоряжение три пружины, жесткости двух из которых оказались равными соответственно k_1 = 10 Н/м и k_2 = 20 Н/м, а жесткость третьей была неизвестна. По указанию учителя ученик соединил все три пружины последовательно и растянул получившуюся составную пружину, подействовав на каждый из ее свободных концов силой F = 1 Н. Измерив полное удлинение Δl составной пружины, школьник смог рассчитать жесткость k_3 третьей пружины. Какое значение для k_3 он получил, если Δl = 17 см?



Решение. Используя закон Гука, запишем силы натяжения пружин в виде $F_1 = k_1\Delta l_1$, $F_2 = k_2\Delta l_2$, $F_3 = k_3\Delta l_3$, где Δl_1, Δl_2 и Δl_3 – удлинения пружин. Условия равновесия пружин представим в виде $F = F_1$, $F_1 = F_2$ и $F = F_3$. Удлинение составной пружины равно $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$, или $\Delta l = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right)F$. Отсюда находим, что

$$k_3 = \frac{Fk_1k_2}{\Delta l k_1 k_2 - F(k_1 + k_2)}.$$

Ответ: $k_3 = \frac{Fk_1k_2}{\Delta l k_1 k_2 - F(k_1 + k_2)} = 50$ Н/м.

2. В ванне нужно приготовить m = 350 кг воды, температура которой t = 36 °С. Сколько для этого нужно взять воды из горячего и холодного кранов, если температура воды в горячем кране t_1 = 76 °С, а в холодном – t_2 = 6 °С? Теплообменом воды с окружающими телами пренебречь.

Решение. Уравнение теплового баланса имеет вид $(t_1 - t)c\,m_1 + (t_2 - t)c\,m_2 = 0$, где c – теплоёмкость воды, m_1 –

масса горячей, а m_2 – масса холодной воды, причём $m_1 + m_2 = m$.

Отсюда находим, что $m_1 = \dfrac{m(t - t_2)}{t_1 - t_2}$, $m_2 = m - m_1 = \dfrac{m(t_1 - t)}{t_1 - t_2}$.

Ответ: $m_1 = \dfrac{m(t - t_2)}{t_1 - t_2} = 150$ кг горячей воды, $m_2 = \dfrac{m(t_1 - t)}{t_1 - t_2} = 200$ кг холодной воды.

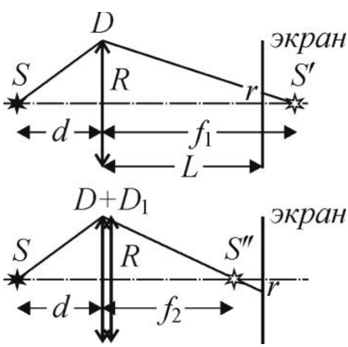
3. Электродвигатель, обмотки которого имеют сопротивление R = 20 Ом, включён в сеть постоянного тока с напряжением U = 100 В. На горизонтальном валу двигателя закреплена лёгкая нить, на другом конце которой подвешен груз массой m = 5 кг. С какой максимальной скоростью v_{max} двигатель может поднимать этот груз? Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2. Трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Решение. При постоянной скорости вращения ротора двигателя протекание тока по его обмотке сопровождается только выделением теплоты в ней и совершением двигателем механической работы, т.к. кинетическая энергия ротора остаётся неизменной. Потребляемая двигателем мощность равна UI, где I – сила тока, текущего по обмотке. Мощность тепловых потерь по закону Джоуля-Ленца равна RI^2. Поэтому развиваемая двигателем механическая мощность N удовлетворяет соотношению $UI = N + RI^2$. Так как N зависит от силы тока по квадратичному закону, т.е. $N = UI - RI^2$, максимум этого выражения достигается при значении силы тока, лежащем в середине интервала $\left[0, \dfrac{U}{R}\right]$, и равном $I_0 = \dfrac{U}{2R}$. Следовательно, максимальная мощность $N_{max} = U \cdot \dfrac{U}{2R} - R \cdot \left(\dfrac{U}{2R}\right)^2 = \dfrac{U^2}{4R}$. При постоянной скорости движения поднимаемого двигателем груза натяжение нити равно mg. Приравнивая максимальную мощность двигателя мощности силы натяжения mgv, получаем, что $v_{max} = \dfrac{U^2}{4mgR}$.

Ответ: $v_{max} = \dfrac{U^2}{4mgR} = 2{,}5$ м/с.

4. Изображение диапозитива на экране, полученное с помощью проекционного аппарата, оказалось не очень резким. В частности, изображение точки на экране имело вид круга. Не изменяя положения объектива, вплотную к нему прижали собирающую линзу с фокусным расстоянием F_1 = 10 см. При этом размер изображения точки не изменился. Найдите оптическую силу D_x линзы, которую надо было прижать к объективу, чтобы изображение стало резким. Ответ приведите в диоптриях, округлив до одного знака после запятой.

Решение. Из условия задачи следует, что экран находится ближе к проектору, чем чёткое изображение диапозитива, иначе после установки добавочной линзы размер изображения точки увеличился бы. Ход лучей для первого и второго случаев, указанных в условии, изображен на рисунке, где введены следующие обозначения: D – оптическая сила объектива; $D_1 = 1/F_1$ – оптическая сила добавочной линзы; d – расстояние от диапозитива до объектива; f_1 и f_2 – расстояния от объектива до изображения; L – расстояние от объектива до экрана; R – радиус линзы и r – радиус пятна на экране. Из верхней и нижней частей рисунка видно, что $\dfrac{r}{R} = \dfrac{f_1 - L}{f_1} = \dfrac{L - f_2}{f_2}$. Отсюда $\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2} = \dfrac{2}{L}$. Формула тонкой



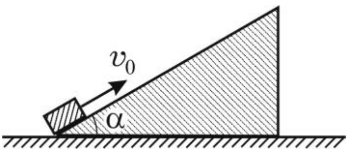
линзы, примененная для обоих случаев, дает $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f_1} = D$,

$\frac{1}{d}+\frac{1}{f_2}=D+D_1$. Сложив эти равенства, получаем: $\frac{2}{d}+\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=2D+D_1$, или, с учетом ранее полученного соотношения, $2\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{L}\right)=2D+D_1$. Изображение диапозитива на экране будет резким, если выполняется равенство $\frac{1}{d}+\frac{1}{L}=D+D_x$. Сопоставив последние два выражения, получаем, что $D_x=\frac{D_1}{2}=\frac{1}{2F_1}$.

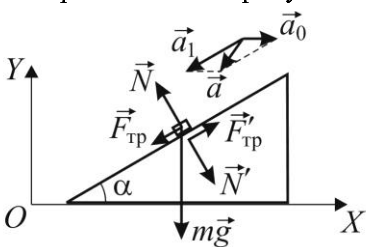
Ответ: $D_x=\frac{1}{2F_1}=5$ дптр.

Вариант I задания для 10-х – 11-х классов

1. Клин массой $M = 1$ кг с углом $\alpha = 30°$ при основании покоится на гладкой горизонтальной поверхности. На клин положили брусок массой $m = 0{,}1$ кг и ударом сообщили ему некоторую скорость, направленную вверх по клину. Найдите, какое количество теплоты Q выделилось в результате трения бруска о клин, если известно, что максимальная высота, на которую поднялся брусок от своего начального положения, $h = 20$ см. Коэффициент трения бруска о наклонную поверхность клина $\mu = 0{,}6$. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



Решение. Брусок и клин движутся под действием сил, изображенных на рисунке. В частности, к бруску приложены:



сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции клина $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. В свою очередь, брусок действует на клин с силами $\vec{N}'$ и $\vec{F}'_{тр}$, причем, по третьему закону Ньютона $N' = N$, $F'_{тр} = F_{тр}$. Обозначим через $\vec{a}$ ускорение бруска в неподвижной системе отсчета. В соответствии с законом сложения ускорений, $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1$, где $\vec{a}_0$ – ускорение клина, $\vec{a}_1$ – ускорение бруска относительно клина. Применяя к бруску второй закон Ньютона, имеем $m(\vec{a}_0 + \vec{a}_1) = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$, или, в проекциях на оси координатной системы, изображенной на рисунке,

$$m(a_0 - a_1 \cos\alpha) = -N \sin\alpha - F_{тр} \cos\alpha ,$$

$$-ma_1 \sin\alpha = -mg + N\cos\alpha - F_{тр} \sin\alpha .$$

Уравнение движения клина в соответствии со вторым законом Ньютона имеет вид $Ma_0 = N \sin\alpha + F_{тр} \cos\alpha$. Учитывая, что по закону сухого трения модуль силы трения скольжения $F_{тр} = \mu N$, получаем следующую систему уравнений:

$$ma_1 \cos\alpha - ma_0 = N \sin\alpha + \mu N \cos\alpha ,$$

$$ma_1 \sin\alpha = mg - N\cos\alpha + \mu N \sin\alpha ,$$

$$Ma_0 = N \sin\alpha + \mu N \cos\alpha .$$

Решая эту систему, находим модуль силы нормального давления бруска на поверхность клина:

$$N = \frac{mg\cos\alpha}{1 + m(\sin^2\alpha + \mu \sin\alpha \cos\alpha)/M} .$$

Модуль суммарной работы сил $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}'_{тр}$ равен произведению модуля силы трения скольжения на модуль перемещения бруска относительно клина: $|A_{тр}| = \mu Nh/\sin\alpha$. Учитывая, что по закону сохранения энергии количество теплоты, выделившееся при скольжении бруска по клину, $Q = |A_{\text{тр}}|$, получаем, что

$$Q = \frac{\mu m g h \operatorname{ctg}\alpha}{1 + m(\sin^2\alpha + \mu \sin\alpha\cos\alpha)/M}.$$

Ответ: $Q = \dfrac{\mu m g h \operatorname{ctg}\alpha}{1 + m(\sin^2\alpha + \mu \sin\alpha\cos\alpha)/M} \approx 0{,}2$ Дж.

2. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде с площадью сечения $S = 20$ см^2 под поршнем массой $M = 4$ кг содержится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда $h = 1$ м. Газу сообщили количество теплоты $\Delta Q = 126$ Дж. Во сколько раз α изменится среднеквадратичная скорость молекул газа? Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа, ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Трение поршня о стенки сосуда считайте пренебрежимо малым.

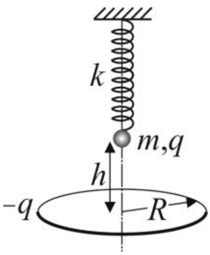
Решение. Среднеквадратичная скорость молекул газа определяется выражением $v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_0 – масса молекулы. Следовательно, искомое отношение равно $\alpha = \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$, где T_2 и T_1 – температуры газа в конечном и начальном состояниях. Из уравнения начального состояния газа $\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S}\right)hS = \nu R T_1$ находим число молей газа $\nu = \dfrac{(p_0 S + Mg)h}{RT_1}$. При нагреве газ совершает изобарное расширение, поэтому $\Delta Q = \dfrac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1)$.

Подставляя сюда найденное выше ν, приходим к соотношению:

$$\Delta Q = \frac{5}{2}(p_0 S + Mg)h\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

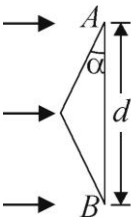
Ответ: $\alpha = \sqrt{1 + \frac{2\Delta Q}{5(p_0 S + Mg)h}} = 1{,}1$.

3. Над закреплённым проволочным кольцом радиуса *R*, расположенным горизонтально, на пружине подвешена маленькая заряженная бусинка (см. рисунок). Заряд бусинки $q = 1$ мкКл равен по модулю и противоположен по знаку заряду кольца. Бусинка располагается точно над центром кольца на высоте $h = R = 20$ см. Определите максимальную скорость $v_{\max}$ бусинки в процессе её малых свободных колебаний, которые возникают после мгновенной нейтрализации заряда кольца. Масса бусинки $m = 9$ г, жёсткость пружины $k = 10$ Н/м. Электрическую постоянную примите равной $\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. *Указание: для упрощения записи ответа в общем виде используйте равенство h = R.*



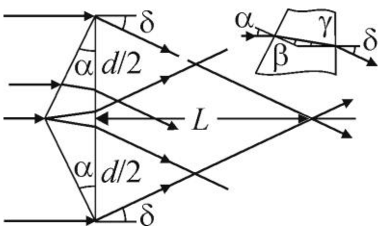
Решение. До нейтрализации заряда кольца пружина растянута под действием силы тяжести mg и силы электростатического притяжения со стороны равномерно заряженного кольца $F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 h}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$. С учётом равенства h и R последнюю запись легко упростить: $F_e = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2}$. После нейтрализации заряда кольца положение равновесия бусинки скачком изменится на новое, находящееся на расстоянии $\Delta x = \frac{F_e}{k}$ от первоначального. В результате возникнут гармонические колебания бусинки с амплитудой $A = \Delta x = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{kR^2}$ и циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Максимальное (амплитудное) значение скорости движения бусинки равно при этом $v_{\max} = A \cdot \omega_0 = \dfrac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0} \dfrac{q^2}{kR^2} \cdot \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Ответ: $v_{\max} = \dfrac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0} \dfrac{q^2}{\sqrt{mk}R^2} \approx 0{,}26$ м/с.



4. На равнобедренную стеклянную призму падает широкий параллельный пучок света, перпендикулярный грани *AB*, ширина которой $d = 5$ см. На каком расстоянии L от грани *AB* преломленный призмой свет разделится на два не перекрывающихся пучка? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$, угол при основании призмы $\alpha = 0{,}1$ рад. При расчетах учтите, что для малых углов, заданных в радианах, $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$.

Решение. Каждый из лучей света, падающих на призму,



преломляется дважды: на передней и задней ее гранях (см. рисунок). Закон преломления на этих гранях, записанный с учетом малости углов падения и преломления, дает следующие соотношения: $\beta = \dfrac{\alpha}{n}$, $\delta = n\gamma$.

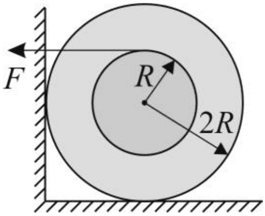
Поскольку $\gamma = \alpha - \beta$, получаем для угла преломления δ значение $\delta = \alpha(n-1)$. Из рисунка видно, что пучки света, преломленные призмой, перестанут перекрываться на расстоянии L, удовлетворяющем условию: $L = \dfrac{d}{2\operatorname{tg}\delta} \approx \dfrac{d}{2\delta}$.

Объединяя записанные выражения, находим, что $L = \dfrac{d}{2\alpha(n-1)}$.

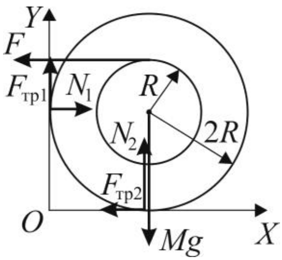
Ответ: $L = \dfrac{d}{2\alpha(n-1)} \approx 50$ см.

Вариант II задания для 10-х – 11-х классов

1. Катушку массой M = 720 г и радиусом внутреннего цилиндра R, имеющую внешний радиус $2R$, положили на горизонтальный пол и прислонили к вертикальной стене, как показано на рисунке. На внутренний цилиндр катушки намотали лёгкую нить. Определите, при каком минимальном значении модуля F силы, приложенной к нити и направленной горизонтально влево, катушка начнёт вращаться. Коэффициенты трения скольжения катушки о пол и стену одинаковы и равны $\mu = 0{,}2$. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.



Решение. Катушка находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых показаны на рисунке. Здесь N_1 и $F_{тр1}$ действуют на катушку со стороны стены, N_2 и $F_{тр2}$ – со стороны пола, Mg – со стороны Земли и F – со стороны нити. Поскольку ускорение катушки должно оставаться равным нулю, то сумма моментов и действующих на катушку сил должны быть равны нулю. По закону сухого трения: $F_{тр1} = \mu \cdot N_1$, $F_{тр2} = \mu \cdot N_2$. Имеем следующую систему уравнений: $N_1 - \mu N_2 - F = 0$, $Mg - N_2 - \mu N_1 = 0$ и $FR = 2\mu R\left(N_1 + N_2\right)$. Из первых двух уравнений следует, что $N_1 = \dfrac{\mu Mg + F}{1+\mu^2}$ и $N_2 = \dfrac{Mg - \mu F}{1+\mu^2}$. Подставляя эти значения в



третье уравнение, получаем: $F = 2\mu\left(\frac{\mu Mg + F}{1+\mu^2} + \frac{Mg - \mu F}{1+\mu^2}\right)$,

откуда $F = \frac{2Mg\mu(1+\mu)}{1-2\mu+3\mu^2}$.

Ответ: $F = \frac{2Mg\mu(1+\mu)}{1-2\mu+3\mu^2}$ = 4,8 Н.

2. При расширении некоторого количества аргона его давление уменьшается так, как показано на *p*–*V*-диаграмме (см.

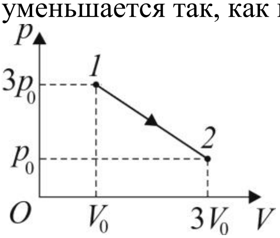
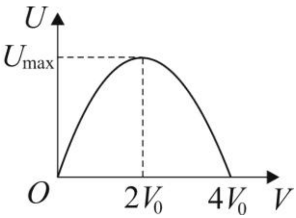


рисунок). Определите максимальное значение U_{max} внутренней энергии газа в процессе *1 – 2*. Начальные значения объёма и давления газа равны V_0 = 0,1 м^3 и $p_0 = 5 \cdot 10^4$ Па соответственно.

Решение. Зависимость давления от объема в процессе *1 – 2* описывается линейной функцией вида $p(V) = b - kV$. По условию $p(V_0) = 3p_0$, $p(3V_0) = p_0$, или $3p_0 = b - kV_0$,

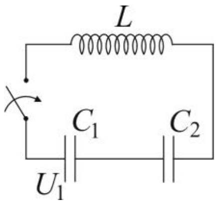


$p_0 = b - 3kV_0$. Из этой системы находим, что $b = 4V_0$, $k = \frac{p_0}{V_0}$.

Следовательно, $p = 4p_0 - \frac{p_0}{V_0}V$. Для аргона, который можно считать одноатомным идеальным газом, $U = \frac{3}{2}pV$ и зависимость внутренней энергии от объема имеет вид $U = \frac{3}{2}(4p_0V - \frac{p_0}{V_0}V^2)$. График зависимости $U(V)$ изображен на рисунке, причем он пересекает ось абсцисс в точках $V = 0$ и $V = 4V_0$. Поэтому максимум внутренней энергии достигается при объёме аргона $V = 2V_0$. Максимальное значение U равно $U_{\max} = \frac{3}{2} \cdot 4 p_0 V_0$.

Ответ: $U_{\max} = 6 p_0 V_0 = 30$ кДж.

3. В цепи, показанной на рисунке, конденсатор емкостью $C_1 = 10^{-5}$ Ф вначале заряжен до некоторого напряжения U_1, а



конденсатор емкостью $C_2 = 10^{-6}$ Ф разряжен. Известно, что в процессе колебаний, возникающих в цепи после замыкания ключа, амплитуда напряжения на конденсаторе C_2 оказалась равной $U_{2\max} = 364$ В. До какого напряжения U_1 был заряжен конденсатор C_1 первоначально? Потерями в соединительных проводах и в катушке индуктивности можно пренебречь.

Решение. После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания, в процессе которых происходит периодическая перезарядка конденсаторов. В каждый момент времени суммарное напряжение на конденсаторах равно напряжению на катушке, которое, в свою очередь, опережает по фазе ток в цепи на $\pi/2$. В момент достижения максимального напряжения на конденсаторах ток в цепи обратится в нуль, следовательно, вся энергия будет сосредоточена в конденсаторах. При этом на конденсатор C_2 перетечет из конденсатора C_1 некоторый заряд q, а на конденсаторе C_1 останется заряд $C_1 U_1 - q$. Величину заряда q на конденсаторе C_2 можно найти из закона сохранения энергии в контуре. Поскольку в рассматриваемый момент времени магнитная энергия обращается в нуль, справедливо равенство: $\frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{(C_1 U_1 - q)^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2}$. Отсюда $q = 2U_1 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

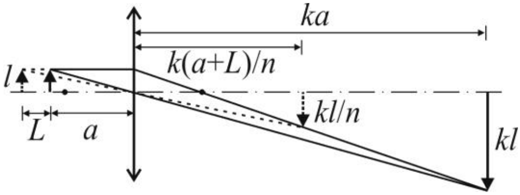
Учитывая, что $U_2 = \dfrac{q}{C_2}$, получаем, что $U_{2\max} = \dfrac{2U_1C_1}{C_1 + C_2}$.

Отсюда $U_1 = \dfrac{(C_1 + C_2)U_{2\max}}{2C_1}$.

Ответ: $U_1 = \dfrac{(C_1 + C_2)U_{2\max}}{2C_1} \approx 200$ В.

4. С помощью тонкой собирающей линзы получили увеличенное в $k = 5$ раз действительное изображение предмета, расположенного вблизи главной оптической оси линзы. Если расстояние между линзой и предметом увеличить на $L = 1$ см, то изображение предмета станет меньше в $n = 2$ раза. Определите фокусное расстояние линзы F.

Решение. Построение изображений предмета при двух его положениях показано на рисунке.



Из формулы тонкой линзы следуют равенства: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{ka} = \dfrac{1}{F}$ и $\dfrac{1}{a+L} + \dfrac{n}{k(a+L)} = \dfrac{1}{F}$. Исключая из этих равенств a, находим, что $F = \dfrac{kL}{n-1}$.

Ответ: $F = \dfrac{kL}{n-1} = 5$ см.

Олимпиада
«ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

В 2021 году оба этапа (отборочный и заключительный) олимпиады «ПВГ!» по физике проходили в дистанционном формате.

Отборочный этап

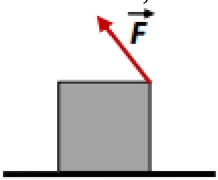
На выполнение задания отборочного этапа выделялось 24 часа. Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только **ответы**) и творческой части (проверялись и оценивались **решения**).

Пример задания для 7-9 классов

Часть I . Тестовое задание. Пример варианта.

Вопрос 1 (9 баллов):
Однородный куб массой 400 г покоится на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между кубиком и поверхностью равен 0,24. К середине одного из его верхних ребер прикладывают силу, линия действия которой лежит в одной вертикальной плоскости с центром куба (см. рисунок). При какой минимальной величине этой силы возможно, что куб начнет вращаться вокруг оси, проходящей через его нижнее ребро, причем эта ось не будет перемещаться? Ответ запишите в ньютонах, с точностью до сотых, без указания единиц измерения. Ускорение свободного падения считать равным 9,80 м/с^2.

ОТВЕТ: 1,48.



Комментарий: Пусть α – угол наклона линии действия силы $\vec{F}$ к горизонтали. Тогда требование отсутствия скольжения куба означает, что сила трения $F_{тр} = F\cos(\alpha)$, а сила нормальной реакции поверхности $N = mg - F\sin(\alpha)$, и при этом $F_{тр} \le \mu N$. Значит, $\frac{mg}{F} \ge \frac{\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)}{\mu}$. С другой стороны, в момент начала отрыва куба от поверхности при повороте вокруг ребра, точка приложения силы нормальной реакции смещается на это ребро, и для переворота момент силы $\vec{F}$ относительно ребра должен быть не меньше момента силы тяжести: $F \cdot a\sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \ge mg \cdot \frac{a}{2}$, и поэтому $\frac{mg}{F} \le 2[\cos(\alpha) + \sin(\alpha)]$. Как видно, при каждом значении α величина $\frac{mg}{F}$ должна принадлежать заданному этими неравенствами интервалу значений, а минимальное возможное значение F соответствует максимальному значению $\frac{mg}{F}$, достигаемому для $\alpha > 45°$ при совпадении границ интервалов, то есть при значении угла, определяемого из уравнения $2[\cos(\alpha) + \sin(\alpha)] = \frac{\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)}{\mu}$. Значит, $tg(\alpha) = \frac{1-2\mu}{\mu}$ (отметим, что во всех вариантах было $\mu < \frac{1}{3}$, так что соответствующее $\alpha > 45°$). Подставляя это значение угла в любое из «пограничных» выражений для силы, находим, что (при $\mu < \frac{1}{3}$) $F_{\min} = \frac{\sqrt{1 - 4\mu + 5\mu^2}}{2(1-\mu)}mg$. При $\mu \ge \frac{1}{3}$ ответ был бы $F_{\min} = \frac{mg}{2\sqrt{2}}$.

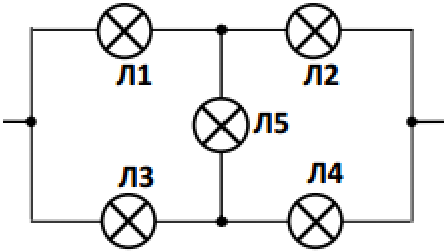
Вопрос 2 (8 баллов):
Межпланетная станция движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. Афелий (самая далекая от Солнца точка ее орбиты) находится на расстоянии 4,2 а.е. от центра Солнца, и станция проходит его со скоростью 7,3 км/с. Перигелий (ближайшая к Солнцу точка ее орбиты) находится на расстоянии 0,6 а.е. от центра Солнца. С какой скоростью станция проходит перигелий? Ответ запишите в км/с, с точностью до десятых, без указания единиц измерения. 1 а.е. – единица измерения расстояний, используемая в астрономии и примерно равная среднему радиусу орбиты Земли.
ОТВЕТ: 51,1.

Комментарий: Афелий и перигелий – симметричные точки эллиптической орбиты небесного тела, движущегося вокруг Солнца, поэтому радиусы кривизны орбиты в этих точках одинаковы. Пусть этот одинаковый радиус равен R. Тогда уравнения для центростремительных компонент ускорения небесного тела массой m в этих точках имеют вид $m\frac{v_{A,P}^2}{R}=\frac{Gm_S m}{r_{A,P}^2}$ (m_S – масса Солнца), откуда следует, что

$$v_P=\frac{r_A}{r_P}v_A.$$

Вопрос 3 (8 баллов):
Пять разных лампочек соединены по схеме, показанной на рисунке. Лампочки являются нелинейными элементами – для всех пяти сила тока через лампу примерно пропорциональна корню квадратному из приложенного напряжения (но с разными коэффициентами). Оказалось, что при подключении этой схемы к источнику постоянного напряжения четыре лампы (с номерами 1-4 на схеме) работают в номинальном режиме, а лампа 5 вовсе не горит и даже не греется. Номинальная мощность лампы 1 равна 4,5 Вт, лампы 2 – 4 Вт, лампы 3 – 7,2 Вт. Чему равна номинальная мощность лампы 4? Ответ запишите в ваттах, с точностью до десятых, без указания единиц.

ОТВЕТ: 6,4.

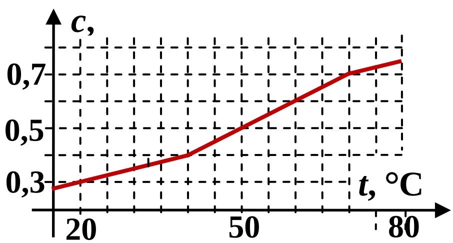


Комментарий: Ясно, что ток через Л5 не течет, поэтому $I_2 = I_1$ и $I_4 = I_3$. Кроме того, напряжение на Л5 равно нулю, поэтому $U_3 = U_1$ и $U_4 = U_2$. Лампа 4 работает в номинальном режиме, поэтому ее номинальная мощность

$$P_4 = U_4 I_4 = U_2 I_3 = \frac{U_2 I_2}{I_1} \frac{U_3 I_3}{U_1} = \frac{P_2 P_3}{P_1}.$$

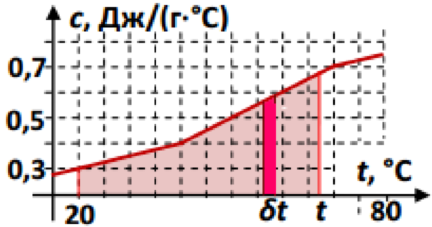
Часть II. *ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ.*

1. («Переменная теплоемкость») В легком калориметре находится 500 г необычной жидкости, удельная теплоемкость которой зависит от температуры. Эта зависимость представлена на графике. Температура жидкости равна 20°С. В калориметр опускают груз массой 275 г из материала с удельной теплоемкостью 3 Дж/(г·°С) с температурой 80°С. Найти температуру содержимого калориметра после установления равновесия. Теплоемкостью калориметра и теплообменом его содержимого с окружающей средой можно пренебречь. С какой точностью получен результат?



Возможное решение:

Из условия теплового баланса ясно, что количество теплоты $Q_+ = c_г m_г (t_2 - t)$, отданное остывающим грузом (здесь $c_г$ и $m_г$ – удельная теплоемкость и масса груза, t_2 – его начальная температура, t – искомая температура), должно равняться количеству теплоты Q_-, поглощенному нагревающейся жидкостью. Для нагревания жидкости при очень маленьком изменении ее температуры (на δt) требуется количество теплоты $\delta Q_- = c(t_{ср}) m_ж \delta t$, где $t_{ср}$ – это средняя температура на участке δt. Нетрудно заметить, что для графика величина $c(t_{ср})\delta t$ равна площади трапеции между участком графика и участком оси температур δt.



Поэтому Q_- можно вычислить (см. рисунок) как площадь под графиком удельной теплоемкости на участке от начальной до конечной температуры жидкости, умноженную на массу жидкости. Как видно, для нагрева жидкости от $t_1 = 20°\text{C}$ до температуры 40°С потребуется количество теплоты $Q_1 = 500\text{г} \cdot \dfrac{0{,}3 + 0{,}4}{2} \dfrac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot °\text{C}} \cdot (40 - 20)°\text{C} = 3500\,\text{Дж}$, что заметно меньше, чем выделится при остывании груза до 40°С. Аналогично можно убедиться, что для нагревания жидкости до 70°С потребуется большее количество теплоты, чем выделит груз в этом случае. Поэтому искомая температура находится на участке от 40°С до 70°С. Пусть $t = 40°\text{C} + \tau$. Уравнение прямой, описывающей поведение удельной теплоемкости на нужном участке можно записать в виде $c(\tau) = 0{,}4 \dfrac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot °\text{C}} + 0{,}01 \dfrac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot (°\text{C})^2} \cdot \tau$.

Уравнение теплового баланса для установления равновесия имеет вид: $Q_1 + m_ж \cdot \dfrac{c(0) + c(\tau)}{2} \tau = m_г \cdot c_г (t_2 - t)$. После подстановки числовых значений для величины $x \equiv \frac{\tau}{1°C}$ получаем квадратное уравнение $x^2 + 410x - 11800 = 0$. Положительный корень этого уравнения $x = \sqrt{53825} - 205 \approx 27{,}002$. Таким образом, $t \approx 67°C$. Сами вычисления являются точными (кроме последнего округления, вносящего ошибку менее 0,01%), поэтому неточность результата связана с использованием данных, извлеченных из графика. Изучение графика показывает, что ошибки в определении удельной теплоемкости в точках «излома» графика (а именно их мы использовали для составления уравнения) не превышают $5 \cdot 10^{-3}$ Дж/(г·°С), в то время как среднее значение теплоемкости жидкости на нужном нам интервале чуть меньше 0,5 Дж/(г·°С). Поэтому вносимую ошибку можно оценить в 1%. Ясно, что примерно такой же должна быть и ошибка в определении τ, и она примерно равна 0,3°С. Значит, $t = (67{,}0 \pm 0{,}3)°C$.

ОТВЕТ: $t = (67{,}0 \pm 0{,}3)°C$.

Примечание: Помимо вычисления количества теплоты через площадь, можно использовать и другие методы – например, аналогию между связью координаты и скорости при неравномерном движении по прямой $v(t) = \left.\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0}$ и связью количества теплоты и переменной теплоемкостью $m \cdot c(t) = \left.\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0}$. Тогда по аналогии с формулой изменения координаты при равноускоренном движении $v(t) = v(0) + at \Rightarrow x(t) - x(0) = v(0)t + \frac{a}{2}t^2$ можно записать формулу для количества теплоты при линейной зависимости теплоемкости от температуры: $c(\tau) = c(0) + k\tau \Rightarrow Q(\tau) = m \cdot \left(c(0)\tau + \frac{k}{2}\tau^2 \right)$. Также допустимы другие способы оценки погрешности (например, интервальный метод). Однако при этом оценка погрешности возрастет.

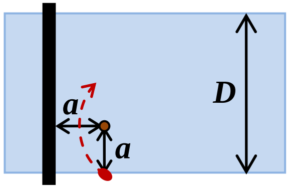
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс. балл**
Записано выражение, эквивалентное $Q_+ = c_г m_г (t_2 - t)$	**2**
Предложен корректный метод вычисления количества теплоты, полученного жидкостью (при линейной зависимости теплоемкости от температуры)	**4**
Установлено, что искомая температура находится на участке от 40°C до 70°C	**3**
Записана (используется в решении) правильная аналитическая формула для зависимости удельной теплоемкости от температуры на нужном участке	**2***
Получено правильное уравнение для искомой температуры, не содержащее неизвестных величин	**3**
Правильно найдена итоговая температура	**4**
Правильно оценена точность результата (ошибка результата указана в интервале от 0,1°C до 1°C)	**2**
ВСЕГО	**20**

*если использовался, например, метод «стрельбы» для подбора нужной температуры (то есть считались Q_+ и Q_- – по площади – для разных t и сравнивались до совпадения с хорошей точностью) без явного использования формулы зависимости, то этот пункт засчитывается <u>при правильном результате</u>.

2. («**На равных расстояниях**») Через реку на ее почти прямолинейном участке шириной D = 170 м сооружен мост, перпендикулярный реке. На расстоянии a = 50 м и от берега, и от моста расположен почти неподвижный небольшой бакен. Катер стартует из точки напротив бакена с ближайшего к нему

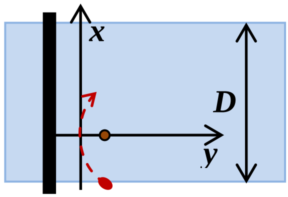
берега (см. рисунок) и движется таким образом, что он все время находится на равных расстояниях от моста и бакена. Кроме того, проекция его скорости на направление, перпендикулярное течению, все время остается постоянной. Катер достигает другого берега за 34 с.



1. На каком расстоянии от моста катер причалит к другому берегу?
2. Чему равны максимальная и минимальная величина ускорения катера относительно берега за время движения?

Возможное решение:

Введем систему координат (x, y), показанную на рисунке, и запишем условие равенства расстояний (начало координат совмещено с ближайшей к мосту точкой траектории катера, и ясно, что эта точка находится на расстоянии $\frac{a}{2}$ и от моста, и от бакена):



$y+\frac{a}{2}=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2}$. Из этого условия находим уравнение траектории катера: $y(x)=\frac{x^2}{2a}$, то есть катер движется по параболе. Из этого уравнения сразу получаем ответ на первый вопрос: при $x=D-a$ координата точки причаливания $y=\frac{(D-a)^2}{2a}$, то есть эта точка находится на расстоянии $L=y+\frac{a}{2}=\frac{(D-a)^2+a^2}{2a}=169$ м от моста. Далее заметим, что, согласно условию, вдоль оси x катер движется с постоянной скоростью $v_x=\frac{D}{T}$ (T – время переправы). Поэтому ускорение катера все время направлено по оси y ($a_x \equiv 0$). Кроме того, ясно, что $x(t) = -a + \frac{D}{T}t$, и поэтому $y(t) = \frac{a}{2} - \frac{D}{T}t + \frac{D^2}{aT^2}\frac{t^2}{2}$. Из закона движения видно, что движение по оси y – это равноускоренное с ускорением $a_y \equiv \frac{D^2}{aT^2}$. Таким образом, величина ускорения катера постоянна, и поэтому максимальная и минимальная величина ускорения катера относительно берега равны друг другу: $|\vec{a}|_{max} = |\vec{a}|_{min} = \frac{D^2}{aT^2} = 0{,}5$ м/с^2.

ОТВЕТЫ: на расстоянии $L = \frac{(D-a)^2 + a^2}{2a} = 169$ м, максимальная и минимальная величина ускорения катера относительно берега равны друг другу: $|\vec{a}|_{max} = |\vec{a}|_{min} = \frac{D^2}{aT^2} = 0{,}5$ м/с^2.

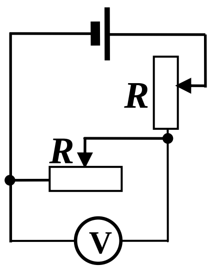
Примечание: На самом деле решение может быть построено и на основании других соображений. Например, можно сразу утверждать, что траектория является параболой, так как заданное в условии свойство траектории является одним из определяющих свойств параболы как кривой, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от некоторой точки (*фокуса* параболы) и некоторой прямой (*директрисы* параболы). То, что ускорение постоянно, можно понять из аналогии между движением катера и движением тела, брошенного в отсутствие сопротивления воздуха под углом к горизонту: именно в этом случае движение с постоянной скоростью вдоль оси x и с постоянным ускорением вдоль оси y дают параболическую траекторию.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Обосновано (любым способом), что траектория катера является параболой	**4**
Правильно найдено численное значение расстояния от моста до точки причаливания	**2+2=4**

Показано, что ускорение направлено по оси y (вдоль реки)	**3**
Показано, что величина ускорения постоянна	**4**
Сделан вывод, что $\lvert\vec{a}\rvert_{max}=\lvert\vec{a}\rvert_{min}$	**1**
Правильно найдена численная величина ускорения	**4**
ВСЕГО	**20**

3. («Косвенные измерения») В схеме, показанной на рисунке, реостаты проградуированы таким образом, что их сопротивления определяются с ошибкой не более 0,1 Ом. Цена деления шкалы вольтметра равна 0,1 В. Показания вольтметра при различных значениях сопротивлений реостатов показаны



в таблице ниже. Определите на основании этих данных ЭДС и внутреннее сопротивление источника. Укажите для каждой величины возможную ошибку ее вычисления.

↓$\boldsymbol{R_1}$\\$\boldsymbol{R_2}$→	24,0 Ом	42,0 Ом
10,0 Ом	23,1 В	26,8 В
18,0 Ом	18,6 В	22,8 В

Возможное решение:

Обозначим искомые величины $\mathcal{E}$ и r, а величину внутреннего сопротивления вольтметра R_V, и выразим через них величину напряжения для на вольтметре: сила тока в ветви с источником

$$I=\frac{\mathcal{E}}{r+R_1+R_V R_2/(R_V+R_2)}=\frac{\mathcal{E}(R_V+R_2)}{(r+R_1)(R_V+R_2)+R_V R_2},$$

и поэтому нужное нам напряжение

$$U=\frac{R_2 R_V}{R_V+R_2}I=\frac{\mathcal{E}R_V R_2}{(r+R_1)(R_V+R_2)+R_V R_2}.$$

Таким образом, результаты измерений дают нам 4 независимых уравнения, содержащих 3 неизвестных ($\mathcal{E}$, r и R_V), среди которых – обе искомые величины. Ясно, что есть много разных способов их вычисления, и среди них есть неэквивалентные. Рассмотрим для примера один из них. Можно обратить внимание, что величина, обратная напряжению на вольтметре, является линейной функцией от $\dfrac{1}{R_2}$: $\dfrac{1}{U}=a+\dfrac{b}{R_2}$, где $a\equiv\dfrac{1}{\mathcal{E}}+\dfrac{1}{\mathcal{E}}\dfrac{r+R_1}{R_V}$ и $b\equiv\dfrac{r+R_1}{\mathcal{E}}$. Для каждого из значений сопротивления первого реостата ($R_1'=10$ Ом и $R_1''=18$ Ом) мы знаем два значения функции $\dfrac{1}{U}$ для двух значений аргумента $\dfrac{1}{R_2}$, что позволяет найти коэффициенты зависимости:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{23{,}1\,\text{В}}=a'+\dfrac{b'}{24\,\text{Ом}}\\ \dfrac{1}{26{,}8\,\text{В}}=a'+\dfrac{b'}{42\,\text{Ом}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a'=\dfrac{2725}{92862}\dfrac{1}{\text{В}}\approx0{,}029345\dfrac{1}{\text{В}}\\ b'=\dfrac{740}{2211}\dfrac{1}{\text{А}}\approx0{,}33469\dfrac{1}{\text{А}}\end{cases},$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{18{,}6\,\text{В}}=a''+\dfrac{b''}{24\,\text{Ом}}\\ \dfrac{1}{22{,}8\,\text{В}}=a''+\dfrac{b''}{42\,\text{Ом}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a''=\dfrac{325}{10602}\dfrac{1}{\text{В}}\approx0{,}03065\dfrac{1}{\text{В}}\\ b''=\dfrac{980}{1767}\dfrac{1}{\text{А}}\approx0{,}55461\dfrac{1}{\text{А}}\end{cases}.$$

Теперь заметим, что можно вычислить $\mathcal{E}=\dfrac{R_1''-R_1'}{b''-b'}\approx36{,}377$ В. С какой точностью определена эта величина? Отметим, что данные задачи даны с довольно высокой точностью: ошибка в определении сопротивлений не превосходит 1% (для большинства значений – несколько десятых долей процента), а ошибка измерения напряжений не более $\dfrac{0{,}05}{18{,}6}\approx0{,}3\%$. Однако в процессе вычислений мы использовали <u>вычитание</u> величин, известных нам приближенно, а при таком действии относительная ошибка может увеличиваться. Например, при нахождении b' было произведено вычитание $\dfrac{1}{23{,}1\,\text{В}}-\dfrac{1}{26{,}8\,\text{В}}\approx0{,}00598\dfrac{1}{\text{В}}$. Если посмотреть максимальную

$\dfrac{1}{(23{,}1-0{,}05)\,\text{В}}-\dfrac{1}{(26{,}8+0{,}05)\,\text{В}}\approx 0{,}00614\,\dfrac{1}{\text{В}}$ и минимальную $\dfrac{1}{(23{,}1+0{,}05)\,\text{В}}-\dfrac{1}{(26{,}8-0{,}05)\,\text{В}}\approx 0{,}00581\,\dfrac{1}{\text{В}}$ возможную величину этой разности, то мы обнаружим, что крайние значения отклоняются от среднего не на 0,2% (ошибка в определении этих напряжений), а на 2,8%! Поэтому ошибка в определении величины ЭДС может достигать 1В. Таким образом, в нашем способе $\mathcal{E}\approx(36{,}4\pm1{,}0)\,\text{В}$. Далее выражаем $r=b'\mathcal{E}-R_1'\approx 2{,}175$ Ом и аналогично $r=b''\mathcal{E}-R_1''\approx 2{,}175$ Ом. Как видно, результат достаточно стабилен, и ошибка в вычислении внутреннего сопротивления определяется ошибками определения входящих в это выражение величин и тем, что в этой формуле производится вычитание близких величин. Анализ интервальным методом показывает, что ошибка может достигать 0,7 Ом. Таким образом, $r\approx(2{,}2\pm0{,}7)$ Ом.

ОТВЕТЫ: $\mathcal{E}\approx(36{,}4\pm1{,}0)\,\text{В}$, $r\approx(2{,}2\pm0{,}7)$ Ом.

Примечание: С точки зрения более строгого подхода, оценки погрешностей, производимые «интервальным» методом, являются несколько завышенными – на самом деле в рамках данного метода $\mathcal{E}\approx(36{,}4\pm0{,}7)\,\text{В}$ и $r\approx(2{,}2\pm0{,}4)$ Ом, но для «школьных» решений такая оценка считается приемлемой. Кроме того, как было отмечено, результат не вполне однозначен из-за «избыточности» системы уравнений. Следует также обратить внимание, что «пошаговые» вычисления с «грубыми» округлениями промежуточных результатов из-за упомянутого увеличения относительной ошибки при вычитаниях близких величин могут привести к численному ответу с очень низкой точностью, даже при использовании правильных формул. Поэтому (см. критерии проверки) допустимы ответы, несколько отличающиеся от полученных в предложенном решении. При этом решения с большими отклонениями считались следствием неаккуратного анализа системы уравнений, и поэтому соответствующие ответы не засчитывались (на самом деле при аккуратном анализе все разумные способы дают, например, для

ЭДС значение от 35 В до 37 В). Отметим, что, получив некоторое приближенное решение, можно провести «корректировку» полученных значений, подставляя их в исходную систему и слегка изменяя для лучшего согласия (в этом случае, конечно, необходимо найти и третью неизвестную – внутреннее сопротивление вольтметра; например, в нашем методе $R_V \approx (180 \pm 50)$ Ом). Такая корректировка позволяет увеличить точность результатов, но значительно увеличивает объем вычислений. Также можно обратить внимание, что использование в формуле значений $\mathcal{E} = 36$ В, $r = 2$ Ом и $R_V = 200$ Ом позволяет (при округлении до соответствующего разряда) «воспроизвести» приведенные в таблице результаты без отклонений.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Получена правильная формула для измеряемого напряжения через параметры схемы	**5**
Используется корректный метод, позволяющий выразить $\mathcal{E}$ и r из данных измерений (записана полная система уравнений и искомые величины выражаются из нее)	**4**
Получено значение ЭДС в интервале от 34,5 В до 37,5 В	**4**
Указана ошибка в определении ЭДС в интервале от 0,4 В до 2 В и значение 36 В находится внутри полученного диапазона	**4**
Получено значение внутреннего сопротивления источника в интервале от 1 Ом до 3 Ом	**4**
Указана ошибка в определении r в интервале от 0,3 Ом до 1 Ом и значение 2 Ом находится внутри полученного диапазона	**4**
ВСЕГО	**25**

Пример задания для 10-х и 11-х классов.

Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только **ответы**) и творческой части (проверялись и оценивались **решения**).

Часть I (тестовое задание): пример варианта.

Вопрос 1 (8 баллов): совпадал с вопросом 1 у 7, 8 и 9 классов.

Вопрос 2 (8 баллов):
Над двумя молями одноатомного идеального газа производят последовательно серию из 12 процессов, каждый из которых состоит из изохорного нагревания и изобарного охлаждения. При этом в первом изохорном процессе температура газа увеличивается на 1,2 К, во втором – на 1,3 К, в третьем – на 1,4 К и так далее. В первом изобарном процессе температура уменьшается на 0,5 К, во втором – на 0,6 К, в третьем – на 0,7 К и так далее. Найдите количество теплоты, сообщенное газу во всех 12 процессах. Ответ запишите в джоулях, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения. Универсальная газовая постоянная примерно равна 8,31 Дж/(моль·К).

ОТВЕТ: 0.

Комментарий: Ясно, что в процессах изохорного нагревания газ получает некоторое количество теплоты Q_+, а в процессах изобарного охлаждения – отдает Q_-. Нам известны молярные теплоемкости одноатомного идеального газа в таких процессах, поэтому $Q_+ = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_V$ и $Q_- = \frac{5}{2}\nu R\Delta T_p$. Суммы изменений температур, как видно, являются суммами арифметических прогрессий: $\Delta T_V = (1{,}2 + 1{,}3 + ... + 2{,}3)\text{К} = +21\text{К}$ и $\Delta T_p = -(0{,}5 + 0{,}6 + ... + 1{,}6)\text{К} = -12{,}6\,\text{К}$. Нетрудно заметить, что полное количество теплоты, которым газ обменялся с внешними телами $Q = Q_+ + Q_- = \frac{\nu R}{2}(3\Delta T_V + 5\Delta T_p) = 0$.

Вопрос 3 (9 баллов):
В электролитическую ванну с раствором серной кислоты погружают на одинаковую глубину h два длинных и тонких вертикальных стержня на небольшом расстоянии друг от друга (диаметр стержней и расстояние между ними намного меньше h). К стержням подключили источник постоянного напряжения, и за 1 минуту в ванне выделилось 21 мг водорода. Затем стержни погрузили в ванну на глубину $2h$, и теперь при подключении того же источника за одну минуту выделилось 31 мг водорода. Какая масса водорода выделится за минуту в аналогичном опыте, если стержни погрузить на глубину $4h$? Сопротивление стержней и внутреннее сопротивление источника намного меньше сопротивления электролита даже при максимальном погружении. Ответ запишите в мг, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

ОТВЕТ: 51.

Комментарий: Так как стержни «длинные и тонкие», и к тому же их сопротивление намного меньше сопротивления электролита, то на участках стержней, удаленных от их концов на некоторое расстояние l, намного большее их толщины, но меньшее h, с единицы длины стержня стекает (для стержня, подключенного к положительному полюсу источника) некоторый постоянный ток. Ток, стекающий с участка этого стержня длины l, практически не зависит от глубины погружения. Потому полный ток, текущий от одного стержня к другому через электролит, является линейной функцией глубины погружения x: $I(x) = I_0 + \alpha \cdot x$. Согласно закону Фарадея для электролиза, масса выделившегося водорода пропорциональна протекшему заряду (на временах порядка минуты ток можно считать постоянным), и поэтому и масса линейно связана с глубиной погружения: $m(x) = m_0 + \beta \cdot x$. Значит, для первого опыта $m_1 = m_0 + \beta \cdot h$, а для второго

$m_2 = m_0 + \beta \cdot 2h$. Из этих соотношений выражаем $\begin{cases} \beta = (m_2 - m_1)/h \\ m_0 = 2m_1 - m_2 \end{cases} \Rightarrow m(x) = 2m_1 - m_2 + (m_2 - m_1)\frac{x}{h}$. Таким образом, $m(4h) = 3m_2 - 2m_1 = 51$ мг.

Часть II (творческое задание).

«ИСТОРИИ ФЕДОРА СИМЕОНОВИЧА КИВРИНА». ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ.

1. («**Темные звезды**», 16 баллов) Однажды, в гостях у Генри Кавендиша, Федор Симеонович прочитал письмо Джона Митчела о «темных звездах» - так Митчел назвал объекты, свет от которых не может дойти до удаленного наблюдателя из-за гравитационного притяжения звезды (нужно отметить, что Митчел использовал закон тяготения Ньютона, механику Ньютона и корпускулярную оптику). Эта идея очень заинтересовала Федора Симеоновича.

1.1. Пользуясь теми же теориями, что и Дж.Митчел, ответьте на вопрос: каким должен быть радиус темной звезды с массой m, чтобы ее не было видно внешнему наблюдателю с расстояния, более чем вдвое превышающего ее радиус? Вычислите этот радиус для массы звезды, равной массе Солнца $m_S \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг. Скорость света считайте равной $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с, гравитационная постоянная $G \approx 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2).

Уже в XX веке он познакомился с решением Карла Шварцшильда в Общей Теории Относительности, описывающим «черные дыры» - объекты, окруженные «горизонтом» событий, из-под которого ничто не может выйти. Однажды коллеги – астрономы рассказали ему о наблюдении необычной звезды, которая вращалась вокруг некоторой точки по окружности радиусом 9 а.е. (1 а.е. – единица измерения расстояний, используемая в астрономии и примерно равная среднему радиусу орбиты Земли) с периодом 10 земных лет, но при этом второго объекта в этой системе не было видно.

1.2. Считая, что вторым объектом в этой системе является темная звезда или черная дыра, определите ее массу.

В другой раз он узнал о наблюдении еще одной «астрофизической черной дыры» (так в физике и астрономии называют реально существующие в космосе объекты, по наблюдаемым проявлениям похожие на шварцшильдовские черные дыры). Астрономам удалось увидеть, как две «блуждающие звезды» прошли мимо этого объекта. Скорость первой относительно объекта на большом расстоянии от него была на 25% больше, чем аналогичная скорость второй, но вектора скоростей обеих звезд в результате прохождения мимо объекта повернулись на один и тот же угол. Минимальное расстояние от траектории первой звезды до объекта было равно 24 а.е., а момент прохождения через точку наибольшего сближения с объектом для второй звезды не удалось зафиксировать из-за пылевого облака, закрывшего часть ее траектории.

1.3. Определите минимальное расстояние от траектории второй звезды до объекта.

Возможное решение:

1.1. В корпускулярной теории света, движение частиц которого подчиняется механике Ньютона, частичка массой δm, стартующая со скоростью c с поверхности сферически симметричной звезды радиуса R и массы m, будет иметь механическую энергию $\delta E = \delta m \cdot \left(\frac{c^2}{2} - \frac{Gm}{R} \right)$. Она не сможет удалиться далее расстояния $2R$ от центра звезды, если $\delta E \le -\frac{Gm}{2R} \delta m$. Таким образом, радиус должен удовлетворять ограничению $R \le \frac{Gm}{c^2}$. Для $m = m_S \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг находим, что максимальный возможный радиус такой темной звезды

$R_S = \dfrac{Gm_S}{c^2} \approx 1{,}5$ км. Ясно, что это значительно меньше радиуса Солнца.

1.2. Видно, что характерные скорости и ускорения движений объектов в этой двойной системе не отличаются радикально по порядку величины от тех, что мы наблюдаем у тел Солнечной Системы, поэтому с хорошей точностью можно использовать законы механики Ньютона. Пусть m – масса наблюдаемой звезды, m_X – масса невидимого компаньона. Если $r = 9$ а.е. – радиус круговой орбиты наблюдаемой звезды, то радиус орбиты невидимого компаньона $R = \dfrac{m}{m_X} r$, и расстояние между звездами $L = R + r = \dfrac{m_X + m}{m_X} r$. Уравнение для центростремительной компоненты ускорения наблюдаемой звезды дает: $\omega^2 r = \dfrac{Gm_X}{L^2} \Rightarrow \dfrac{m_X^3}{(m_X + m)^2} = \dfrac{\omega^2 r^3}{G}$. С учетом того, что для Земли на почти круговой орбите вокруг Солнца $\omega_E^2 a = \dfrac{Gm_S}{a^2} \Rightarrow \omega_E^2 a^3 = Gm_S$, где $a = 1$ а.е., а $\omega_E = \dfrac{2\pi}{T_E}$, $T_E = 1$ год, находим: $\dfrac{m_X^3}{(m_X + m)^2} = \left(\dfrac{r}{a}\right)^3 \left(\dfrac{T_E}{T}\right)^2 m_S = 7{,}29 m_S$. Как видно, данные астрономов не позволяют установить массу невидимого компаньона однозначно. Можно использовать косвенные соображения. Например, «практически круговые» орбиты чаще всего возникают в ситуации, когда одно из тел в образующейся системе намного массивнее остальных. Если считать, что $m << m_X$, то получается, что $m_X \approx 7{,}29 m_S \approx 14{,}6 \cdot 10^{30}$ кг.

Но более правильно в такой ситуации (с «исследовательской» точки зрения) провести анализ возможных значений m_X. Во-первых, можно заметить, что $m_X^3 = 7{,}29 m_S (m_X + m)^2 \geq 7{,}29 m_S m_X^2 \Rightarrow m_X \geq 7{,}29 m_S$. Таким образом, масса невидимого компаньона не менее $7{,}29 m_S$. Во-вторых, масса невидимого компаньона однозначно определяется по массе видимой звезды из полученного уравнения. Например, при $m = m_S$ находим, что $m_X = 9 m_S$, при $m = 10 m_S$ – $m_X \approx 17{,}8 m_S$, при $m = 50 m_S$ – $m_X \approx 38{,}5 m_S$. Для очень больших $m >> 100 m_S$ масса m_X много меньше m и растет пропорционально $m^{2/3}$. В дополнение отметим, что в реальной ситуации масса видимой звезды с хорошей точностью может быть определена по *спектру* ее электромагнитного излучения – спектр очень чувствителен к физическим условиям в звездной фотосфере, которые зависят от массы и возраста звезды.

1.3. Из уравнения движения «блуждающей звезды» в поле тяготения массивного объекта $m\vec{a} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$ ясно, что траектория ее движения не зависит от массы звезды. С другой стороны, эта траектория определяется скоростью на бесконечности v_0, расстоянием наибольшего сближения r_m и величиной GM, характеризующей гравитационное поле. Поэтому угол поворота вектора скорости является однозначной функцией этих величин. Угол – величина безразмерная, а комбинация $GM \cdot (v_0)^x \cdot (r_m)^y$ имеет размерность м$^{3+x+y}$·с$^{-2-x}$. Нетрудно заметить, что единственная безразмерная комбинация ($x = -2, y = -1$) этих величин – это $\frac{GM}{r_m v_0^2}$. Значит, угол поворота вектора относительной скорости зависит от $\frac{GM}{r_m v_0^2}$, и одинаковый угол поворота для двух разных звезд в поле одного объекта возможен, если для их траекторий $r_{m1}v_1^2 = r_{m2}v_2^2$.

Следовательно, $r_{m2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 r_{m1} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 24a = 37{,}5a$. Итак, минимальное расстояние от траектории второй звезды до объекта равнялось 37,5 а.е..

ОТВЕТЫ: радиус указанной темной звезды должен удовлетворять требованию $R \le \frac{Gm}{c^2}$, и для массы, равной массе Солнца, численное значение максимального радиуса $R_S = \frac{Gm_S}{c^2} \approx 1{,}5$ км; масса невидимого компаньона в наблюдаемой двойной системе при с точностью лучше 10% $m_X \approx 15 \cdot 10^{30}$ кг; в общем случае - не менее $7{,}29m_S$, и однозначно определяется по массе видимой звезды m из уравнения $$\frac{m_X^3}{(m_X + m)^2} = \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 m_S = 7{,}29m_S;$$ минимальное расстояние от траектории второй звезды до объекта равнялось 37,5 а.е., или примерно 5,6 млрд.км.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Получено требование $R \le \frac{Gm}{c^2}$	**2**
Найдено, что $R_S \approx 1{,}5$ км	**2**
Получено уравнение, выражающее массу невидимого компаньона только через массу видимой звезды и известные величины	**3**
Показано, что $m_X \ge 7{,}29m_S$, или получен ответ для $m << m_S$	**1**
Проведен анализ зависимости $m_X(m)$ или найдено правильно хотя бы одно значение m_X для m порядка или много больше m_S	**1**

Доказано (любым способом – анализ размерностей, соображения подобия, решение уравнений движения, через законы сохранения и т.д.), что угол поворота в поле массивного объекта можно выразить как функцию от $\frac{GM}{r_m v_0^2}$	**3**
Выведено соотношение $r_{m1}v_1^2 = r_{m2}v_2^2$	**2**
Получен правильный численный ответ в п.1.3 (37,5 а.е.)	**2**
ВСЕГО	**16**

2. («**Тайная субстанция**», 25 баллов) Один из подчиненных Федора Симеоновича – бакалавр черной магии Магнус Федорович Редькин – на протяжении многих лет пытался найти Белый Тезис, созданный Бен Бецалелем. И однажды Федору Симеоновичу удалось найти в манускрипте XVII века сведения об этом артефакте. Согласно манускрипту, Белый Тезис – это сгусток необычной субстанции массой 10 мин (что в метрической системе мер соответствует примерно 5 кг). В отношении свойств этой субстанции были сообщены следующие сведения (приведены в переводе на современный язык с современными единицами измерения):

- уравнение изотермы в координатах давление-объем $pV^2 = const$;
- уравнение изохоры в координатах давление-температура $\frac{p}{T_0 + T} = const$, где $T_0 = 173$ К;
- при постоянных температуре и объеме давление субстанции растет пропорционально квадрату ее массы;
- уравнение адиабаты в координатах плотность-температура является линейной функцией $\rho(T) = \rho_1 + K(T - T_1)$, где коэффициент K не был сообщен.
- Внутренняя энергия массы m субстанции как функция объема и температуры определяется формулой

$U(V,T)=\dfrac{\alpha m^2}{V}+\beta m T^2$, где $\alpha=10^{-12}$ м^5/(кг·с^2), а $\beta=10^{-10}$ м^2/(К^2·с^2).

Пользуясь этими сведениями, ответьте на следующие вопросы:

2.1. Чему равен коэффициент K?

2.2. Чему равен радиус Белого Тезиса и давление в его центре в отсутствие внешнего давления в невесомости (то есть когда давление внутри создается гравитационным притяжением самой субстанции) при температуре субстанции T_0. Считайте, что при этих условиях субстанция подчиняется закону всемирного тяготения Ньютона и ньютоновской механике.

Возможное решение:

2.1. Из информации об изотермическом и изохорном процессе ясно, что величина $\dfrac{p}{T_0+T}$ для субстанции является функцией массы и объема, а pV^2 – функцией массы и температуры. Таким образом, давление должно выражаться формулой $p=\dfrac{f(m)}{V^2}(T_0+T)$. Тогда, с учетом третьего пункта $p=C\dfrac{m^2}{V^2}(T_0+T)$, где $C=const$. Для согласования этой формулы с выражением для внутренней энергии получим уравнение адиабаты для субстанции: при постоянной массе уравнение $\delta Q = pdV + dU = 0$ дает:

$$Cm^2(T_0+T)\frac{dV}{V^2}-\alpha m^2\frac{dV}{V^2}+2\beta mTdT=0 \Rightarrow d\rho=-m\frac{dV}{V^2}=\frac{2\beta T}{C(T_0+T)-\alpha}dT \ .$$

Это уравнение линейно в координатах плотность-температура ($d\rho = K\cdot dT$) только если выполняется равенство $C=\dfrac{\alpha}{T_0}$, причем в этом случае $K=\dfrac{2\beta}{C}=\dfrac{2\beta T_0}{\alpha}=34600$ кг/(м^3·К).

2.2. Ясно, что в указанных условиях Белый Тезис станет шаром со сферически-симметричным распределением массы, в котором силы давления уравновешивают гравитационные силы. В этом случае давление убывает с ростом расстояния от центра. Рассмотрим бесконечно тонкий сферический слой субстанции радиусом r и толщиной dr. Ускорение свободного падения можно записать через массу субстанции $M(r)$, сосредоточенную в шаре под этим слоем: $g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$ (здесь можно воспользоваться аналогией с электростатикой, основанной на похожести закона Кулона и закона всемирного тяготения). С другой стороны, условие равновесия слоя определяет изменение давления субстанции: $dp \cdot 4\pi r^2 = -\rho \cdot 4\pi r^2 dr \cdot g(r) \Rightarrow \frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr} = -GM(r)$. Согласно результату первого пункта, давление $p = \alpha \frac{T_0 + T}{T_0}\rho^2$. При заданной температуре субстанции $T = T_0$ находим, что $p(\rho) = 2\alpha \cdot \rho^2$. Поэтому $4\alpha r^2 \frac{d\rho}{dr} = -GM(r)$. Продифференцируем это соотношение, учитывая, что $\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$, и получим уравнение, определяющее распределение плотности субстанции: $r\frac{d^2\rho}{dr^2} + 2\frac{d\rho}{dr} + \frac{\pi G}{\alpha} r\rho = 0$. Можно заметить, что для функции $z(r) \equiv r \cdot \rho(r)$ это уравнение принимает вид уравнения гармонических колебаний $\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{\pi G}{\alpha} z = 0$. Следовательно, его решение – это комбинация синуса и косинуса, то есть $r \cdot \rho(r) = A\sin(\omega r) + B\cos(\omega r)$, где $\omega \equiv \sqrt{\frac{\pi G}{\alpha}}$. Так как общая масса конечна, то $z(0) = 0$, и поэтому $B = 0$. Таким образом,

$\rho(r)=\dfrac{A}{r}\sin\left(\sqrt{\dfrac{\pi G}{\alpha}}\,r\right)$. Внешняя граница Белого Тезиса в заданных условиях соответствует обращению давления в (а вместе с ним и плотности) в ноль, то есть его радиус R определяется из требования $\sqrt{\dfrac{\pi G}{\alpha}}R=\pi\Rightarrow R=\sqrt{\dfrac{\pi\alpha}{G}}\approx 21{,}7$ см.

Константа A может быть определена по полной массе Белого Тезиса:

$$M=4\pi\int_0^R\rho(r)r^2dr=4\pi A\int_0^R\sin\left(\sqrt{\frac{\pi G}{\alpha}}\,r\right)rdr=\frac{4\pi\alpha}{G}A\Rightarrow A=\frac{GM}{4\pi\alpha}.$$

Теперь можно найти плотность в центре конфигурации $\rho(0)=\left(\dfrac{G}{\alpha}\right)^{3/2}\dfrac{M}{4\sqrt{\pi}}$, и давление в центре Белого Тезиса

$$p(0)=2\alpha\cdot\rho^2(0)=\frac{G^3M^2}{8\pi\alpha^2}\approx 0{,}3\text{ мкПа}.$$

ОТВЕТЫ: $K=\dfrac{2\beta T_0}{\alpha}=34{,}6$ г/(см^3·К); $R=\sqrt{\dfrac{\pi\alpha}{G}}\approx 22$ см,

$$p(0)=\frac{G^3M^2}{8\pi\alpha^2}\approx 0{,}3\text{ мкПа}.$$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Записано уравнение состояния субстанции, эквивалентное $p=\dfrac{f(m)}{V^2}(T_0+T)$	**1**
Это уравнение приведено к виду $p=C\dfrac{m^2}{V^2}(T_0+T)$	**1**
Получено уравнение адиабаты в координатах плотность-температура, следующее из уравнения состояния и выражения для внутренней энергии, в дифференциальной или интегральной форме	**3**

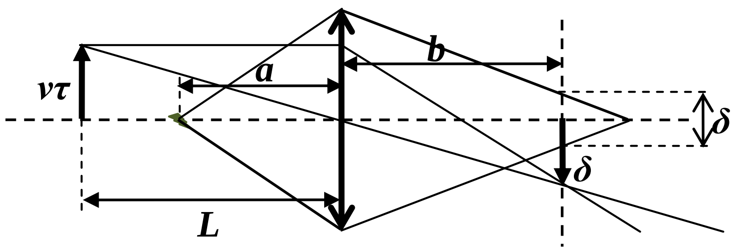
Найдено соотношение $C = \dfrac{\alpha}{T_0}$ (если это соотношение корректно доказано из других соображений – например, из существования энтропии как функции состояния субстанции, то этот пункт засчитывается вместе с предыдущим)	**3**
Получена формула $K = \dfrac{2\beta T_0}{\alpha}$	**3**
Получено правильное численное значение $K = 34{,}6$ г/(см^3·К)	**1**
Записано соотношение для изменения ускорения свободного падения внутри Белого Тезиса, эквивалентное $g(r) = \dfrac{GM(r)}{r^2}$	**1**
Записано условие равновесия сферического слоя или иное уравнение, эквивалентное $\dfrac{r^2}{\rho}\dfrac{dp}{dr} = -GM(r)$	**1**
Явно получено правильное уравнение для функции $\rho(r)$, не содержащее неизвестных величин	**2**
Получено решение вида $\rho(r) = \dfrac{A}{r}\sin\left(\sqrt{\dfrac{\pi G}{\alpha}}\, r\right)$	**3**
Найдены правильная формула и численное значение $R = \sqrt{\dfrac{\pi\alpha}{G}} \approx 21{,}7$ см	**2+1=3**
Найдены правильная формула и численное значение $p(0) = \dfrac{G^3 M^2}{8\pi\alpha^2} \approx 0{,}3$ мкПа	**2+1=3**
ВСЕГО	**25**

3. («**Быстрые птицы**», 14 баллов) В погожий весенний день Федор Симеонович отправился в парк фотографировать птиц.

Он взял с собой старинный фотоаппарат, в котором использовались фотопластинки, и оборудование для проявления пластинок на месте. В одном месте птицы постоянно летали через ручей, и Федор Симеонович установил аппарат на расстоянии L = 7 м от линии их полетов. Повозившись с настройками, он обнаружил, что все, даже самые быстрые птицы получались на снимках четкими, если время экспозиции пластин не превышало τ = 2 мс. При этом листья деревьев, находящиеся на расстояниях менее l = 4 м от объектива, оказывались размытыми. Диаметр объектива его фотоаппарата равнялся d = 24 мм. С какой скоростью летали самые быстрые птицы в парке?

Возможное решение:

Договоримся, что изображение считается четким, если размер светового пятна на фотопластинке от очень маленького («точечного») элемента объекта не превышает размера зерна фотоэмульсии. Обозначим размер зерна δ. Будем также считать объектив фотоаппарата тонкой линзой (ясно, что она должна быть собирающей), и обозначим расстояние от объектива до фотопластинки во время съемки b. Тогда (см. рисунок) ясно,



что условие четкости изображения движущейся со скоростью птицы – это $\frac{b}{L}v\tau \le \delta$. Поэтому скорость «самых быстрых» птиц $v_m = \frac{L\delta}{b\tau}$. С другой стороны, изображение «малого» элемента листа, находящегося на расстоянии $a \le l$ от объектива, не попадает на фотопластинку, так как оно находится на расстоянии $b' \ne b$. Поэтому размер пятна на фотопластинке от этого элемента $\frac{b'-b}{b'}d \geq \delta$. Значит, при $a=l$ величина b' такова, что $\delta = \frac{b'-b}{b'}d$. Таким образом, $v_m = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)\frac{Ld}{\tau}$. С учетом формулы тонкой линзы, оптическая сила объектива $D = \frac{1}{L} + \frac{1}{b} = \frac{1}{l} + \frac{1}{b'}$. Из этого соотношения следует, что $\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{l} - \frac{1}{L}$. Подставляя этот результат в формулу для скорости, получаем $v_m = \left(\frac{L}{l} - 1\right)\frac{d}{\tau} = 9$ м/с.

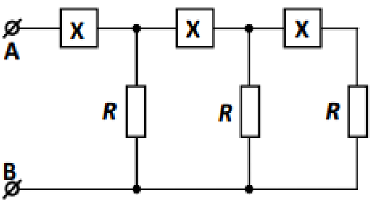
ОТВЕТ: $v_m = \left(\frac{L}{l} - 1\right)\frac{d}{\tau} = 9$ м/с.

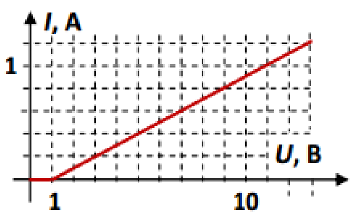
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Корректно сформулировано условие четкости изображения	**1**
Есть правильное построение (или вычисление), позволяющее связать смещение элемента движущегося объекта и размер его изображения	**1**
Записано условие четкости изображения птиц, эквивалентное $\frac{b}{L}v\tau \leq \delta$	**2**
Указано (используется в решении), что размытость изображения элементов листьев связано со смещением их изображений от плоскости фотопластинки	**1**
Есть правильное построение (или вычисление), позволяющее связать положение изображения элемента с размытостью пятна от него на фотопластинке	**1**
Указано, что для $a=l$ должно выполнятся соотношение, эквивалентное $\delta = \frac{b'-b}{b'}d$	**2**

Записана формула линзы: в форме $D=\frac{1}{L}+\frac{1}{b}$ и в форме $D=\frac{1}{l}+\frac{1}{b'}$	**1+1=2**
Получен аналитический ответ для скорости $v_m=\left(\frac{L}{l}-1\right)\frac{d}{\tau}$	**3**
Получен правильный численный ответ для скорости	**1**
ВСЕГО	**14**

4.(«**Конечная цепь**», 20 баллов) Федор Симеонович очень любил давать сотрудникам отдела линейного счастья задания, которые те выполняли с удовольствием. Одному из лаборантов очень нравилось проводить измерения с помощью точных цифровых мультиметров, и Федор Симеонович поручил ему снять вольт-амперную характеристику цепи АВ из трех одинаковых звеньев, содержащих нелинейные элементы X и резисторы с сопротивлением R = 5 Ом (см. рисунок слева). График полученной лаборантом ВАХ показан на рисунке справа. Взглянув на график, Федор Сименович заметил, что следует продолжить измерения – по крайней мере до значения входного напряжения, равного 30 В. Он также сообщил, что ВАХ самого элемента X состоит из прямолинейных отрезков и содержит две точки «излома» на участке от нулевого до максимального разрешенного для X значения напряжения, равного 40 В.





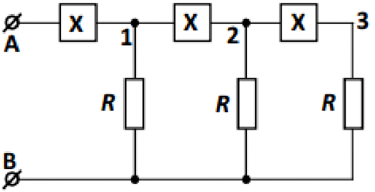
4.1. Укажите координаты точек излома (U,I) на ВАХ элемента X.

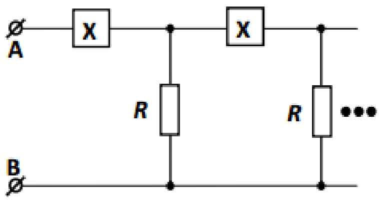
4.2. Какова сила тока через элемент X при напряжении, равном 6 В?

4.3. При каком значении входного напряжения лаборант обнаружит вторую точку излома на ВАХ цепи АВ?

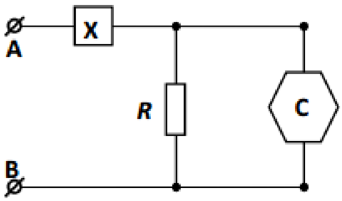
Возможное решение:

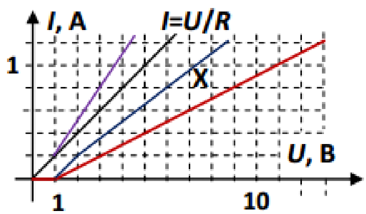
Заметим, что при напряжениях, меньших 1 В, ток через цепь АВ не течет. Так как через резистор ненулевой ток течет при любом ненулевом напряжении, то это свойство цепи связано со свойствами элемента Х – именно он имеет некоторое «пороговое» напряжение, ниже которого не пропускает ток. Из этого ясно, что при повышении входного напряжения сначала ток начинает течь только через первое звено X-R, затем через первое и второе, а затем уже – через все три. Поэтому, если рассмотреть «модифицированную» цепь, состоящую из **бесконечного** числа таких звеньев, то на участке значений входного напряжения, при которых в бесконечной цепи ток еще **не затекает** в четвертое звено, ВАХ конечной и бесконечной цепей будут совпадать! С другой стороны, бесконечная цепь при «отсечении»





одного звена не изменяется, поэтому ее схему можно перерисовать в виде, показанном на рисунке слева (шестиугольником обозначена бесконечная цепь, ВАХ которой





при небольших входных напряжениях совпадает с ВАХ, полученной лаборантом). Если на том же графике, на котором построена эта ВАХ, построить ВАХ резистора (это прямая $I = \dfrac{U}{R}$), то, суммируя значения сил тока через резистор и через цепь при одинаковых значениях напряжений, мы, в соответствии с законами параллельного соединения, получим ВАХ параллельного соединения резистора и всей схемы (ниже $U = 1$В она совпадает с ВАХ резистора, а выше изображена «фиолетовой» прямой на рисунке справа). Но тогда ВАХ элемента X может получена из законов последовательного соединения, то есть путем вычитания из величины напряжения на всей цепи величины напряжения на параллельном соединении резистора и цепи при одинаковых значениях силы тока: ниже $U = 1$В ток через элемент X равен нулю, а при более высоких значениях напряжения ВАХ элемента X дается «синей» ломанной кривой.

Можно «для проверки» посмотреть распределение токов и напряжений, например, при максимальном изученном лаборантом входном напряжении $U_0 = 13$В. Как видно из ВАХ цепи, сила входного тока при этом равна $I_0 = 1{,}2$А. По ВАХ элемента X находим, что при этом токе напряжение на элементе X в первом звене $U_{X1} = \dfrac{26}{3}$В, и поэтому напряжение на резисторе первого звена $U_{R1} = U_0 - U_{X1} = \dfrac{13}{3}$В, а ток через него $I_{R1} = \dfrac{U_{R1}}{R} = \dfrac{13}{15}$А. Тогда ток через элемент X второго звена $I_{X2} = I_0 - I_{R1} = \dfrac{1}{3}$А, и напряжение на этом элементе $U_{X2} = \dfrac{26}{9}$В. Значит, $U_{R2} = U_{R1} - U_{X2} = \dfrac{13}{9}$В, а $I_{R2} = \dfrac{U_{R2}}{R} = \dfrac{13}{45}$А. Повторяя рассуждения еще раз, обнаруживаем, что $I_{X3} = \dfrac{2}{45}$А, $U_{X3} = \dfrac{11}{9}$В и $U_{R3} = \dfrac{2}{9}$В, то есть меньше 1 В, и даже при максимальном использованном лаборантом напряжении ток в бесконечной цепи не затекает дальше третьего звена, то есть ее ВАХ не отличается от ВАХ исследуемой конечной цепи.

Но на самом деле можно было бы обойтись и без этого – согласно информации из условия, на кусочно-линейной ВАХ элемента Х есть всего два излома вплоть до максимального значения напряжения, а мы уже нашли оба: первая точка излома имеет координаты $(U_1, I_1) = (1\,\text{В}, 0\,\text{А})$, а вторая – координаты $(U_2, I_2) = (2\,\text{В}, 0{,}2\,\text{А})$. Поэтому нам известна **вся** ВАХ элемента Х! В частности, мы легко находим, что при $U_X = 6\,\text{В}$ сила тока через элемент Х равна $I_X = 0{,}8\,\text{А}$.

Кроме того, поскольку других изломов на ВАХ элемента Х нет (а на ВАХ резистора их и вовсе не бывает), то новый излом на ВАХ всей цепи появится в тот момент, когда цепь «вспомнит», что она на самом деле отличается от бесконечной. Это произойдет при значении входного напряжения, при превышении которого в бесконечной цепи появится ток, затекающей в четвертое звено (у настоящей конечной схемы его попросту нет). Значит, при этом значении входного напряжения $U_{R3} = 1\,\text{В}$. Проводя анализ в «обратном» по отношению к примеру выше порядке, находим: так как еще $I_{X4} = 0$, то $I_{X3} = I_{R3} = 0{,}2\,\text{А}$, и $U_{X3} = 2\,\text{В}$. Далее: $U_{R2} = U_{R3} + U_{X3} = 3\,\text{В}$, $I_{R2} = 0{,}6\,\text{А}$, и поэтому $I_{X2} = I_{X3} + I_{R2} = 0{,}8\,\text{А}$, а $U_{X2} = 6\,\text{В}$. Еще одна «итерация» дает $U_{R1} = U_{R2} + U_{X2} = 9\,\text{В}$, $I_{R1} = 1{,}8\,\text{А}$, и $I_{X1} = I_{X2} + I_{R1} = 2{,}6\,\text{А}$. Продолжив ВАХ элемента Х до таких величин силы тока, найдем, что оно достигается при $U_{X1} = 18\,\text{В}$. Таким образом, входное напряжение для этого состояния схемы $U = U_{X1} + U_{R1} = 27\,\text{В}$. Итак, новый излом на ВАХ цепи возникнет при значении входного напряжения 27 В. Можно отметить замечательную интуицию Федора Симеоновича, который сразу предложил снять ВАХ цепи до напряжения 30 В.

ОТВЕТЫ: первая точка излома имеет координаты $(U_1, I_1) = (1\,\text{В}, 0\,\text{А})$, а вторая – координаты $(U_2, I_2) = (2\,\text{В}, 0{,}2\,\text{А})$; при $U_X = 6\,\text{В}$ сила тока через элемент Х равна $I_X = 0{,}8\,\text{А}$; новый излом на ВАХ цепи возникнет при значении входного напряжения $U = 27\,\text{В}$.

Примечание: Альтернативный (алгебраический) возможный подход состоит в том, чтобы строить ВАХ элемента X как набор прямых: сначала «нейтральный» участок с нулевым током, который должен продолжаться до первой точки излома – значения $U_1 = 1\text{В}$. Затем для следующего линейного участка уравнение ВАХ задается в виде линейной функции, график которой проходит через точку первого излома, то есть $I = a \cdot (U - U_1)$. Для этого участка <u>вычислением</u> с произвольным a получается уравнение ВАХ цепи выше точки первого излома, и сравнением с наблюдаемой ВАХ определяется a. Далее находится точка, с которой возникает рассогласование с наблюдаемой ВАХ, находится вторая точка излома, и записывается уравнение для нового линейного продолжения. В целом этот метод более громоздкий по вычислениям, однако и здесь решение можно существенно упростить, если заметить, что при небольшом превышении порогового напряжения ненулевой ток есть только в первом звене, а затем уже появляется ток во втором звене и так далее. Отметим, что правильное аналитическое выражение для ВАХ элемента X имеет вид:

$$I_X = \begin{cases} 0, & U_X \le 1\,\text{В} \\ \dfrac{U_X - 1\text{В}}{5\text{ Ом}}, & 1\text{В} < U_X \le 2\,\text{В} \\ \dfrac{3U_X - 2\,\text{В}}{20\text{ Ом}}, & 2\,\text{В} < U_X \le 40\,\text{В} \end{cases}.$$

ВАХ нашей (конечной!) цепи с такими элементами X описывается следующими выражениями:

$$I_C = \begin{cases} 0, & U_C \le 1\,\text{В} \\ \dfrac{U_C - 1\text{В}}{10\text{ Ом}}, & 1\text{В} < U_C \le 27\,\text{В} \\ \dfrac{273U_C - 260\,\text{В}}{2735\text{ Ом}}, & 27\,\text{В} < U_C \le U_{\max} \end{cases}.$$

При превышении входного напряжения цепи $U_{\max} = \dfrac{147295}{2457}\,\text{В} \approx 59{,}95\,\text{В}$ напряжение на элементе X в первом звене превысит максимальную допустимую величину 40В. Отметим, что в точке второго излома ВАХ цепи $(U_c, I_c) = (27\,\text{В}, 2{,}6\,\text{А})$ коэффициент наклона ВАХ уменьшается менее чем на 0,2% - «на глаз» этот излом практически незаметен, но он все же есть. У бесконечной цепи никаких новых изломов ВАХ, кроме излома из-за открытия первого элемента X, не появилось бы.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Отмечена (используется в решении) необходимость существования ненулевого «напряжения открытия» у элемента X	**2**
Отмечено (используется в решении), что при низких значениях входного напряжения ненулевой ток сначала появляется только в первом звене, затем уже во втором и в третьем.	**2**
Предложен корректный метод решения: используется переход к бесконечной цепи или используется метод последовательного построения линейных участков ВАХ элемента X.	**3**
Найдено положение первой точки излома на ВАХ элемента X $(U_1, I_1) = (1\text{В}, 0\,\text{А})$	**2**
Найдено положение второй точки излома на ВАХ элемента X $(U_2, I_2) = (2\,\text{В}, 0{,}2\,\text{А})$	**3**
Правильно найдено (построением или вычислением) продолжение ВАХ элемента X выше второй точки излома	**3**
Правильно найдено значение силы тока через элемент X при $U_X = 6\,\text{В}$	**2**
Правильно найдено значение входного напряжения, при котором возникает еще один излом на ВАХ цепи	**3**
ВСЕГО	**20**

Заключительный этап олимпиады школьников «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

На выполнение задания на заключительном этапе выделялось 3 часа, и еще 20 минут давалось на сканирование и загрузку решений.

Пример задания для 7-9 классов

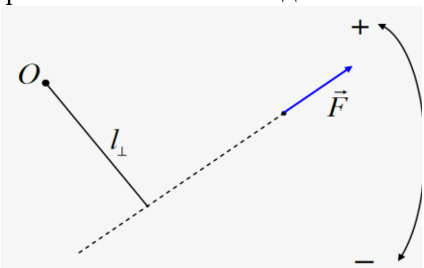
Максимальная оценка за вопрос – 5 баллов, максимальная оценка за задачу – 20 баллов.

Задание 1.

Вопрос: Дайте определение момента силы.

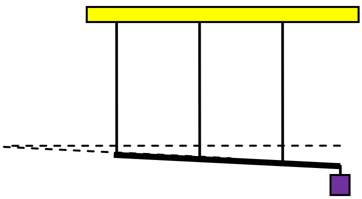
Задача: Однородный стержень длиной $L = 80$ см с массой $M = 900$ г подвешен к горизонтальному потолку на трех одинаковых длинных нитях. Нити можно считать нерастяжимыми и невесомыми, а точки прикрепления их к потолку выбраны так, что все три нити практически вертикальны. При этом одна из нитей (далее – «первая») прикреплена к «левому» концу стержня, вторая – к точке на расстоянии $l = \frac{3}{8}L$ от первой нити, третья – на таком же расстоянии от второй. К «правому» концу стержня прикрепляют маленький по размерам груз. При какой массе этого груза первая нить провиснет?

Ответ на вопрос: Плечом силы относительно оси называют расстояние от оси до линии действия силы (в школьной



программе рассматриваются только случаи, когда ось перпендикулярна плоскости возможного вращения тела). **Момент силы** – произведение величины силы на ее плечо, взятое со знаком + (-), если сила вращает тело вокруг оси в положительном (отрицательном) направлении: $M = \pm|\vec{F}|\cdot l_\perp$.

Решение задачи: На стержень действуют силы натяжения нитей $T_{1,2,3}$, сила тяжести (приложенная к его середине, так как стержень однородный) и вес груза массой m. Условия равновесия стержня – это условие равенства нулю суммы действующих на него сил, то есть $T_1 + T_2 + T_3 = (M + m)g$, и условие равенства нулю суммы моментов этих сил (например, относительно точки прикрепления третьей нити): $T_1 \frac{3L}{4} + T_2 \frac{3L}{8} + mg\frac{L}{4} = Mg\frac{L}{4}$, то есть $6T_1 + 3T_2 = 2(M - m)g$. Этих уравнений не хватает для однозначного определения сил натяжения нитей. Если дополнительно *предположить*, что все три нити натянуты, то можно получить еще одно уравнение. Силы упругости нитей пропорциональны их деформациям, которые малы, но все же отличны от нуля. Естественно считать, что деформации стержня и потолка еще во много раз меньше, и поэтому деформации нитей – это отрезки трех параллельных прямых между сторонами одного угла. Так как вторая нить находится точно посередине между первой и третьей, то ее



деформация есть точно полусумма деформаций этих нитей, или $2x_2 = x_1 + x_3$ (см. рисунок, на котором для наглядности деформации показаны увеличенными). Нити по условию одинаковы, поэтому коэффициенты жесткости у них также одинаковы, и поэтому $2T_2 = T_1 + T_3$. Из этого уравнения и условия равновесия сил сразу получается, что $3T_2 = (M + m)g$. Используя уравнение моментов, находим $T_1 = \frac{1}{6}(M - 3m)g$. Предположение о натянутости первой нити выполняется, если $T_1 > 0$. Следовательно, первая нить провиснет, если $m \geq \frac{M}{3} = 300$ г. Нетрудно проверить, что две другие нити при $m = 300$ г еще натянуты: так как третья нить прикреплена точно между грузом и центром масс стержня, то следующей провиснет вторая нить, если масса груза достигнет массы стержня.

ОТВЕТ: первая нить провиснет при $m \geq \dfrac{M}{3} = 300$ г.

Задание 2.

Вопрос: В сосуде с водой плавает плот, на котором лежит деревянный брусок. Что произойдет с уровнем воды в сосуде, если брусок переместить в воду? Ответ обосновать. Плотность дерева меньше плотности воды.

Задача: В большом калориметре находится вода с температурой $t_0 = 0°C$. Алюминиевый цилиндр повесили на тонкой легкой прочной нити, прикрепленной другим концом к крючку динамометра. В воздухе динамометр показал, что сила натяжения нити при покоящемся цилиндре равна $T_0 = 6$ Н. Цилиндр на некоторое время опустили в сосуд Дьюара с жидким азотом (температура которого $t_1 = -196°C$). Затем его опустили в калориметр с водой. Какой стала сила натяжения нити – сразу после опускания цилиндра в воду (цилиндр не касался дна и стенок калориметра), и после установления равновесия? Плотность льда равна 900 кг/м^3, плотность воды – 1000 кг/м^3, алюминия – 2700 кг/м^3. Удельная теплота плавления льда 336 кДж/кг, удельная теплоемкость алюминия 0,9 кДж/(кг·°С). Считать, что у стенок и дна калориметра всегда остается жидкая вода.

Ответ на вопрос: Когда брусок лежал на плоту, то, согласно закону Архимеда, вытесненный им из-под «ватерлинии» плота (то есть из-под поверхности окружающей воды) объем воды был равен отношению массы бруска к плотности воды. Упав в воду, брусок, плавающий на ее поверхности, вытесняет из-под поверхности окружающей воды объем, равный отношению своей массы к плотности воды, то есть точно такой же. Значит, уровень воды в тазике останется неизменным.

Решение задачи: Когда цилиндр находится в воздухе, сила натяжения нити уравновешивает силу тяжести груза, то есть $T_0 = mg$. Сразу после опускания цилиндр в воду, пока льда на нем еще нет, на цилиндр со стороны воды действует сила Архимеда, равная $F_A = \rho_B V_Ц g = \dfrac{\rho_B}{\rho_A} mg$. Эта сила разгружает нить, то есть сила натяжения нити $T = mg - F_A = T_0\left(1 - \dfrac{\rho_B}{\rho_A}\right) \approx 3{,}78$ Н. Далее на цилиндр намораживается лед. За счет теплоты кристаллизации цилиндр прогревается до равновесной температуры $t_0 = 0°C$, поэтому масса образовавшегося льда находится из уравнения теплового баланса: $mc_A(t_0 - t_1) = \lambda m_Л \Rightarrow \dfrac{m_Л}{m} = \dfrac{c_A(t_0 - t_1)}{\lambda}$. Образование льда увеличивает силу, разгружающую нить: она равна разности силы Архимеда, действующей на лед и веса этого льда (плотность льда меньше плотности воды), то есть $\rho_B V_Л g - \rho_Л V_Л g = \left(\dfrac{\rho_B}{\rho_Л} - 1\right) m_Л g$. Поэтому после установления теплового равновесия сила натяжения нити $T' = T - T_0 \dfrac{m_Л}{m}\left(\dfrac{\rho_B}{\rho_Л} - 1\right) = T_0\left(1 - \dfrac{\rho_B}{\rho_A} - \dfrac{c_A(t_0 - t_1)}{\lambda}\dfrac{\rho_B - \rho_Л}{\rho_Л}\right) \approx 3{,}43$ Н.

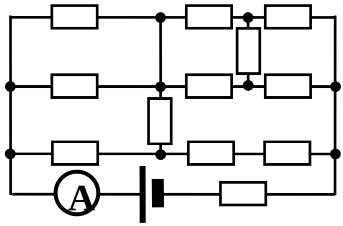
ОТВЕТ: $T = mg - F_A = T_0\left(1 - \dfrac{\rho_B}{\rho_A}\right) \approx 3{,}78$ Н,

$$T' = T_0\left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_A} - \frac{c_A(t_0 - t_1)}{\lambda}\frac{\rho_B - \rho_Л}{\rho_Л}\right) \approx 3{,}43 \text{ Н}.$$

Задание 3.

Вопрос: Дайте определение ЭДС источника постоянного тока. Какими физическими причинами обусловлено ее существование?

Задача: Ученик 9 класса собрал цепь, схема которой показана на рисунке, из аккумулятора, 12 одинаковых резисторов с сопротивлением $R = 19$ Ом и амперметра. Амперметр, который можно считать идеальным,

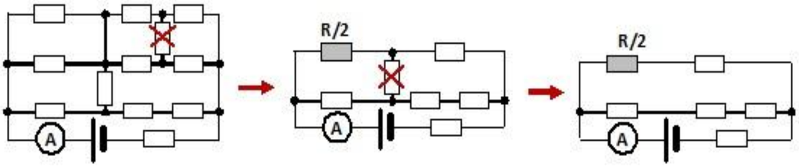


показывает силу тока $I = 0{,}4$ А. Если подключить к аккумулятору только этот амперметр, то он будет показывать силу тока $I_0 = 8{,}0$ А. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление аккумулятора.

Ответ на вопрос: Для поддержания тока в электрической цепи источник должен производить разделение и перемещение зарядов, «поставляя» заряды на свой положительный полюс. При этом электростатические силы препятствуют этому, так как одноименные заряды отталкиваются. Поэтому работу по разделению и перемещению зарядов должны производит силы иного (не электростатического) происхождения. Их называют *сторонними* силами источника. Одна из основных характеристик источника – его электродвижущая сила (ЭДС), равная отношению работы сторонних сил по перемещению заряда через источник к величине этого заряда: $\mathcal{E} \equiv \frac{A_{стор}}{q}$.

Природа сторонних сил может быть различна. Например, разделение зарядов возможно за счет механической работы (электрофорная машина), тепловой энергии (термогенерторы, элементы Пельтье), излучения (фотоэлементы, солнечные батареи), химических реакций (гальванические элементы, химические источники тока). В технике наиболее широко используются индукционные генераторы, работающие за счет явления электромагнитной индукции.

Решение задачи: Преобразуем схему, упростив ее. Сначала заметим, что верхний из «поперечных» резисторов



включен между точками с одинаковым потенциалом («правый верхний» угол схемы – сбалансированный мост). Поэтому его можно убрать из схемы без изменения токов в остальных ее элементах. После этого в верхней части образуются две пары параллельно соединенных участков, которые можно заменить на резисторы с сопротивлениями $\frac{R}{2}$ и R. Тогда в схеме образуется еще один сбалансированный мост, и второй «поперечный» резистор тоже можно убрать. Таким образом, нагрузка источника – это еще одно сопротивление R и два параллельно подключенных участка с сопротивлением $R' = \frac{(3R/2)3R}{9R/2} = R$. Итак, ток, измеряемый амперметром, удовлетворят соотношению $I(2R + r) = \mathcal{E}$. С другой стороны, для тока короткого замыкания источника $I_0 r = \mathcal{E}$. Разделив эти соотношения друг на друга, находим, что внутреннее сопротивление источника $r = \frac{2I}{I_0 - I}R = 2$ Ом. Следовательно, его ЭДС $\mathcal{E} = \frac{2I_0 I}{I_0 - I}R = 16$ В.

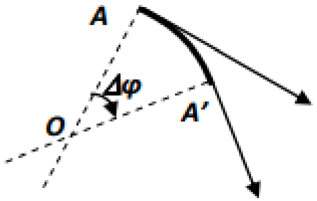
ОТВЕТ: $r = \frac{2I}{I_0 - I}R = 2$ Ом, $\mathcal{E} = \frac{2I_0 I}{I_0 - I}R = 16$ В.

Задание 4.

Вопрос: Что такое радиус кривизны криволинейной траектории?

Задача: Электронная мышка (ЭМ) всегда бежит в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей ее с электронной кошкой (ЭК) с постоянной по величине скоростью $u = 2$ м/с. ЭК всегда бежит по направлению к ЭМ с постоянной по величине скоростью $V = 1$ м/с. В интересующем нас случае погоня началась, когда расстояние между ЭК и ЭМ $l_0 = 5$ м. Сколько времени будет длиться погоня? Во сколько раз могут отличаться ускорения ЭК и ЭМ в ходе погони?

Ответ на вопрос: При описании криволинейного движения материальной точки используется то, что бесконечно малый участок траектории всегда можно представить как дугу окружности, на которой вектор скорости поворачивается на тот же угол. Действительно, если на малом участке траектории длиной Δl вектор скорости (вместе с направлением касательной к траектории) поворачивается на угол $\Delta\varphi$, то мгновенный центр вращения лежит на пересечении перпендикуляров к векторам скорости в начале и конце участка. В пределе $\Delta l \to 0$ $|OA| = |OA'| \equiv R$. Величину R называют *радиусом кривизны траектории в точке А*. Как видно из определения, эту величину можно находить из геометрических соображений:



$$\Delta l = R\Delta\varphi \Rightarrow \quad R = \left(\frac{\Delta l}{\Delta\varphi}\right)_{\Delta\varphi\to 0},$$

или из кинематических:

$$v = R\omega \Rightarrow \quad R = \frac{v}{\omega}$$

(ясно, что с учетом определения линейной $v = \dfrac{\Delta l}{\Delta t}$ и угловой $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ скоростей эти способы полностью эквивалентны). В действительности связь между Δl и $\Delta\varphi$ - чисто геометрическое соотношение, поэтому R есть геометрическая характеристика данного участка траектории. Ясно, что R <u>не зависит</u> от линейной и угловой скоростей: для двух тел, движущихся по одной и той же траектории с разными скоростями, радиус кривизны в любой из точек траектории одинаков. Эта величина входит в выражение для центростремительной (направленной к мгновенному центру вращения) компоненты ускорения точки: $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

Решение задачи: Рассмотрим движение ЭК и ЭМ в окрестности некоторого момента времени. Ясно, что за любой малый интервал времени Δt расстояние между ними сократится благодаря движению ЭК на $V\Delta t$, и поэтому длительность погони $\tau = \dfrac{l_0}{V} = 5$ с.

Так как модули скоростей ЭМ и ЭК не изменяются, то их ускорения определяются радиусами кривизны их траекторий. А радиусы кривизны определяются поворотом векторов их скорости на малом участке траекторий. Угол между скоростями ЭМ и ЭК постоянный (он равен 90°), так что они поворачиваются на один и тот же угол. А отношение длин малых участков пройденных ими малых участков траекторий равно отношению модулей скоростей, поэтому и радиусы кривизны траекторий ЭК и ЭМ равны тому же отношению модулей скоростей: $\dfrac{R_{ЭК}}{R_{ЭМ}} = \dfrac{V}{u}$. Следовательно, $\dfrac{a_{ЭМ}}{a_{ЭК}} = \dfrac{u^2}{R_{ЭМ}}\dfrac{R_{ЭК}}{V^2} = \dfrac{u}{V} = 2$. На самом деле можно (хоть это и не обязательно для ответа на вопрос задачи) явно вычислить радиусы кривизны и ускорения:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta\alpha_{ЭМ} = \Delta\alpha_{ЭК} = \dfrac{u\,\Delta t}{l} \\ \Delta s_{ЭМ} = u\,\Delta t \\ \Delta s_{ЭК} = V\Delta t \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R_{ЭМ} = \dfrac{\Delta s_{ЭМ}}{\Delta\alpha_{ЭМ}} = l \Rightarrow a_{ЭМ} = \dfrac{u^2}{l} \\ R_{ЭК} = \dfrac{\Delta s_{ЭК}}{\Delta\alpha_{ЭК}} = \dfrac{V}{u} l \Rightarrow a_{ЭК} = \dfrac{Vu}{l} \end{array}\right.$$

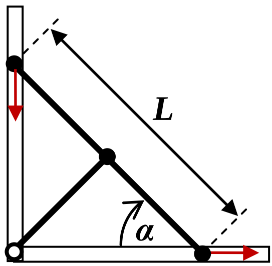
Таким образом, на протяжении всей погони отношение ускорений неизменно: $\dfrac{a_{ЭМ}}{a_{ЭК}} \equiv \dfrac{u}{V} = 2$.

ОТВЕТ: $\tau = \dfrac{l_0}{V} = 5$ с, отношение ускорений постоянно и равно $\dfrac{a_{ЭМ}}{a_{ЭК}} \equiv \dfrac{u}{V} = 2$.

Пример задания для 10-11 классов
Максимальная оценка за вопрос – 5 баллов, максимальная оценка за задачу – 20 баллов.

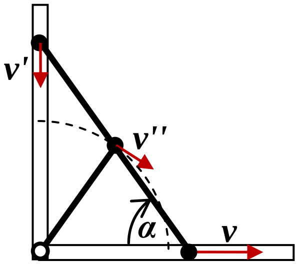
Задание 1.
Вопрос: Жесткий стержень движется в плоскости. В некоторый момент времени скорость одного из его концов равна 0,5 м/с и направлена вдоль стержня. В тот же момент времени скорость другого конца стержня равна 1 м/с. Под каким углом к стержню направлена эта скорость?

Задача: Три одинаковых массивных шарика прикреплены к концам и к середине легкого жесткого стержня длиной $L = 80$ см. Крайние шарики могут скользить по вертикальной и горизонтальной направляющим (см. рисунок). Средний шарик шарнирно соединен с легким жестким стержнем вдвое меньшей длины, второй конец которого шарнирно прикреплен к перекрестью направляющих. Изначально стержень располагают вертикально, а затем отпускают без начальной скорости. стержень будет Трения нигде нет, крайние шарики не отрываются от направляющих и не застревают в них. Найдите скорость и ускорение нижнего шарика в тот момент, когда длинный наклонен под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.



Ответ на вопрос: Проекции скоростей всех точек стержня на ось, направленную вдоль него, должны совпадать, то есть $v_A \cos(\alpha_A) = v_B \cos(\alpha_B) \Rightarrow \cos(\alpha_B) = \dfrac{v_A}{v_B} \cos(\alpha_A) = \dfrac{1}{2}$. Значит, скорость другого конца стержня направлена под углом 60° к стержню.

Решение задачи: Рассмотрим момент времени, когда длинный стержень направлен под углом α к горизонту, и обозначим скорость нижнего шарика в этот момент v. Из рассуждения,



аналогичного проведенному в ответе на вопрос ясно, что величина скорости верхнего шарика в этот момент равна $v' = v \cdot ctg(\alpha)$. Ясно, что средний шарик движется по окружности радиуса $\frac{L}{2}$, и его скорость всегда перпендикулярна коротому стержню, то есть направлена под углом $\beta = 2\alpha - 90°$ к длинному стержню. Поэтому величина этой скорости $v'' = \frac{v\cos(\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \frac{v}{2\sin(\alpha)}$. Используя эти соотношения, можно выразить кинетическую энергию всей системы через скорость нижнего шарика: $E_K = \frac{m}{2}(v^2 + v'^2 + v''^2) = \frac{5mv^2}{8\sin^2(\alpha)}$ (здесь m – масса каждого из шариков). Эта энергия появилась благодаря убыли потенциальной энергии системы в поле тяжести Земли $E_K = -\Delta E_g = \frac{3mgL}{2}[1 - \sin(\alpha)]$. Поэтому $v^2 = \frac{12}{5} gL\sin^2(\alpha)[1 - \sin(\alpha)]$, то есть скорость нижнего шарика в нужный момент времени $v = 2\sin(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{3}{5} gL[1 - \sin(\alpha)]} \approx 1{,}4$ м/с. Для вычисления ускорения можно, например, воспользоваться тем, что $a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dx} = -\frac{1}{2L\sin(\alpha)}\frac{d(v^2)}{d\alpha}$. Здесь использовано то, что

$d(v^2) = 2v \cdot dv$ и $vdt = dx = d[L\cos(\alpha)] = -L\sin(\alpha)d\alpha$. Таким образом, $a = \frac{6}{5} g\cos(\alpha)[3\sin(\alpha) - 2] \approx 3{,}6$ м/с^2.

ОТВЕТ: $v = 2\sin(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{3}{5} gL[1 - \sin(\alpha)]} \approx 1{,}4$ м/с,

$a = \frac{6}{5} g\cos(\alpha)[3\sin(\alpha) - 2] \approx 3{,}6$ м/с^2.

Задание 2.

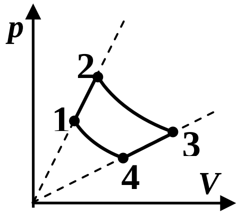
Вопрос: Одноатомный идеальный газ в процессе с уравнением $p = \alpha \cdot V$ ($\alpha = const$) совершил работу 1 кДж. Количество газа не изменялось. На сколько изменилась его внутренняя энергия?

Задача: Рабочим телом тепловой машины является постоянное количество гелия, цикл которого состоит из двух изотерм и двух процессов, в которых давление изменяется прямо пропорционально объему. Известно, что максимальная абсолютная температура в цикле в $n = 2$ раза больше минимальной, и что работа гелия в процессе изотермического расширения в $k = 2$ раза больше работы над гелием при сжатии в процессе, в котором давление пропорционально объему. Найдите КПД цикла.

Ответ на вопрос: В процессе $p = \alpha \cdot V$ работу можно вычислить как площадь под графиком процесса в координатах давление-объем: $A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2)$.

Изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2)$. Таким образом, для такого процесса $\Delta U = 3A = 3$ кДж.

Решение задачи: В замкнутом цикле полное изменение внутренней энергии равно нулю, и изменение внутренней энергии в изотермических процессах равно нулю, поэтому изменения



внутренней энергии в двух процессах, в которых давление пропорционально объему, противоположны: $\Delta U_{12} = -\Delta U_{34}$. В соответствии с результатом, полученным в ответе на вопрос, из этого следует, что $A_{12} = -A_{34} \equiv A$. Согласно условию, $A_{23} = kA$. С учетом уравнения Менделеева-Клапейрона, в процессах 1-2 и 3-4 температура изменяется пропорционально квадрату объема $T \propto pV \propto V^2$, и поэтому $V_2 = \sqrt{n} \cdot V_1$ и $V_3 = \sqrt{n} \cdot V_4$. Следовательно, $\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}$, и отношение модулей работ в изотермических процессах 2-3 и 4-1 равно отношению температур изотерм. Значит, $A_{41} = -\frac{1}{n} A_{23} = -\frac{k}{n} A$. Таким образом, полная работа в цикле $A_c = A + kA - A - \frac{k}{n} A = \frac{k(n-1)}{n} A$. Теплота к рабочему телу подводится в процессах 1-2 и 2-3. При этом $Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = 4A$, а для изотермического процесса $Q_{23} = A_{23} = kA$, и количество теплоты, получаемое рабочим телом за цикл от нагревателя $Q_H = Q_{12} + Q_{23} = (4+k)A$. КПД цикла $\eta = \frac{A_c}{Q_H} = \frac{k(n-1)}{n(4+k)} = \frac{1}{6}$, то есть около 17%.

ОТВЕТ: $\eta = \frac{k(n-1)}{n(4+k)} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$.

Задание 3.

Вопрос: Металлический цилиндр радиусом 20 см и высотой 40 см помещен в постоянное однородное электрическое поле с напряженностью 60 В/м так, что его ось параллельна силовым линиям. Чему равна разность потенциалов центров оснований цилиндра?

Задача: Три одинаковых проводящих цилиндра закреплены вдали от других тел так, что их оси параллельны друг другу. Расстояние между любой парой осей одно и то же (больше диаметра цилиндров), и все «верхние» (а также, естественно, «нижние») основания находятся в одной плоскости. На два цилиндра (№ 1 и № 2) нанесен одинаковый заряд, а цилиндр № 3 не заряжен. Идеальный вольтметр, подключенный к цилиндрам № 1 и № 3, показывает напряжение $U = 40$ В. Когда цилиндр № 3 заземлили, показания вольтметра стали равны $U' = 60$ В. Затем цилиндр № 3 отсоединили от «земли», и заземлили цилиндр № 2, а потом отсоединили от «земли» цилиндр № 2 и заземлили цилиндр № 1. Найдите показания вольтметра в конечном состоянии системы. Влиянием вольтметра и соединительных проводов на заряды и потенциалы цилиндров можно пренебречь.

Ответ на вопрос: Любое проводящее тело в электростатическом поле – эквипотенциальная область, так как благодаря явлению электростатической индукции поле внутри проводника отсутствует. Поэтому разность потенциалов между основаниями цилиндров (как и между любыми двумя точками цилиндра) равно нулю.

Решение задачи: Так как положение цилиндров и среда между ними не изменяются, то при любых их зарядах

$$\begin{cases} \varphi_1 = k_{11}Q_1 + k_{12}Q_2 + k_{13}Q_3 \\ \varphi_2 = k_{21}Q_1 + k_{22}Q_2 + k_{23}Q_3 \\ \varphi_3 = k_{31}Q_1 + k_{32}Q_2 + k_{33}Q_3 \end{cases},$$

и в силу симметрии системы $k_{11} = k_{22} = k_{33} \equiv \alpha$, $k_{12} = k_{21} = k_{23} = k_{32} = k_{13} = k_{31} \equiv \beta$. Поэтому вначале, когда $Q_1 = Q_2 \equiv Q$ и $Q_3 = 0$, потенциалы цилиндров $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha Q + \beta Q$, $\varphi_3 = 2\beta Q$, и поэтому $U = (\alpha - \beta)Q$.

После первого заземления, когда потенциал цилиндра 3 должен стать равным нулю (ясно, что изменяется только заряд цилиндра, соединенного с землей): $\varphi_3' = \alpha Q_3' + 2\beta Q = 0$, и поэтому $Q_3' = -\dfrac{2\beta}{\alpha}Q$.

Значит, теперь $\varphi_1' = \varphi_2' = (\alpha+\beta)Q + \beta Q_3' = \dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)}{\alpha}Q$, и $U' = \dfrac{\alpha+2\beta}{\alpha}U$. Мы получили, что $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{U'-U}{2U}$. После второго заземления $\varphi_2'' = \beta Q + \alpha Q_2'' + \beta Q_3' = 0$, и из этого условия находим заряд второго цилиндра: $Q_2'' = -\dfrac{\beta}{\alpha}(Q_3' + Q) = -\dfrac{\beta}{\alpha}\left(1 - \dfrac{2\beta}{\alpha}\right)Q$. Новые потенциалы цилиндров 1 и 3 изменяются только из-за изменившегося на одинаковую величину вклада второго цилиндра, так что показания вольтметра не изменились ($U'' = U'$). Повторяя аналогичные действия и для третьего заземления, найдем, что $\varphi_1''' = \alpha Q_1''' + \beta Q_2'' + \beta Q_3' = 0$, откуда $Q_1''' = -\dfrac{\beta}{\alpha}(Q_3' + Q_2'') = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\left(3 - \dfrac{2\beta}{\alpha}\right)Q$. Показания вольтметра

$$U''' = 0 - \varphi_3''' = -\alpha Q_3' - \beta(Q_2'' + Q_1''') = \frac{\beta(\alpha-\beta)(2\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)}{\alpha^3}Q.$$

Используя соотношения $U' = \dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)}{\alpha}Q$ и $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{U'-U}{2U}$, получаем: $U''' = \dfrac{U'(U'-U)(5U-U')}{4U^2} = 26{,}25$ В.

ОТВЕТ: $U''' = \dfrac{U'(U'-U)(5U-U')}{4U^2} = 26{,}25$ В.

Задание 4.

Вопрос: Тонкие линзы. Связь оптической силы и фокусного расстояния линзы.

Задача: Предмет и его прямое изображение расположено симметрично относительно ближнего к предмету фокуса линзы.

Расстояние от предмета до этого фокуса линзы $d = 15$ см. Найдите возможные значения оптической силы линзы.

Ответ на вопрос: Линза – прозрачное тело, ограниченное сферическими поверхностями. Такие тела обладают способностью фокусировать параллельные пучки параксиальных световых лучей (то есть лучей, идущих под малым углом к главной оптической оси линзы). Главным фокусом линзы называют точку, в которой фокусируются лучи, идущие параллельно ее главной оптической оси. Расстояние от плоскости линзы до фокуса – фокальное расстояние линзы. Оптической силой линзы называют величину, обратную фокусному расстоянию: $D \equiv \frac{1}{F}$. Единицей измерения оптической силы является диоптрия (1 дптр = 1 м$^{-1}$). В случае собирающей линзы фокус является действительным (в нем пересекаются световые лучи), а фокусное расстояние и оптическая сила считаются <u>положительными</u>. В случае рассеивающих линз (фокус является мнимым – параллельный пучок лучей после прохождения линзы расходится так, что продолжения лучей пересекаются в плоскости) фокусное расстояние и оптическая сила линзы считаются <u>отрицательными</u>. Если диаметр линзы намного меньше радиусов кривизны ее сферических поверхностей, то ее толщина намного меньше диаметра. Если при этом мы рассматриваем только параксиальные лучи (для которых корректно использовать при выводе геометрических соотношений формулы $\sin(\alpha) \approx tg(\alpha) \approx \alpha$), то для описания прохождения лучей через линзу можно использовать приближение тонкой линзы. В рамках этого приближения оптическая сила линзы, помещенной в однородную среду, определяется формулой $D = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, где n – показатель преломления вещества линзы относительно окружающей среды, а радиусы поверхностей линзы $R_{1,2}$ считаются положительными для выпуклой поверхности и отрицательными для вогнутой. Расстояния от светящейся точки a и расстояние до ее изображения b для тонкой линзы связаны ***формулой линзы*** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=D=\frac{1}{F}$. В этой формуле a и b считаются положительными для действительных источников или изображений, и отрицательными – для мнимых.

Решение задачи: Прямые изображения предметов (светящиеся точки которых есть действительные источники для линзы) создают рассеивающие линзы (при любом расстоянии от предмета до линзы) и собирающие линзы (когда расстояние от предмета до линзы меньше ее фокусного расстояния). В обоих случаях это изображение будет мнимым, то есть будет располагаться по одну сторону от линзы с предметом. Пусть a – расстояние от предмета до линзы, а $b=-|b|$ – расстояние от линзы до мнимого изображения. Для рассеивающей линзы оптическая сила отрицательна, а изображение находится ближе к линзе, чем предмет. Поэтому $a=|F|+d$, а $|b|=|F|-d$. Согласно формуле линзы $\frac{1}{|F|+d}-\frac{1}{|F|-d}=-\frac{1}{|F|}$, откуда $|F|^2-2d|F|-d^2=0$. Выбирая для $|F|$ положительный корень уравнения, находим: $F=-(\sqrt{2}+1)d$. Аналогично для собирающей линзы (мнимое изображение находится дальше от линзы, чем предмет: значения $a=F-d$, а $|b|=F+d$ приводят к уравнению $F^2-2dF-d^2=0$, положительный корень которого снова $F=(\sqrt{2}+1)d$. Значит, возможные значения оптической силы линзы $D=\frac{1}{F}=\pm\frac{\sqrt{2}-1}{d}\approx\pm 2{,}76$ дптр.

Московская олимпиада школьников

Организатором «Московской олимпиады школьников по физике» являются Департамент образования г. Москвы, Московский институт открытого образования (МИОО) и Физический факультет МГУ.

Примеры заданий.

7 класс, «Ты-дым, ты-дым»
(Якута А.А., Крюков П.А., Бычков А.И.)

Путешествуя на поезде, можно обратить внимание на характерный периодически повторяющийся звук стука колёс, который в письменном виде можно передать примерно так: «Ты-дым, ты-дым». Ниже вы видите схематичный рисунок вагона поезда с указанием некоторых размеров, а также визуализацию короткого фрагмента записи этого звука, сделанной в вагоне поезда (мы не знаем, кто записал, поскольку позаимствовали этот звук на Youtube в видео под названием «8 часов сна под стук колёс» от автора Faktor Zet). Когда мы говорим «визуализация» — то имеем в виду зависимость амплитуды звуковых волн (проще говоря, громкости звука) от времени. Абсолютной тишине на графике соответствует линия, проведённая вдоль горизонтальной оси симметрии рисунка. Точки, лежащие на большом расстоянии по вертикали от этой линии, соответствуют громким звукам, а лежащие вблизи этой линии — тихим. На графике на фоне шума можно различить периодически повторяющиеся двойные пики громкости — это и есть описанные выше «ты-дым, ты-дым». Проанализируйте представленный график и определите как можно точнее скорость поезда и длину рельса.

Пассажирский вагон. Размеры указаны в мм

Решение. Из схематичного рисунка вагона следует, что у одного вагона две тележки, и в каждой тележке две колёсные пары. Каждые два резких удара «ты-дым» слышны из-за того, что колёсные пары тележки вагона последовательно наезжают на стык соседних рельсов.По графику можно понять, что рельс длиннее вагона. Поэтому звуки «ты-дым, ты-дым» слышны, когда ближайшие четыре колёсные пары тележек вагона последовательно наезжают на один и тот же стык соседних рельсов. Далее следует пауза, и всё повторяется из-за того, что колёсные пары вагона периодически наезжают на следующие стыки рельсов.

По графику можно оценить сколько занимает по времени один «ты-дым», соответствующий ударам двух колёсных пар, – где-то 0,20-0,25 с. Расстояние между двумя колёсными парами равно 2400 мм, следовательно, скорость поезда равна $(10{,}8 \pm 1{,}2)$м/с или (40 ± 4) км/ч. Можно поступить иначе, рассмотрев два пика, идущие через один. Интервал времени между ними равен 0,70-0,75 с. Запись могла производиться ближе к середине вагона поезда или ближе к краю. В первом случае две ближайшие тележки принадлежат одному вагону, ирасстояние между колёсными парами, производящими рассматриваемые звуки, равно 17 м. Тогда мы получаем, что скорость поезда приблизительно равна (84 ± 4) км/ч, что противоречит результатам, полученным ранее.Если же запись производится ближе к краю вагона, тодве ближайшие тележки принадлежат разным (!) вагонам. В этом случае расстояние между колёсными парами приблизительно равно $2400 + 2570 + 2570 \approx 7600$ мм (более точное значение писать не имеет смысла, потому что на схеме вагона размеры области, где сцепляют вагоны, не указаны). Скорость поезда приблизительно равна $\frac{7{,}6\ \text{м}}{0{,}725\ \text{с}} \cdot 3{,}6 \approx 38$ км/ч. Интересно, что данный подход хоть и выглядит сложнее, но он позволяет ответить на дополнительный вопрос: «В каком месте вагона производилась запись?». Оказывается, что запись производилась ближе в заднему краю вагона, поскольку сначала мы слышим два более громких звука ударов колёсных пар о стык рельсов, а затем два менее громких.

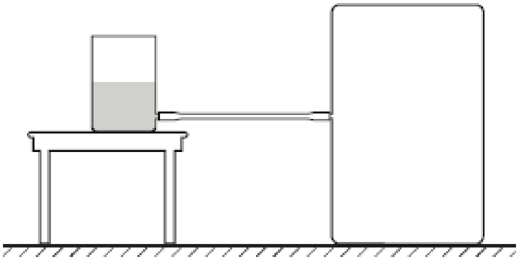
Теперь, зная приблизительное значение скорости поезда, можно оценить длину рельса. Возьмём первый и последний пики на графике, чтобы уменьшить погрешность интервала времени между звуками. Эти пики соответствуют ударам одной и той же колёсной пары, которая проехала расстояние равное удвоенной длине рельса. Интервал времени равен приблизительно 4,5 с, следовательно, длина рельса $\frac{4{,}5 \cdot 10{,}8}{2} \approx 24$ м.

Замечание. Длина стандартного железнодорожного рельса, производимого рельсопрокатными заводами в России, составляет 12,5; 25,0; 50,0 и 100 метров. (Википедия)

Ответ: (40 ± 5) км/ч, (25 ± 3) м.

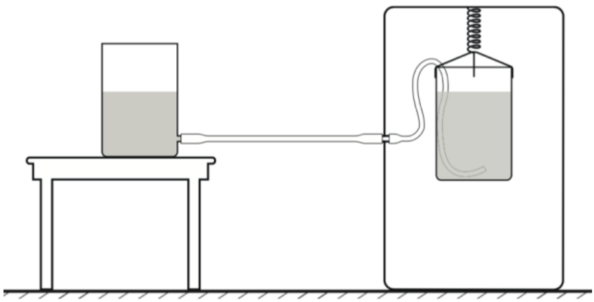
8 класс, «Предложите конструкцию» (Бычков А.И.)

На столе стоит цилиндрический сосуд с вертикальными стенками, заполненный водой примерно наполовину. Площадь сечения сосуда равна S = 400 см2, внизу сосуда имеется штуцер, к которому присоединён горизонтально расположенный шланг. Другой конец шланга соединён со штуцером «чёрного ящика», в котором находится неизвестное устройство (см. рисунок).



Неизвестное устройство действует следующим образом. Если в сосуд доливают немного воды (Δm порядка 100 г), уровень жидкости в сосуде опускается (!) по сравнению с первоначальным. Если же после этого из сосуда зачерпывают такую же порцию воды, то уровень поднимается до первоначальной высоты. Предложите конструкцию устройства, которое может находится внутри чёрного ящика. Изобразите схему устройства и коротко объясните принцип его работы. Известно, что в конструкции устройства используется некоторое оборудование из следующего списка: цилиндрический сосуд — такой же, как на столе, нерастяжимые нити, пружина жёсткостью $k = 300$ Н/м, набор грузов разных масс, резиновый шланг с внутренним диаметром, соответствующим диаметру штуцера на стенке ящика. Все грузы и сосуд снабжены крючками, которые могут быть использованы для крепления нитей и пружины. Крепления для нитей и пружины имеются также на потолке и стенах ящика. Плотность воды и ускорение свободного падения равны: $\rho = 1000$ кг/м 3 и $g = 10$ Н/кг.

Решение. В чёрном ящике может находится, например, устройство, схема конструкции которого изображена на рисунке ниже.



Устройство предварительно настроено таким образом, что шланги заполнены водой (нет воздушных пробок).

Если в первый сосуд налить небольшую порцию воды, часть воды из него перетечёт в чёрный ящик, пружина при этом растянется сильнее, и второй сосуд опустится ниже. При определённых значениях жёсткости пружины уровень воды во втором сосуде будет опускаться относительно пола. Так как сосуды сообщаются, уровень воды в первом сосуде тоже опустится.

Проверим, подходит ли пружина из предложенного оборудования для нашего устройства. Найдём при каком коэффициенте жёсткости пружины уровень воды в сосудах не поменяется:

$$\rho S \Delta x g = k_1 \Delta x,$$

где Δx – увеличение деформации пружины. Из уравнения находим, что $k_1 = 400$ Н/м. Если жёсткость пружины будет меньше, чем k_1, то уровень воды в сосудах опустится относительно пола.

При маленьких значениях коэффициента жёсткости пружины может происходить «срыв» системы – понижение уровня в первом сосуде приводит к тому, что пружина сильно растягивается и уровень воды в сосуде, находящемся в ящике, оказывается ниже, чем в сосуде на столе. В этом случае вся вода перетечёт в ящик. Следовательно, чтобы не происходило «срыва» системы, при понижении уровня воды в первом сосуде на Δx должно выполняться условие:

$$g\rho S \Delta x < k \cdot 2\Delta x.$$

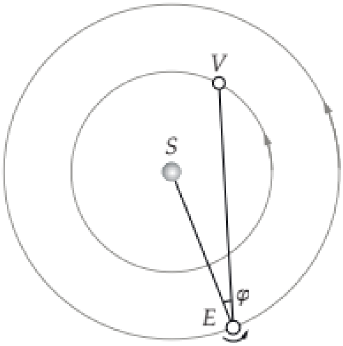
Отсюда получаем нижнюю границу значения жёсткости пружины: $k > \frac{g\rho S}{2} = 200$ Н/м. Таким образом, пружина из предоставленного оборудования подходит для нашего устройства.

Процесс является обратимым – если зачерпнуть немного воды из первого сосуда, то уровень воды в сосудах поднимется относительно пола.

Замечание. Можно предложить похожее по смыслу устройство – поставить второй сосуд на пружину сверху, но с технической точки зрения при помощи предложенного оборудования этот вариант реализовать проблематичнее.

9 класс, «Элонгация Венеры» (Дергачёв А. А.)

Наблюдениям за планетой Венера с Земли мешает её близость на небе к Солнцу. Угол φ (см. рис.) между направлениями с Земли (E) на планету, в данном случае на Венеру (V), и на Солнце (S) называется элонгацией; она бывает восточной и западной в зависимости от расположения планеты на небесной сфере относительно Солнца. Венеру в наибольшей западной элонгации можно наблюдать перед рассветом, а в наибольшей восточной — сразу после заката Солнца. Считается, что планета располагается западнее Солнца, если она появляется на небе раньше него.

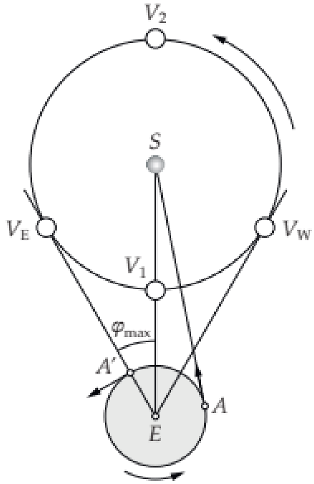


Наибольшее значение элонгации составляет около 46,5°, последний раз близкие значения наблюдались с 11 по 14 августа 2020 года, причем Венера была видна на рассвете. Орбиты Земли и Венеры можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости. Все планеты вращаются вокруг Солнца в одном направлении, Земля вращается вокруг своей оси в ту же сторону. Отклонение земной оси от перпендикуляра к плоскости вращения планет в данной задаче несущественно.

А. Найдите расстояние от Венеры до Солнца, если расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн км.

B. Когда примерно можно ожидать следующий наиболее подходящий для наблюдения Венеры момент?

Решение. А. Рассмотрим движение Венеры в системе отсчета, в которой неподвижными являются Солнце и Земля, рисунок ниже не соблюдает масштаб орбит и размеров планет и Солнца. Венера движется по прежней орбите. Точками S, E и V (с разными индексами) обозначим положения Солнца, Земли и Венеры, соответственно. Если северный полюс Земли (без учета того факта, что земная ось не перпендикулярна плоскости рисунка) обращен к нам, то вращение Земли происходит против часовой стрелки. Ближайшее положение планеты к Земле обозначено т. V_1, а наиболее удаленное — т. V_2, эти точки называются нижним и верхним соединением соответственно.



Наибольшая элонгация достигается, когда прямая EV оказывается касательной к орбите Венеры, что дает две точки максимального угла отклонения (V_E и V_W). Выясним, какая из них соответствует восточной, а какая — западной элонгации.

Как следует из направления вращения Земли, наблюдатель, располагающийся в т. A поверхности Земли, видит восход Солнца, поэтому направление из этой точки на Солнце задает направление на восток (отмечено стрелкой). Тогда можно установить направление на восток и в т. A′ (также отмечено стрелкой). Если наблюдатель в т. A′ поднимет голову и обнаружит Венеру в т. V_W, то планета окажется расположенной к западу от Солнца, поэтому т. V_W соответствует западной элонгации. Правда, наблюдать Венеру в точке V_W лучше из точки A, когда Солнце еще только восходит и не засвечивает небо; при этом планета в точке максимальной западной элонгации оказывается на востоке для земного наблюдателя. Точка V_E является точкой максимальной восточной элонгации. Таким образом, в период с 11 по 14 августа 2020 года Венера находилась вблизи точки V_W.

Как следует из прямоугольного треугольника SEV_E, $\sin\varphi_{max} = \frac{R_V}{R_E}$, где R_E и R_V – радиусы орбит Земли и Венеры соответственно. Зная значение максимальной элонгации φ_{max}, находим радиус орбиты Венеры: $R_V \approx 109$ млн км.

B. Для определения периода обращения Венеры (его еще называют сидерическим периодом) можно воспользоваться третьим законом Кеплера или же самостоятельно получить его для случая круговых орбит. Движение планеты вокруг Солнца происходит под действием взаимного тяготения планеты и Солнца. Сила притяжения планеты к Солнцу: $F = \frac{GM_m}{R^2}$ сообщает ей центростремительное ускорение: $a = \frac{GM}{R^2}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Солнца, m — масса планеты, R — радиус круговой орбиты. Из него можно определить скорость движения планеты по орбите: $v = \sqrt{aR} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Период обращения вокруг Солнца оказывается равен $T = \frac{2\pi R}{v} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$, откуда следует, что величина $\frac{T^2}{R^3}$ определяется только массой Солнца и одинакова для всех планет. Остается воспользоваться известными значениями для Земли и получить продолжительность венерианского года: $T_V = T_E\left(\frac{R_V}{R_E}\right)^{3/2} \approx 226$ земных суток. Он меньше периода обращения Земли, поэтому в рассмотренной ранее системе отсчета Венера движется в прежнем направлении (против часовой стрелки).

Определим теперь синодический период обращения Венеры, это будет интервал времени между, например, двумя последовательными точками V_E. Пусть он равен T. Тогда в инерциальной системе отсчета, связанной с Солнцем, за время T Венера повернется вокруг Солнца на угол $2\pi\frac{T}{T_V}$, а Земля — на угол $2\pi\frac{T}{T_E}$. Чтобы конфигурация планет повторилась, Венера должна сделать на 1 полный оборот больше, поэтому: $2\pi\frac{T}{T_V} - 2\pi\frac{T}{T_E} = 2\pi$, откуда: $T = \frac{T_V T_E}{T_E - T_V} \approx 593$ земных суток.

В течение синодического периода Венера движется равномерно в рассмотренной ранее системе отсчета. Значит, время движения от точки V_W до точки V_E пропорционально длине бóльшей дуги между ними, которая составляет примерно 180° + 2 · 46,5°. Таким образом, промежуток времени между точками максимального угла φ составляет T = $\frac{180° + 2 \cdot 46{,}5°}{360°}$ ≈ 450 земных суток. Отсчитав полученное значение от указанной в условии даты, получим ближайшую дату максимального значения угла (а значит, и наиболее подходящую для наблюдения дату) около 5 ноября 2021 года. Следующий после этого момент наилучшего наблюдения состоится спустя синодический период после 13 августа 2020 года.

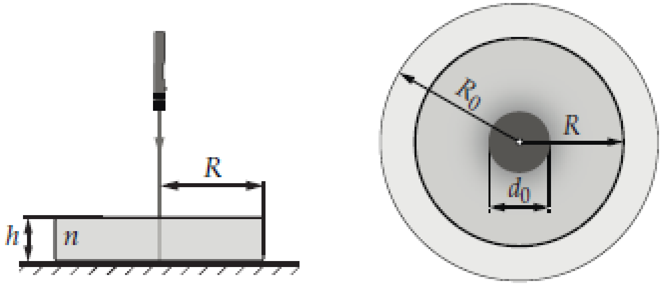
Данный расчет не слишком точен, поскольку на самом деле орбиты планет не являются круговыми и не лежат в одной плоскости, из-за чего максимальное значение элонгации немного «плавает». Так, в указанный в условии промежуток времени элонгация достигала значения 45,8°. Расстояние от Солнца до Венеры изменяется от 107,5 до 109 млн км. Истинное значение сидерического периода Венеры составляет около 225 земных суток, а синодического периода — около 584 земных суток. Согласно расчетным таблицам (*эфемеридам*), ближайшая дата максимальной восточной элонгации будет наблюдаться 29 октября 2021 года.

Однако, значения элонгации вблизи максимума, как и у любой гладкой функции, меняются медленно, так что достаточно комфортным для наблюдения будет один–два месяца до и после момента максимальной элонгации. Если захотите наблюдать Венеру в этот период, ищите ее на западе после захода Солнца.

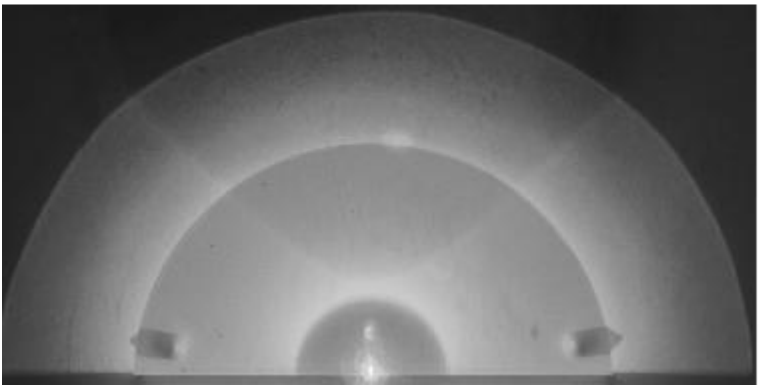
Ответ: А) R_V ≈ 109 млн км; В) около 5 ноября 2021 года.

10 класс, «Ореол и тёмный круг» (Крюкова П.А., Бычков А.И.)

На горизонтальной поверхности располагается диск радиусом R и толщиной h, сделанный из стекла с показателем преломления n = 1,5 (рис. ниже, слева). Нижняя матовая сторона диска отражает свет диффузно (иначе говоря, равномерно в любых направлениях). Верхняя и боковая поверхности диска тщательно отшлифованы. Луч мощной лазерной указки, освещающей диск, направлен вдоль его оси. При рассматривании диска сверху (рис. ниже, справа) наблюдаются: ярко выраженный тёмный круг с нечёткой границей диаметром d_0 и светлый ореол с резкой границей в виде концентрической с диском окружности радиусом R_0.



Ниже вы видите фотографию, полученную при проведении опыта, похожего на описанный выше. Мощной лазерной указкой освещалась нижняя точка середины половинки стеклянного диска. Можно различить тёмный полукруг с размытой границей и светлый ореол с резкой границей.

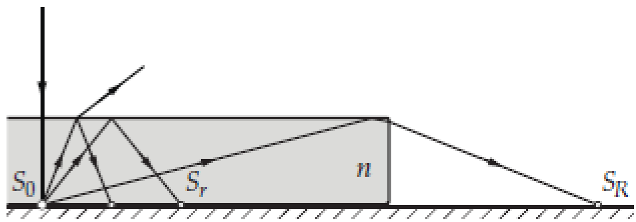


А. Известно, что толщина диска равна h = 14мм, а отношение радиусов диска и границы ореола равно $\frac{R_0}{R} \approx 1{,}65$ (это значение получается при измерениях по фотографиям опытов). Найдите радиус диска R.

В. Чем может быть обусловлено возникновение тёмного круга? Оцените его радиус r_0, считая показатель преломления и толщину диска известными.

Примечание. Можно считать, что в условиях данной задачи для лучей, выходящих из стекла в воздух, от границы раздела отражается не более 10 % энергии падающего излучения, если величина угла падения меньше 37°.

Решение. Для того, чтобы объяснить возникновение ореола и тёмного круга, рассмотрим схематичный рисунок ниже. Лазерный луч попадает на нижнюю матовую поверхность диска в точке S_0. Поскольку нижняя поверхность отражает диффузно, в этой точке возникает мощный источник, излучающий изотропно. Лучи, идущие от этого источника, частично (или полностью) отражаются от верхней поверхности пластины и опять попадают на нижнюю матовую поверхность, формируя на ней вторичные источники света (такие как S_r на рисунке).



Понятно, что интенсивность этих вторичных источников зависит от доли энергии света в отражённых верхней поверхностью лучах. Для углов падения лучей на верхнюю поверхность меньше 37° (углы традиционно отсчитываются от нормали) доля отражённого света составляет не более 10 %, как следует из условия. Затем эта доля быстро растёт и становится равна 100 %, когда угол падения становится равен углу полного внутреннего отражения (≈ 42° для n = 1,5). При дальнейшем увеличении угла падения весь падающий на верхнюю поверхность свет испытывает полное отражение. Вторичные источники малой интенсивности формируются лучами, которым соответствуют небольшие углы падения на верхнюю поверхность, поэтому вокруг яркой точки в центре наблюдается тёмный круг. Его размытая граница формируется лучами, которым (оценочно) соответствуют углы падения от 37° до 42°.

Граница светлого ореола формируется лучами, идущими от источника S_0, практически в угол пластины, где они отражаются полностью от верхней поверхности и после преломления на боковой попадают на горизонтальную поверхность в т. S_R. Радиус границы ореола равен расстоянию S_0S_R, а радиус тёмного круга оценивает расстояние S_0S_r при условии, что S_r соответствует углам падения от 37° до 42°. Сделаем расчёт.

А. Легко видеть, что для луча, преломляющегося на боковой поверхности диска и формирующего границу ореола, углы падения и преломления ($\propto_n$ и $\propto_1$) удовлетворяют соотношениям:

$$tg \propto_n = \frac{h}{R}, \qquad tg \propto_1 = \frac{h}{R_0 - R}. \qquad (1)$$

С другой стороны, для этих углов справедлив закон преломления: n sin $\propto_n$ = sin $\propto_1$. Выражая из соотношений (1) синусы через тангенсы, затем подставляя их в закон преломления, после преобразований получаем уравнение

$$h^2(n^2 - 1) = R^2 - n^2(R_0 - R)^2,$$

из которого следует ответ:

$$R = h\sqrt{\frac{n^2-1}{1-(0{,}65n)^2}} \approx 70 \text{ мм}$$

В. Оценить радиус границы тёмного круга можно по формуле

$$r_0 = 2htg\beta,$$

где угол падения β может принимать значения (примерно) от 37° до 41,8° (более точное значение угла полного внутреннего отражения). Можно рассчитать значение радиуса для обоих углов, и в качестве оценки взять среднее арифметическое. Получится: $r_0 \approx$ 23 мм.

Ответ: А) R = $h\sqrt{\frac{n^2-1}{1-(0{,}65)^2}}$ ≈ 70 мм; В) r_0 = 2htgβ ≈ 23 мм ± 2 мм.

11 класс, «О капле»
(Крюков П.А.)

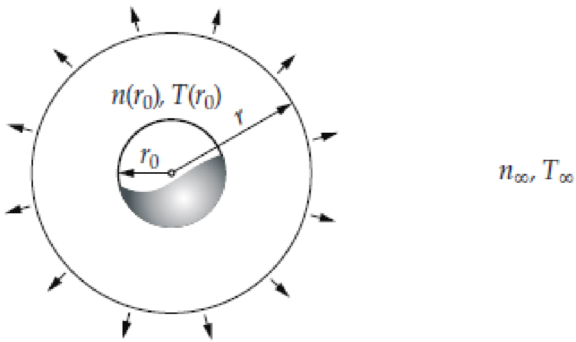
В этой задаче рассматривается эффект уменьшения температуры капли воды вследствие испарения с её поверхности при близких к комнатным давлении и температуре.

В одном из экспериментов шарообразная капля воды радиусом порядка миллиметра удерживалась силами поверхностного натяжения на тонкой полимерной леске. Зависимость температуры капли от времени измерялась с помощью высокоточного инфракрасного тепловизора. Вдали от капли (на «бесконечности») поддерживались постоянные значения: температуры T_∞, давления p_∞ и относительной влажности воздуха φ_∞.Обнаружилось, что если в начальный момент температура капли была равна температуре на бесконечности T_∞, то затем в течение короткого времени она уменьшалась до значения $T_\infty - \Delta T$ (ΔT порядка нескольких градусов) и далее длительное время оставалась постоянной. Предлагается определить величину разности температур ΔT, учитывая диффузию пара от капли на бесконечность и тепловой поток, обусловленный разностью температур капли и воздуха на бесконечности. Конвекцией и передачей тепла по леске предлагается пренебречь.

В стационарном режиме в пространстве вне капли устанавливается распределение концентрации пара n(r) и температуры T(r). В силу сферической симметрии концентрация и температура зависят только от расстояния до центра капли r и удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dN}{dt} = -D \cdot 4\pi r^2 \frac{dn}{dr}, \frac{dQ}{dt} = -\kappa \cdot 4\pi r^2 \frac{dT}{dr},$$

где dN — количество молекул пара, проходящих за время dt через поверхность сферы радиусом r, концентрической с каплей, dQ — количество тепла, переносимого за время dt через поверхность той же сферы; коэффициенты диффузии и теплопроводности D и κ можно считать постоянными. Маленькими стрелками на рисунке символически показан поток диффундирующих молекул пара.



A. Коэффициенты диффузии и теплопроводности D и κ, молярная масса μ_{H_2O}, удельная теплота испарения воды L и радиус капли r_0 считаются известными. Изменение радиуса капли вследствие испарения можно считать незначительным.

A1) Температура у поверхности капли T(r_0) и температура на бесконечности T_∞ (см. рис.) известны.

Определите тепловой поток $\frac{dQ}{dt}$ и распределение температуры T(r).

A2) Известны концентрации пара: $n(r_0)$ и n_∞, определите массу воды, испаряющейся с поверхности капли за малое время t.

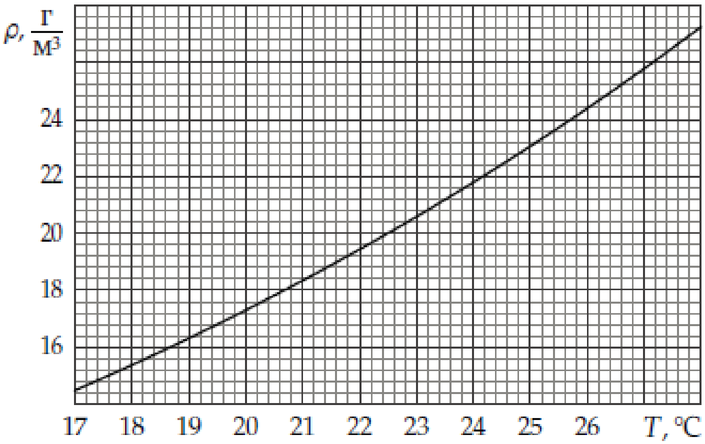
A3) Используя результаты пунктов A1) и A2), выразите разность плотностей пара у капли и на бесконечности $\Delta\rho = \rho(r_0) - \rho_\infty$ через разность температур $\Delta T = T_\infty - T(r_0)$.

B. Отношение коэффициентов теплопроводности и диффузии в условиях задачи удовлетворяет соотношению:

$$\frac{\kappa}{D} = \frac{v_B}{v_{H_2O}} \cdot \frac{C_V \rho_B}{\mu_B},$$

где v_{H_2O} и v_B — среднеквадратичные скорости молекул воды и воздуха, c_V= 2,5R — молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме, ρ_B — плотность воздуха. Определите отношение коэффициентов при температуре 300 К. При расчёте плотности давление воздуха можно считать равным 10^5 Па. Универсальная газовая постоянная равна R = 8,3 Дж/(моль · К), молярные массы воды и воздуха: μ_{H_2O} = 18 г/моль и μ_B= 29 г/моль соответственно. Убедитесь в том, что при изменении температуры на 10 К отношение коэффициентов меняется незначительно.

C. Используя график зависимости плотности насыщенного пара воды от температуры, приведённый на рисунке ниже, а также результаты, полученные в частях **A** и **B**, определите как можно точнее величину разности температур ΔT, для следующих значений параметров на бесконечности: $T_\infty = 27\ ^\circ\text{C}, \varphi_\infty = 70\%$. Удельная теплота испарения воды и давление воздуха равны: L = 2,4 · 10^6 Дж/кг и ρ_0 = 10^5 Па соответственно.



Примечание. При выполнении заданий части **А** может оказаться полезной формула:

$$\int_{\alpha}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{\alpha}.$$

Решение. А. А1) Поскольку процесс стационарный, тепловой поток через поверхность сферы любого радиуса $r(r>r_0)$ должен быть равен тепловому потоку на поверхности капли. Обозначим: $q=\frac{dQ}{dt}$, тогда из уравнения теплопроводности следует равенство

$$\frac{qdr}{4\pi r^2}=-\text{κ}\mathrm{dT}. \qquad (1)$$

Интегрируя это равенство от r_0 до ∞, получим соотношение

$$\frac{q}{4\pi r_0}=-\text{κ}(\mathrm{T}_\infty-\mathrm{T}(\mathrm{r}_0)). \qquad (2)$$

На самом деле, можно обойтись без интегрирования, ведь выражение (1) очень похоже на выражение, возникающее при вычислении потенциала поля точечного заряда:

$$\frac{qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=-d\varphi.$$

Используя аналогию, можно получить соотношение (2), формально не интегрируя. Выразим из равенства (2) тепловой поток:

$$q=-4\pi\text{κ}\mathrm{r}_0\big(\mathrm{T}_\infty-\mathrm{T}(\mathrm{r}_0)\big). \qquad (3)$$

Отрицательное значение потока обусловлено тем, что тепло переносится из бесконечности на каплю. Отметим, что в формуле (2) можно заменить r_0 на $r(r > r_0)$ и получится верное равенство

$$\frac{q}{4\pi r} = -\text{к}\big(\text{T}_\infty - \text{T}(\text{r})\big). \qquad (4)$$

Разделив равенство (4) на равенство (2), легко получим распределение температуры:

$$T(r) = T_\infty - \big(T_\infty - T(r_0)\big)\cdot\frac{r_0}{r}. \qquad (5)$$

A2) Действуя полностью аналогично пункту A1), получим выражение для потока частиц

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi D r_0\big(n(r_0) - n_\infty\big).$$

Умножая это выражение на массу молекулы $m_0 = \frac{\mu_{H_2O}}{N_A}$, находим поток массы, испаряющейся с поверхности капли

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi D r_0\big(n(r_0) - n_\infty\big)\cdot\frac{\mu_{H_2O}}{N_A}.$$

Как следует из последнего равенства за время t испаряется масса

$$m = 4\pi D r_0 t\big(n(r_0) - n_\infty\big)\cdot\frac{\mu_{H_2O}}{N_A}. \qquad (6)$$

A3) За время t к капле подводится количество теплоты $Q = -qt$ (напоминаем, что $q < 0$). Это количество теплоты идёт на испарение массы m: $Q = Lm$. Из этих рассуждений и формул (3) и (6) следуют равенства:

$$Lm = -qt \Rightarrow \text{LD}(\rho(\text{r}_0) - \rho_\infty) = \text{к}\big(\text{T}_\infty - \text{T}(\text{r})\big).$$

При выводе плотность была выражена через концентрацию: $\rho = n\frac{\mu_{H_2O}}{N_A}$. В итоге получаем важное для дальнейшего соотношение

$$\Delta\rho = \frac{\text{к}}{LD}\Delta T. \qquad (7)$$

Обратите внимание на то, что разность плотностей зависит только от констант и разности температур, но не зависит от размера капли.

B. Для удобства расчёта сначала преобразуем формулу из условия, выразив скорости через температуру, а плотность воздуха через давление и температуру. Получится формула

$$\frac{\kappa}{D} = \sqrt{\frac{\mu_{H_2O}}{\mu_B} \cdot \frac{2{,}5\rho}{T}}.$$

Подставляя в эту формулу значения: $\rho = 10^5$ Па и Т = 300 К получим значение отношения коэффициентов:

$$\frac{\kappa}{D} \approx 0{,}657 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{м}^3}.$$

Легко видеть, что при уменьшении температуры на 10 К отношение коэффициентов становится равно

$$\frac{\kappa}{D} \approx 0{,}679 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{м}^3}.$$

Для вычислений в следующей части задачи потребуется отношение: $A = \frac{\kappa}{LD}$, где L = 2,4·10^6 Дж/кг — удельная теплота испарения воды. Вычислим это отношение для температуры 300 К. Получится:

$$A = \frac{\kappa}{LD} \approx 0{,}274 \frac{\text{г}}{\text{К} \cdot \text{м}^3}. \qquad (8)$$

С. Пар у поверхности капли — насыщенный, при этом его температура равна температуре воздуха у поверхности капли, которая в этой части задачи обозначается просто *T*. Формула (7) с учётом введённого в предыдущей части обозначения (8) может быть записана так:

$$\rho(T) - \varphi_\infty \rho(T_\infty) = A(T_\infty - T). \qquad (9)$$

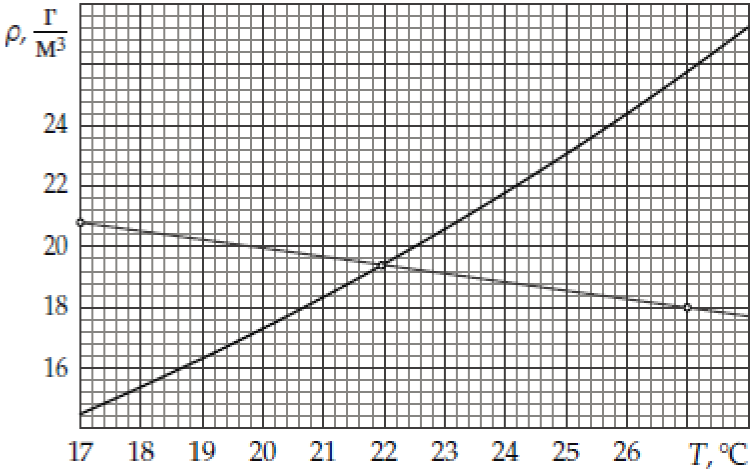
Здесь $\rho(T)$ — плотность насыщенного пара при неизвестной температуре капли *T*, $\rho(T_\infty)$ — плотность насыщенного пара при температуре T_∞. Легко видеть, что соотношение (9) задаёт прямую в координатах $(\rho; T)$:

$$\rho(T) = \varphi_\infty \rho(T_\infty) + A(T_\infty - T).$$

После подстановки числовых значений $(\varphi_\infty \rho(T_\infty) = 0{,}7\rho\ (27) \approx 18)$ уравнение прямой приводится к виду:

$$\rho(T) = 18 + 0{,}274 \cdot (27 - T). \qquad (10)$$

В формуле (10) температура измеряется в градусах Цельсия, а плотность в г/м3. Построив прямую по этой формуле, получим точку пересечения прямой с графиком зависимости плотности насыщенных паров от температуры. Температура в этой точке — это и есть температура капли. Осуществив построение (можно рассчитать значение плотности при *T* = 17 ℃), получаем значение температуры капли $T \approx 22$ ℃ (рис. ниже иллюстрирует построение). Таким образом, искомая разность температур равна $\Delta T = 5$ К. Отметим, что менее точный способ расчёта состоит в том, что сначала заданная графиком зависимость давления насыщенных паров от температуры линеаризуется, иначе говоря, для неё получается приближённое соотношение вида: $\rho(T) = \rho(T_\infty) + \propto (T - T_\infty)$, где постоянная $\propto$ определяется по графику, затем полученная линейная зависимость подставляется в формулу (9). Из полученного уравнения определяется температура капли.



Любопытно, что в статье [2] новосибирских авторов из института теплофизики описывается эксперимент, в котором для параметров на бесконечности: $T_\infty = 27$ °C, $\varphi_\infty = 27$ % наблюдалась разность температур, приближённо равная $\Delta T \approx 11$ К.

Ответ: А1) $q = -4\pi \kappa r_0 (T_\infty - T(r_0))$, $T(r) = T_\infty - (T_\infty - T(r_0)) \cdot \frac{r_0}{r}$;
А2) $m = 4\pi D r_0 t (n(r_0) - n_\infty) \cdot \frac{\mu_{H_2O}}{N_A}$; А3) $\Delta\rho = \frac{\kappa}{LD} \Delta T$.
В) $\frac{\kappa}{D} \approx 0{,}657 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{м}^3}$. С) $\Delta T = 5 \pm 0{,}5$ К.

Олимпиада школьников «РОБОФЕСТ»

На обоих этапах (отборочном и заключительном) участники олимпиады «Робофест» выполняют задания по робототехнике («практический тур») и решают олимпиадные задачи по физике («теоретический тур»). В 2021 году оба этапа проводились дистанционно.

Отборочный этап

На отборочном этапе вклад обоих туров в общую оценку участника одинаков – максимальная сумма баллов и за теоретический, и за практический тур равна 50 баллов.

Примеры задач из заданий теоретического тура для 7,8 и 9 классов

1. (7 и 8 классы) Две модели роботов двигаются по одной и той же замкнутой трассе в одном направлении. Модель №1 проезжала трассу за время $T = 180$ с. Модель №2 ехала быстрее, и поэтому каждые $t = 648$ с обгоняла первую. Когда модель №2 в очередной раз догнала модель №1, по команде с пульта управления модель №1 включила турборежим двигателя, от чего ее скорость увеличилась в полтора раза, и уехала от модели №2. Через какое время после включения турборежима модель №1 в первый раз обгонит модель № 2, если скорости моделей больше изменяться не будут? Ответ запишите в секундах, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

Возможное решение: Пусть L – длина круга на трассе, $v_{1,2}$ – первоначальные скорости моделей. Тогда $L = v_1 T = (v_2 - v_1)t$. Из этого соотношения находим, что $v_2 = v_1\left(1 + \frac{T}{t}\right)$. Время до «нового» обгона определяется из уравнения

$L=(1{,}5v_1-v_2)t'=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{T}{t_1}\right)v_1t'=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{T}{t_1}\right)\dfrac{L}{T}t'$, из которого следует, что $t'=\dfrac{2tT}{t-2T}=810$ с.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**810**	**100%**

2. (7 и 8 классы) Пусть теперь известно, что длина кольца трассы равна $L=320$ м. Обе модели одновременно стартовали с «противоположных» точек трассы (то есть расстояние между ними вдоль трассы равно половине ее длины) навстречу друг другу. При этом скорость модели №2 была в полтора больше скорости модели №1, и модели двигались с постоянными скоростями. Одновременно со стартом моделей из точки рядом с точкой старта модели №1 взлетел небольшой дрон и полетел к модели №2. Достигнув второй модели, он быстро развернулся и полетел к первой, затем снова развернулся и так далее. Оказалось, что в тот момент, когда модели встретились на трассе в третий раз, дрон был почти точно над ними. Найдите путь дрона за все время полета от старта до этого момента времени, если известно, что его средняя скорость была в три раза больше, чем скорость модели №2. Ответ запишите в метрах, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

Возможное решение: Первый раз модели встретятся через время $t_1=\dfrac{L}{2(v_1+1{,}5v_1)}=\dfrac{L}{5v_1}$ после старта (совместно преодолев расстояние, равное половине длине кольца). До каждой следующей встречи им нужно вместе пройти целое кольцо. Поэтому в третий раз они встретятся в момент времени $t_3=5t_1=\dfrac{L}{v_1}$. Путь дрона за это время $s=ut_3=\dfrac{uL}{v_1}$, где u – величина его скорости. По условию $u=3v_2=\dfrac{9}{2}v_1$, и поэтому $s=\dfrac{9L}{2}=1440$ м.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**1440**	**100%**
	720	**50%**
	2880	**50%**

3. (7 и 8 классы) Во время длительного переезда вода в радиаторе грузовика перегрелась, и водитель сделал остановку. Он решил попробовать измерить температуру воды в радиаторе, так как у него был с собой термос с встроенным термодатчиком, определявшим температуру содержимого с ошибкой не более 0,05°С (на специальном экране температура отображалась с десятыми долями градуса). Правда, термос был рассчитан на предохранение содержимого от перегрева, а не от охлаждения, и датчик был рассчитан на температуры, не превышающие 35°С. Вода в радиаторе была явно горячее. Тогда водитель налил в термос воду из бутылки. Когда установилось равновесие, на экране датчика отобразилась температура $t_1 = 24{,}0°\text{C}$. Взяв гайку, водитель привязал ее к тонкой прочной леске и опустил в радиатор, а потом – в термос. Теперь равновесная температура в термосе равнялась $t_2 = 26{,}7°\text{C}$. После еще одного помещения гайки в радиатор, затем в термос и установления равновесия, температура увеличилась до $t_3 = 29{,}3°\text{C}$.

1.1. Рассчитайте температуру воды в радиаторе по данным водителя (считая их точными). Считайте также, что в процессе манипуляций водителя она практически не изменилась. Ответ дайте в °С, с точностью до целого значения.

1.2. Оцените возможную ошибку такого измерения температуры. В ответе поставьте:

- **1**, если Вы считаете, что эта ошибка не более 1°С,
- **2**, если Вы считаете что она более 1°С, но не более 5°С,
- **3**, если Вы считаете что она более 5°С, но не более 10°С,
- **4**, если Вы считаете что она более 10°С, но не более 15°С,
- **5**, если Вы считаете что она более 15°С

Возможное решение: После погружения в радиатор гайка нагревается до температуры воды в радиаторе t. Уравнение теплового баланса для процесса остывания гайки в термосе после первого погружения: $C(t - t_2) = C_K(t_2 - t_1)$, где C и C_K

– теплоемкости гайки и термоса с водой соответственно. После второго погружении аналогично $C(t-t_3)=C_K(t_3-t_2)$. Из этих равенств находим: $\dfrac{t-t_3}{t-t_2}=\dfrac{t_3-t_2}{t_2-t_1}\Rightarrow t=\dfrac{t_2^2-t_1t_3}{2t_2-t_1-t_3}=96{,}9°\text{C}$, если считать данные водителя точными. С точностью до целых $t\approx 97°\text{C}$.

Но на самом деле все температуры известны нам с ошибкой до 0,05°С, а в знаменателе дроби при вычислении получалось 0,1°С, при чем этот результат на самом деле известен с точностью порядка 0,1°С, то есть реальный результат может очень сильно отличаться от полученного! Например, если «настоящие результаты» $t_1=24{,}0°\text{C}$, $t_2=26{,}725°\text{C}$ и $t_3=29{,}275°\text{C}$ (здесь ошибка равна половине возможной и внесена в две из трех величин), то $t\approx 66{,}43°\text{C}$. Значит, ошибка результата заведомо больше 15°С (на самом деле – намного больше!). Метод измерений оказался практически не работающим.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
15	**97 5**	**100%**
	97 4	**80 %**
	97 3	**80%**
	97 2	**70%**
	97 1	**70%**

4. (7 и 8 классы) На автокружке школьники собрали модель автомобиля с бензиновым двигателем. При постоянной скорости движения $v=4$ м/с двигатель потребляет $\Delta m=24$ г бензина на $\Delta x=100$ м пути. В модели используется система водяного охлаждения. Вода поступает в нее из радиатора с температурой $t_1=24°\text{C}$. Скорость циркуляции воды в системе охлаждения $u=6$ м/с, площадь сечения трубок системы равна $S=0{,}5$ см^2. КПД двигателя равен 30%. С какой температурой возвращается вода из двигателя в радиатор в режиме, когда температура корпуса двигателя постоянна? Удельная теплота сгорания используемого бензина $q=45$ МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c \approx 4{,}2$ кДж/(кг·°С), ее плотность $\rho \approx 1$ г/см^3. Ответ дать в °С, с точностью до целого значения.

Возможное решение: Отводимое водой тепло равно разности количества тепла, выделившегося при сгорании топлива, и полезной работы двигателя. Полезная работа двигателя за время $\Delta\tau$ равна 30% от теплоты сгорания топлива. Ясно, что $\Delta m = 24$ г соответствует $\Delta\tau = \dfrac{\Delta x}{v} = 25$ с. Через сечение S трубы за время $\Delta\tau$ протекает вода, находившаяся в объеме $Su\Delta\tau$ перед этим сечением. Поэтому через систему охлаждения за это время протекает масса воды, равная $\Delta M = \rho S u \Delta\tau$. Ясно, что умножение этой величины на удельную теплоемкость воды c и разность температур Δt на выходе и входе в систему охлаждения дает величину, равную отводимому теплу, то есть 100% – 30% = 70% от теплоты сгорания бензина в единицу времени. Таким образом,

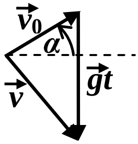
$$c\rho S u \Delta t = 0{,}7\frac{q\Delta m}{\Delta\tau} = 0{,}7\frac{q\Delta m \cdot v}{\Delta x} \Rightarrow \Delta t = \frac{0{,}7 v q \Delta m}{c\rho S u \Delta x} = 24°\text{C}.$$

Поэтому температура воды на выходе из системы $t_2 = t_1 + \Delta t = 48°\text{C}$.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
15	**48**	**100%**
	24	**60%**
	60	**40%**

5. (9 класс) Робот на соревнованиях отправляет в полет небольшой массивный шарик с помощью катапульты. Известно, что катапульта отправляет шарик в полет со скоростью $v_0 = 3{,}5$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Спустя время $t = 1{,}5$ с после броска шарик еще находится в полете. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите скорость шарика в этот момент. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9{,}8$ м/с^2. Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых, без указания единиц измерения.

Возможное решение: Закон изменения скорости в векторной форме при движении с постоянным ускорением $\vec{g}$ имеет вид



$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Заметим, что угол между векторами $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$ равен $90° - \alpha$ (см. рисунок). После возведения этого равенства в квадрат получаем:

$$v^2 = v_0^2 + g^2t^2 + 2v_0 g\cos(90° + \alpha) = v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 g\sin(\alpha).$$

Таким образом, $v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - v_0 gt} = 13{,}3$ м/с.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
5	**13,3**	**100%**
	13,6	**50%**

6. (9 класс) Робот располагается на ровном горизонтальном полу, и производит бросок. Задача состоит в том, чтобы шарик попал в круглую лунку в полу, центр которой находится на расстоянии $l = 2{,}1$ м от точки броска по горизонтали. Конструкция катапульты такова, что высота точки броска (центра шарика в момент броска) над полом $h = 35$ см и угол вылета шарика к горизонту $\alpha = 30°$ фиксированы с высокой точностью, и настройкой катапульты можно изменять только скорость вылета шарика v_0. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

6.1. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите величину v_0, при которой шарик попадет точно в центр лунки. Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых, без указания единиц измерения.

6.2. Радиус лунки равен $R = 5$ см, а радиус шарика $r = 5$ см. В рамках тех же приближений найдите максимальное относительное отклонение скорости от найденной величины $\left(\left|\frac{\Delta v_{\max}}{v_0}\right|\right)$, при котором шарик все-таки упадет в лунку. Пол вокруг лунки довольно гладкий и очень упругий, а стенки лунки покрыты очень шероховатым амортизирующим материалом, так что при касании они отбирают у шарика почти всю его кинетическую энергию. Ответ запишите в процентах, округляя до десятых в меньшую сторону, без указания единиц.

Возможное решение: Введем систему координат, в которой ось x направлена горизонтально, ось y – вертикально, а начало координат совмещено с точкой броска. Закон движения шарика в этой системе координат позволяет найти уравнение его траектории:

$$\left\{\begin{aligned} x(t) &= v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) &= v_0\sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x) = \mathrm{tg}(\alpha)\cdot x - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}.$$

Попадание в центр лунки означает, что $y(l) = -h$. Из этого уравнения находим необходимую величину начальной скорости броска $v_0 = l\sqrt{\dfrac{g}{2\cos(\alpha)[l\sin(\alpha) + h\cos(\alpha)]}} \approx 4{,}294$ м/с.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**4,3**	**100%**

Для определения допустимого отклонения скорости нужно заметить, что в соответствии с условием шарик падает в лунку, если «хотя бы чуть-чуть» коснется ее стенок. Тогда ясно, что условие для минимальной скорости – это $y(l-R) = -h + r$, а для максимальной – $y(l+R) = -h + r$. Соответственно

$$v_{\min} = (l-R)\sqrt{\frac{g}{2\cos(\alpha)[(l-R)\sin(\alpha) + (h-r)\cos(\alpha)]}} \approx 4{,}245 \text{ м/с, и}$$

$$v_{\min} = (l+R)\sqrt{\frac{g}{2\cos(\alpha)[(l+R)\sin(\alpha) + (h-r)\cos(\alpha)]}} \approx 4{,}370 \text{ м/с.}$$

Максимальное относительное отклонение соответствует случаю большей скорости, и оно примерно равно 1,77%. При округлении в меньшую сторону получаем 1,7 %.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
5	**1,7**	**100%**
	1,8	**60%**
	1,6	**40%**

7. (9 класс) К источнику постоянного напряжения подключили параллельно реостат и вольтметр. Реостат проградуирован – на шкале рядом с движком указана доля $0{,}1 \le x \le 1$ от его полного сопротивления. Вольтметр раньше был очень точным, но из-за паразитного контакта между клеммами его входное сопротивление оказалось очень низким.

7.1. Если установить на шкале реостата $x_1 = 0{,}25$, то вольтметр показывает напряжение $U_1 = 9{,}80$ В. При $x_2 = 0{,}5$ показания вольтметра $U_2 = 18{,}90$ В. Какими будут показания вольтметра, если установить $x_3 = 1$? Ответ запишите в вольтах, с точностью до сотых, без указания единиц измерения.

7.2. Допустим, что ЭДС источника равно 260 В, а его внутреннее сопротивление 5 Ом. Найдите входное сопротивление вольтметра. Ответ запишите в омах, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

Возможное решение: Пусть $\mathcal{E}$ и r – ЭДС и внутреннее сопротивление источника, R_V – входное сопротивление вольтметра, а R – полное сопротивление реостата. Так как вольтметр показывает напряжение U на себе самом и на реостате, то силы текущих через них токов равны $I_V = \dfrac{U}{R_V}$ и $I_x = \dfrac{U}{xR}$. Такое же напряжение и на ветви с источником, в которой течет суммарный ток с силой $I_V + I_x$, то есть $U = \mathcal{E} - r(I_V + I_x)$. Подставляя в это соотношение выражения для сил тока, получаем уравнение для U, из которого находим, что $\dfrac{\mathcal{E}}{U} = 1 + \dfrac{r}{R_V} + \dfrac{r}{R}\dfrac{1}{x} \equiv a + b\dfrac{1}{x}$. Мы обнаружили, что величина $\dfrac{\mathcal{E}}{U}$ является линейной функцией $\dfrac{1}{x}$. Соответственно $\dfrac{\mathcal{E}}{U_1} = a + 4b$, $\dfrac{\mathcal{E}}{U_2} = a + 2b$, а $\dfrac{\mathcal{E}}{U_3} = a + b$. Комбинируя эти уравнения, получаем: $2\frac{\mathcal{E}}{U_3}=3\frac{\mathcal{E}}{U_1}-\frac{\mathcal{E}}{U_1}$. Значит, $\frac{2}{U_3}=\frac{3}{U_2}-\frac{1}{U_1}\Rightarrow U_3=\frac{2U_1U_2}{3U_1-U_2}=35{,}28$ В.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**35,28**	**100%**
	35,3	**70%**
	35	**40%**

Из полученных выше уравнений следует, что $1+\frac{r}{R_V}\equiv a=2\frac{\mathcal{E}}{U_2}-\frac{\mathcal{E}}{U_1}=\mathcal{E}\frac{2U_1-U_2}{U_1U_2}$. Теперь мы можем выразить входное сопротивление вольтметра: $R_V=\frac{U_1U_2}{\mathcal{E}(2U_1-U_2)-U_1U_2}\approx 282{,}6$ Ом. Действительно, это слишком мало для «точного» вольтметра.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
5	**283**	**100%**
	282	**70%**
	284	**70%**
	281	**40%**
	285	**40%**

Примеры задач теоретического тура для 10-11 классов

1. (10 класс) Два одинаковых шарика, выпущенных из катапульт, столкнулись «лоб в лоб» в тот момент, когда оба летели горизонтально. Непосредственно перед ударом величины скоростей шаров равнялись $v_1=5$ м/с и $v_2=2$ м/с. Какой после удара стала величина скорости второго шара (то есть того, который до удара двигался со скоростью 2 м/с)? Удар считайте упругим. Ответ запишите в м/с, с точностью до целого значения.

Возможное решение: После лобового упругого удара тела движутся вдоль той же прямой, что и перед ударом (ось *x*). Их скорости до и после удара (в проекциях на ось *x*) связаны законами сохранения энергии и импульса. При одинаковых массах эти законы приводят к уравнениям:

$$\begin{cases} mv_1' + mv_2' = mv_1 + mv_2 \\ \dfrac{mv_1'^2}{2} + \dfrac{mv_2'^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{mv_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' + v_2' = v_1 + v_2 \\ v_1'^2 + v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2 \end{cases}.$$

Ясно, что эта система имеет два решения относительно «новых» скоростей, и они легко угадываются: это «старые» скорости $v_1' = v_1$ и $v_2' = v_2$ (соответствует отсутствию удара) или «обмен скоростями» $v_1' = v_2$ и $v_2' = v_1$ (если удар произошел). Таким образом, скорость второго шара после удара равна скорости первого шара до удара.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
5	**5**	**100%**

2. (10 класс) Рассмотрим случай, когда эти шары перед ударом летели горизонтально точно навстречу друг другу, но упругий удар не был лобовым, и первый шар (летевший со скоростью $v_1 = 5$ м/с) в результате удара отклонился от направления своего движения до удара на угол $\alpha = 60°$. Скорость второго шара перед ударом по-прежнему $v_2 = 2$ м/с.

2.1. Найдите величину скорости первого шара сразу после удара. Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых.

2.2. Найдите угол отклонения второго шара (от направления своего движения до удара). Ответ запишите в градусах, с точностью до целого значения.

Возможное решение: В этом случае движение уже не является одномерным, и уравнения для «новых» скоростей нужно записывать в векторной форме (или в проекциях на координатные оси). Например:

$$\left\{\begin{array}{l} m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2' = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \\ \dfrac{m\vec{v}_1'^2}{2} + \dfrac{m\vec{v}_2'^2}{2} = \dfrac{m\vec{v}_1^2}{2} + \dfrac{m\vec{v}_2^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{v}_2' = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_1' \\ v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2 - v_1'^2 \end{array}\right. .$$

Учтем, что до удара шары летели навстречу друг другу: запишем, что $\vec{v}_2 = -0{,}4 \cdot \vec{v}_1$. Тогда $\vec{v}_2' = 0{,}6 \cdot \vec{v}_1 - \vec{v}_1'$ Возведем это соотношение в квадрат (учитывая, что $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1' = v_1 v_1' \cos(\alpha) = \dfrac{1}{2} v_1 v'$): $v_2'^2 = 0{,}36 v_1^2 + v_1'^2 - 0{,}6 v_1 v_1'$.

Подставляя сюда выражение для $v_2'^2$ из закона сохранения энергии, получаем уравнение для скорости первого шара после удара: $v_1'^2 - 0{,}3 v_1 v_1' - 0{,}4 v_1^2 = 0$. Положительный корень этого уравнения $v_1' = 0{,}8 v_1 = 4$ м/с.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**4,0**	**100%**
	4	**90%**

Найдем скорость второго шара после удара: $v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2 - v_1'^2 = 0{,}52 v_1^2$, то есть $v_2' = \dfrac{\sqrt{13}}{5} v_1 = \dfrac{\sqrt{13}}{2} v_2$.

Перепишем закон сохранения импульса в другом виде (ясно, что $\vec{v}_1 = -2{,}5 \cdot \vec{v}_2$, $v_1'^2 = 4 v_2^2$): $\vec{v}_2' + 1{,}5\vec{v}_2 = -\vec{v}_1'$. Возведем его в квадрат $v_2'^2 + 2{,}25 v_2^2 + 3 v_2 v_2' \cos(\beta) = v_1'^2$ (где β – искомый угол поворота вектора скорости второго шара) и выразим β:

$$3\frac{\sqrt{13}}{2} v_2^2 \cos(\beta) = -\frac{3}{2} v_2^2, \text{ то есть } \beta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right) \approx 106^\circ.$$

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**106**	**100%**

3. (10 класс) Перед соревнованиями зал, где они будут проходить, проветрили, закрыли окна и двери, и включили нагревательные приборы. Когда температура установилась, климатическое панно, висящее в зале, что она равна $t = 24$°С, но воздух очень сухой – относительная влажность равнялась

$r = 18\%$. Для создания более комфортных условий увлажнители воздуха испарили $m = 7$ кг воды. Температуру при этом сохранили неизменной. Какой стала относительная влажность воздуха в зале? Объем зала $V = 1000\,\text{м}^3$, молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К). Давление насыщенных паров воды при температуре зала $p_н = 2{,}99$ кПа. Ответ запишите в процентах, с точностью до целого значения.

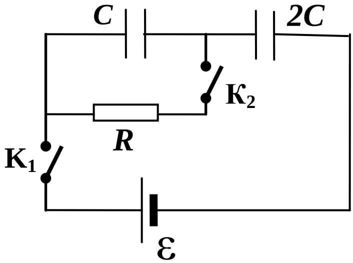
Возможное решение: Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \dfrac{m_n}{\mu} RT$ можно выразить давление водяного пара через массу пара в зале $p = \dfrac{RT}{\mu V} m_n$. Давление пара можно определить по относительной влажности и давлению насыщенного пара $p = r \cdot p_н$. Поэтому $r = \dfrac{RT}{\mu\, p_н V} m_n$. Следовательно, увеличение относительной влажности при увеличении массы водяного пара $r' - r = (m'_n - m_n)\dfrac{RT}{\mu\, p_н V} \Rightarrow r' = r + m\dfrac{RT}{\mu\, p_н V} = 50\,\%$.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**50**	**100%**
	49	**70%**
	51	**70%**

4. (10 класс) Перед сборкой схемы, изображенной на рисунке, оба конденсатора были разряжены. После сборки сначала замкнули ключ К$_1$, а затем, спустя некоторое время – К$_2$. Величина $C = 30$ мкФ, ЭДС источника $\mathcal{E} = 50$ В, внутреннее сопротивление батареи и сопротивление соединительных проводов и контактов пренебрежимо мало.

4.1. Какой заряд будет у конденсатора с большей емкостью после замыкания К$_1$ (до замыкания К$_2$)? Ответ дайте в мкКл, с точностью до целого значения.

4.2. Какое количество теплоты выделится в резисторе R? Ответ дайте в мДж, с точностью до целого значения.



Возможное решение: После замыкания К$_1$ батарея конденсаторов общей емкостью $C_{общ} = \frac{2C \cdot C}{2C + C} = \frac{2}{3}C$ заряжается от источника до напряжения $\mathcal{E}$. Заряд каждого из конденсаторов $q = \frac{2}{3}C\mathcal{E} = 1000$ мкКл. На этой стадии ток через резистор не течет, и тепло в нем не выделяется.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
5	**1000**	**100%**
	1	**50%**

После замыкания К$_2$ конденсатор емкостью C разряжается через резистор, а конденсатор емкостью $2C$ дозаряжается до напряжения $\mathcal{E}$ через тот же резистор. Поскольку все прочие сопротивления малы, практически все тепло выделяется именно в резисторе, и выделившееся количество теплоты равно разности работы источника и изменения энергии конденсаторов после замыкания К$_2$: $Q_R \approx Q = A_{ист} - \Delta E_C$. Работа источника вычисляется по величине протекшего через него на второй стадии заряда: $\Delta q = 2C\mathcal{E} - \frac{2}{3}C\mathcal{E} = \frac{4}{3}C\mathcal{E}$, и поэтому $A_{ист} = \mathcal{E} \cdot \Delta q = \frac{4}{3}C\mathcal{E}^2$. Изменение энергии конденсаторов

$\Delta E_C = \left(2C - C_{общ}\right)\dfrac{\mathcal{E}^2}{2} = \dfrac{2}{3}C\,\mathcal{E}^2$. Таким образом, в резисторе выделяется количество теплоты $Q_R \approx \dfrac{2}{3}C\,\mathcal{E}^2 = 50$ мДж.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**50**	**100%**
	5	**50%**

5. (11 класс) *Расходом воды*, проходящей через трубу, называют объем воды, проходящий через сечение трубы в единицу времени (эту величину можно измерять в литрах в секунду).

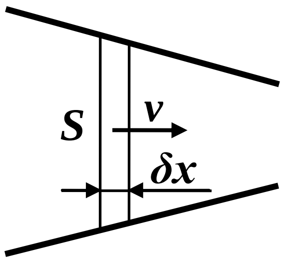
5.1. По трубе диаметром $d = 4$ см течет вода со скоростью $v = 3{,}98$ м/с. Найдите расход воды, проходящей через эту трубу. Ответ дайте в л/с, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

5.2. На конце этой трубы, расположенной горизонтально, надета коническая насадка, диаметр выходного отверстия которой в 2 раза меньше диаметра трубы. Давление на выходе из насадки равно нормальному атмосферному. Пренебрегая силами вязкого трения, найдите, на сколько килопаскалей давление воды на входе в насадку должно быть больше атмосферного для поддержания этого расхода воды. Ответ дайте с точностью до целого значения, без указания единиц измерения. Воду можно считать практически несжимаемой жидкостью с плотностью $\rho = 1$ г/см^3.

Возможное решение: За интервал времени Δt через сечение потока S при скорости v проходит объем жидкости, равный $S \cdot v\Delta t$, поэтому расход жидкости $q = S \cdot v = \dfrac{\pi d^2}{4}v \approx 5$ л/с.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
5	**5**	**100%**

У несжимаемой жидкости расход в потоке не изменяется ($q = const$), и при прохождении конической насадки скорость должна возрастать обратно пропорционально сечению. При этом увеличивается кинетическая энергия жидкости – за счет работы сил давления. Рассмотрим движение «слоя» потока



с очень малой толщиной δx и поперечным сечением S (ввиду малости толщины пренебрегаем его изменением). Масса этого слоя $\delta m = \rho S \delta x$, и увеличение его кинетической энергии при сдвиге в «соседнее» положение равно $\Delta E_K = \Delta\left(\frac{\rho S \delta x v^2}{2}\right)$. Сила, разгоняющая слой – это разность сил давления по разные стороны от слоя (ясно, что для разгона жидкости давление должно <u>убывать</u> вдоль потока, и эта разность отрицательна), поэтому $\Delta\left(\frac{\rho S \delta x v^2}{2}\right) = (-\Delta p) S \delta x \Rightarrow \Delta\left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right) = 0$. Итак, величина $\frac{\rho v^2}{2} + p = const$ в горизонтальном потоке невязкой несжимаемой жидкости (этот результат также можно получить из *закона Бернулли*). На выходе из насадки давление становится равно внешнему (атмосферному), поэтому давление на входе определяется из соотношения $\frac{\rho v^2}{2} + p = \frac{\rho v'^2}{2} + p_0$. При этом $v' = \left(\frac{d}{d'}\right)^2 v = 4v$. Значит, избыточное давление на входе насадки $\Delta p = p - p_0 = \frac{\rho v'^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2} = \frac{15}{2}\rho v^2 \approx 118$ кПа.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**118**	**100%**
	119	**90%**
	117	**80%**

6. (11 класс) Вода подается по трубке сечением $S = 5\,\text{см}^2$ с расходом $q = 2{,}1$ л/с. Конец трубки находится на высоте

$h = 10$ см над горизонтальной поверхностью земли, а угол наклона вылета струи к горизонту α выбран так, чтобы струя попадала в небольшой камешек, лежащий на земле на расстоянии $l = 1{,}8$ м по горизонтали от конца трубки, проходя по самой высокой из возможных траекторий. Пренебрегая силой сопротивления воздуха и вязким трением в жидкости, найдите α. Ускорение свободного падения при выполнении данного задания считать равным $g = 9{,}8$ м/с^2. Ответ дайте в градусах, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

Возможное решение: Начальная скорость движения «порций» воды в струе при выходе из конца трубки $v_0 = \dfrac{q}{S} = 4{,}2$ м/с.

Введем систему координат, в которой ось x направлена горизонтально, ось y – вертикально, а начало координат совмещено с концом трубки. Закон движения порции воды в этой системе координат позволяет найти уравнение ее траектории:

$$\left\{\begin{aligned} x(t) &= v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) &= v_0\sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x) = \mathrm{tg}(\alpha)\cdot x - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} = \mathrm{tg}(\alpha)x - \frac{g\,x^2}{2v_0^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)]\cdot$$

Для точки падения $-h = l\cdot\mathrm{tg}(\alpha) - \dfrac{g\,l^2}{2v_0^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)]$, и мы получаем уравнение для величины $z = \mathrm{tg}(\alpha)$:

$z^2 - 2\dfrac{v_0^2}{gl}z + 1 - \dfrac{2hv_0^2}{gl^2} = 0$. Возможны две траектории, но нам нужна более высокая. Поэтому $\mathrm{tg}(\alpha) = \dfrac{v_0^2}{gl} + \sqrt{\dfrac{v_0^4}{g^2l^2} + \dfrac{2hv_0^2}{gl^2} - 1} = \dfrac{4}{3}$. Значит, $\alpha = arctg\left(\dfrac{4}{3}\right) \approx 53°$.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**53**	**100%**
	54	**90%**
	52	**80%**
	55	**60%**
	51	**50%**

7. (11 класс) Перед соревнованиями зал, где они будут проходить, проветрили, закрыли окна и двери, и включили нагревательные приборы. Когда температура установилась, климатическое панно, висящее в зале, что она равна $t = 20°C$, но воздух очень сухой – относительная влажность равнялась $r = 15\%$. Для создания более комфортных условий включили увлажнители воздуха и увеличили относительную влажность до $r' = 50\,\%$. Температуру при этом сохранили неизменной. Найдите массу воды, которую испарили для увеличения влажности. Объем зала $V = 800\,м^3$, молярная масса воды $\mu = 18\,г/моль$, универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31\,Дж/(моль \cdot K)$. Давление насыщенных паров воды при температуре зала $p_н = 2{,}34\,кПа$. Ответ запишите в килограммах, с точностью до сотых, без указания единиц измерения.

Возможное решение: Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ можно выразить массу пара в зале через давление этого пара $m = \dfrac{\mu pV}{RT}$. Давление пара можно определить по относительной влажности и давлению насыщенного пара $p = r \cdot p_н$. Поэтому $m = r\dfrac{\mu p_н V}{RT}$. Следовательно, увеличение массы водяного пара при увеличении относительной влажности $\Delta m = m' - m = (r' - r)\dfrac{\mu p_н V}{RT} \approx 4{,}84\,кг$.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**4,84**	**100%**
	4,85	**90%**
	4,83	**80%**
	4,86	**60%**
	4,82	**50%**

8. (11 класс) Для разгона тележки массой $m = 4\,кг$ по двум горизонтальным прямолинейным толстым металлическим рельсам используется следующий механизм. Колеса тележки непроводящие, но между ними помещена проводящая планка, контактирующая с обоими рельсами (и изолированная от остальных частей тележки). Распределение масс в тележке таково, что сила давления планки на рельсы постоянна и равна 25% от веса тележки. Коэффициент трения между планкой и рельсами равен $\mu = 0{,}8$. К концам рельс подключают аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 98$ В, а в пространстве между ними создано вертикальное магнитное поле (направление выбрано так, чтобы тележка уезжала от аккумулятора) с индукцией $B = 8$ Тл. Длина планки $l = 0{,}5$ м, ее сопротивление (включающее сопротивление контактов) $R = 30$ Ом намного больше внутреннего сопротивления источника и сопротивления участков рельс, по которым проезжает тележка в ходе разгона. Ускорение свободного падения при выполнении данного задания считать равным $g \approx 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха и трением качения пренебречь.

8.1. До какой максимальной возможной скорости может разогнаться тележка, если рельсы очень длинные? Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых без указания единиц измерения.

8.2. Оказалось, что после подключения аккумулятора тележка набирает половину максимальной скорости за время $t \approx 5{,}2$ с. Найдите КПД работы аккумулятора по разгону тележки до этой скорости (отношение кинетической энергии тележки к работе аккумулятора) Ответ запишите в процентах, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

Возможное решение: В горизонтальном направлении на тележку действуют сила трения планки о рельсы $F_{mp} = \mu N = \frac{1}{4}\mu mg$ и сила Ампера $F_A = BlI$ (действует на планку с током со стороны магнитного поля). Уравнение движения тележки $ma_x = BlI - \frac{1}{4}\mu mg$, а сила тока при движущейся тележке вычисляется с учетом ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -B\frac{\Delta S}{\Delta t} = -Bl\frac{\Delta x}{\Delta t} = -Bl\,v_x$ (ясно, что ЭДС индукции стремится уменьшить силу тока): $I = \dfrac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R} = \dfrac{\mathcal{E} - Blv_x}{R}$. В процессе разгона скорость растет, а ускорение уменьшается. Максимальная скорость соответствует нулевому ускорению, и поэтому $0 = Bl\dfrac{\mathcal{E} - Blv_{\max}}{R} - \dfrac{1}{4}\mu mg \Rightarrow v_{\max} = \dfrac{\mathcal{E}}{Bl} - \dfrac{\mu mgR}{4B^2l^2} = 9{,}5$ м/с.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
5	**9,5**	**100%**
	9,4	**80%**
	9,6	**80%**

Запишем снова уравнение движения тележки для произвольного момента времени $ma_x = BlI - \dfrac{1}{4}\mu mg$ и умножим его на очень малый интервал времени Δt. Поскольку $a_x\Delta t = \Delta v_x$ и $I\Delta t = \Delta q$, то мы получим $m\Delta v_x = Bl\,\Delta q - \dfrac{1}{4}\mu mg\Delta t$. Просуммировав все изменения от момента старта до времени t, когда , найдем, что $\dfrac{1}{2}mv_{\max} = Bl\,q - \dfrac{1}{4}\mu mgt$. Из этого уравнения находим заряд, протекший через источник за это время $q = \dfrac{2mv_{\max} + \mu mgt}{4Bl}$ и работу источника $A = \mathcal{E}q = \mathcal{E}\dfrac{2mv_{\max} + \mu mgt}{4Bl}$. Кинетическая энергия тележки в этот момент $E_K = \dfrac{mv_x^2}{2} = \dfrac{mv_{\max}^2}{8}$, и поэтому КПД работы аккумулятора $\eta = \dfrac{E_K}{A} = \dfrac{Blmv_{\max}^2}{2\mathcal{E}(2mv_{\max} + \mu mgt)} \approx 3\,\%$.

МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ	ОТВЕТЫ	СТОИМОСТЬ
10	**3**	**100%**
	4	**80%**
	2	**60%**

Заключительный этап

На заключительном этапе распределение баллов было следующим: максимальная оценка за практический тур равнялась 40 баллам, за теоретический тур – 50 баллам. Эта оценка равнялась половине от суммы технических баллов, выставленных жюри при проверке работы (см. критерии ниже), округленной в большую сторону. Кроме того, лучшие (по сумме баллов практического и теоретического туров) участники проходили собеседование по физике с членами жюри, максимальная оценка которого равнялась 10 баллам.

Пример задания теоретического тура для 7-9 классов (максимальная сумма за теоретический тур – 100 технических баллов)

Задание 1:

Вопрос: Высокая вертикальная молния ударила в землю на расстоянии 880 м от наблюдателя, который слышал звук грома от нее в течении 3 с. Какова была высота молнии? Скорость звука в воздухе считайте равной 330 м/с.

Задача: Робот, снабженный ультразвуковым локатором (источником и приемником ультразвуковых импульсов), движется с постоянной скоростью к стене зала. Источник локатора излучает импульсы длительностью $\tau_0 = (20{,}000 \pm 0{,}002)$ мс. Приемник локатора фиксирует отраженные от стены импульсы длительностью $\tau \approx (19{,}940 \pm 0{,}003)$ мс. С какой скоростью движется робот? Оцените величину погрешности определения скорости таким методом, связанную с неточностью измерения длительности импульсов. Считать, что скорость ультразвука в воздухе при условиях, соответствующих измерению, $u \approx 1470{,}0 \pm 0{,}1$ м/с.

Ответ на вопрос: С учетом малости времени разряда, можно прийти к заключению, что длительность грома примерно равна разности расстояний до самого далекого и самого близкого участка «ствола» молнии, разделенную на скорость звука

$\tau \approx \dfrac{r_{\max} - r_{\min}}{V_s}$. Ближайшей является нижняя точка вертикального ствола: $r_{\min} = l = 880$ м, а самой удаленной – верхняя: $r_{\max} = \sqrt{l^2 + h^2}$. Следовательно, $h \approx V_s \tau \sqrt{1 + \dfrac{2l}{V_s \tau}} = 1650$ м.

Указано, что длительность грома примерно равна разности расстояний до самого далекого и самого близкого участка «ствола» молнии	**3**
Указано (используется в решении) $r_{\min}$	**2**
Указано (используется в решении) $r_{\max}$	**2**
Получен правильный ответ для h (достаточно числа)	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Каждому участку импульса нужно пройти со скоростью u расстояние l до стенки, и расстояние до встречи с роботом, то есть $ut = l + l - Vt$. Значит, ультразвук, излучаемый локатором робота, движущегося со скоростью V к стенке, в момент, когда он находился на расстоянии l от нее, вернется к приемнику спустя время $t = \dfrac{2l}{u+V}$. Поэтому длительность принимаемого импульса определяется длительностью излучаемого и разностью времен движения начала и конца импульса: $\tau = \tau_0 + t_к - t_н = \tau_0 + \dfrac{2(l - V\tau_0)}{u+V} - \dfrac{2l}{u+V} = \dfrac{u-V}{u+V}\tau_0$.

Следовательно, $V = \dfrac{\tau_0 - \tau}{\tau + \tau_0} u \approx 2{,}21$ м/с. При <u>оценке</u> погрешности (например, характерным для школы интервальным методом) самое важное – чтобы школьник понимал, что погрешность определения скорости связана в первую очередь с погрешностью вычисления <u>разности</u> длительностей импульсов:

$\tau_0 - \tau \approx (0{,}060 \pm 0{,}005)$ мс. Относительная ошибка результата близка к $\frac{0{,}005}{0{,}060} = 8\%$! Таким образом, $\delta V \approx \frac{1}{12}V \approx 0{,}18$ м/с.

Ответ: $V = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau + \tau_0}u \approx (2{,}21 \pm 0{,}18)$ м/с.

Правильно получена формула для времени «путешествия» ультразвука t	**3**
Длительность принимаемого импульса считается как $\tau = \tau_0 + t_к - t_н$	**2**
Получена правильная связь V, u, τ_0 и τ (в любой форме)	**3**
Получен правильный аналитический ответ для V	**2**
Получен правильный численный ответ для V	**2**
Корректно оценена погрешность, причем $0{,}1 \le \delta V \le 0{,}25$	**1+2=3**
ВСЕГО	**15**

Задание 2:

Вопрос: На бортах судов с большим водоизмещением можно увидеть линии, отмечающие допустимые глубины погружения (ватер-линии, соответствующие максимальной допустимой загрузке). Если судно ходит в море и по рекам, таких линии три. Занумеруем их сверху вниз: 1,2 и 3. Эти линии предназначены для летнего моря, зимнего моря, и для рек. Какая из них – для чего именно? Ответ обосновать. Массу максимальной загрузки считать одинаковой во всех случаях.

Задача: В сосуд с водой опустили цилиндр из дерева с плотностью $\rho_1 = 0{,}7$ г/см^3, к которому тонким слоем клея был приклеен груз из алюминия с плотностью $\rho_2 = 2{,}7$ г/см^3. Когда цилиндр с грузом были целиком помещены в воду, то уровень воды в сосуде поднялся на $h_1 = 2$ см по сравнению с первоначальным, причем они оставались неподвижны под водой, не касаясь дна и стенок сосуда. Спустя некоторое время клей размок, и груз отделился от цилиндра. Как и на сколько изменится уровень воды в сосуде на этот раз (по сравнению с предыдущим, к моменту установления равновесия). Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3.

Ответ на вопрос: В состоянии равновесия сила тяжести, действующая на корабль и груз, уравновешивается архимедовой силой $mg = F_A = \rho V_n g$, и поэтому объем погруженной части корабля обратно пропорционален плотности воды $V_n = \dfrac{m}{\rho}$.

Плотность соленой воды выше, чем у пресной, а плотность холодной соленой воды больше, чем плотность теплой (максимум плотности жидкой воды достигается при температуре около 4°C). Поэтому максимальная осадка при данном грузе (отметка 1) отвечает рекам, средняя (отметка 2) – летнему морю, минимальная (отметка 3) – зимнему морю.

Использованы закон Архимеда и условие равновесия	**1+1=2**
Указано, что объем погруженной части корабля обратно пропорционален плотности воды (или есть эквивалентное утверждение)	**2**
Указано, что плотность соленой воды выше, чем у пресной, а плотность холодной соленой воды больше, чем плотность теплой	**1+2=3**
Правильно названа принадлежность всех трех отметок	**1+1+1=3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Когда цилиндр и груз были вместе погружены под воду, общий объем вытесненной воды был равен сумме их объемов: $Sh_1 = \dfrac{m_1}{\rho_1} + \dfrac{m_2}{\rho_2}$. ($S$ – площадь сечения сосуда). Так как они находились под водой в равновесии, не касаясь стенок и дна, то сила Архимеда уравновешивала силу тяжести: $(m_1 + m_2)g = \rho\left(\dfrac{m_1}{\rho_1} + \dfrac{m_2}{\rho_2}\right)g$, и поэтому $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{\rho - \rho_1}{\rho_1}\dfrac{\rho_2}{\rho_2 - \rho}$.

Подставляя это соотношение в первое уравнение, находим, что

$Sh_1 = \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 - \rho}$. После разделения груза и цилиндра груз опускается на дно, и он вытесняет прежний объем воды, а цилиндр плавает на поверхности, и теперь вытесняемый им из-под поверхности воды объем равен $\frac{m_1}{\rho}$. Значит, уровень воды по сравнению с предыдущим состоянием опустится, причем $S\Delta h = \frac{m_1}{\rho} - \frac{m_1}{\rho_1} = -\frac{m_1}{\rho_1}\frac{\rho - \rho_1}{\rho}$. Значит, $\frac{\Delta h}{h_1} = -\frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}\frac{\rho - \rho_1}{\rho}$.

Таким образом, $\Delta h = -\frac{(\rho_2 - \rho)(\rho - \rho_1)}{\rho(\rho_2 - \rho_1)} h_1 = -0{,}51$ см.

Ответ: уровень воды опустится на $-\Delta h = \frac{(\rho_2 - \rho)(\rho - \rho_1)}{\rho(\rho_2 - \rho_1)} h_1 \approx 0{,}5$ см.

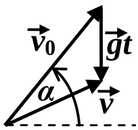
Правильно записан объем вытесненной воды в первом случае	**2**
Используется условие равновесия цилиндра грузом в первом случае	**3**
Получено правильное уравнение для Sh_1 через массу m_1 и плотности	**3**
Получено правильное уравнение для $S\Delta h$ через массу m_1 и плотности	**3**
Указано, что во втором случае уровень воды опускается по сравнению с первым	**1**
Получен правильный аналитический ответ для Δh	**2**
Получен правильный численный ответ для Δh	**1**
ВСЕГО	**15**

Задание 3:

Вопрос: Камень бросили со скоростью 4 м/с под углом 60° к горизонту. Через какое время угол наклона вектора скорости к горизонту уменьшится в два раза? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача: Робот-пожарный направляет струю таким образом, чтобы попасть в мишень, находящуюся на расстоянии $L = 7{,}5$ м по горизонтали от выходного отверстия насадки брандспойта. Это отверстие по вертикали расположено выше мишени на $h = 2$ м. Струя попадает в мишень, если она направляется горизонтально. Найдите величину еще одного угла наклона струи к горизонту, при котором струя тоже попадет в мишень. Сколько литров воды в секунду выбрасывает брандспойт этого робота, если площадь сечения выходного отверстия $S = 20$ см^2? При ответе на второй вопрос используйте величину ускорения свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

Ответ на вопрос: Закон изменения скорости в векторной форме при движении с постоянным ускорением $\vec{g}$ имеет вид



$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Из полученного векторного треугольника (см. рисунок) находим, что $v\cos(30°) = v_0\cos(60°) \Rightarrow v = v_0/\sqrt{3}$.С другой стороны, $gt = v_0\sin(60°) - v\sin(30°)$, откуда $t = \dfrac{v_0}{g\sqrt{3}} \approx 0{,}23$ с.

Используется закон изменения скорости в векторной или компонентной форме	**2**
Изображен треугольник скоростей или записаны все необходимые алгебраические соотношения	**3**
Конечная скорость выражена через начальную	**2**
Получен правильный ответ для t (достаточно числа)	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Введем систему координат, в которой ось x направлена горизонтально, ось y – вертикально, а начало координат совмещено с концом трубки. Закон движения порции воды в этой системе координат позволяет найти уравнение ее траектории:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=v_0\cos(\alpha)t \\ y(t)=v_0\sin(\alpha)t-\dfrac{gt^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow y(x)=\mathrm{tg}(\alpha)\cdot x-\frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}=\mathrm{tg}(\alpha)x-\frac{g\,x^2}{2v_0^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)]\cdot$$

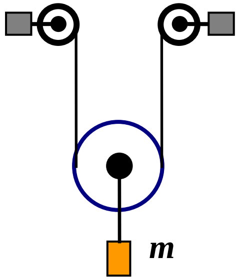
Для точки падения $-h=l\cdot\mathrm{tg}(\alpha)-\dfrac{g\,l^2}{2v_0^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)]$.По условию, один из корней этого уравнения $\alpha=0$, и поэтому $v_0^2=\dfrac{gl^2}{2h}$. Для второго корня получается уравнение $l-\dfrac{g\,l^2}{2v_0^2}\mathrm{tg}(\alpha)=0$, из которого $\mathrm{tg}(\alpha)=\dfrac{l}{h}=3{,}75$. Таким образом, $\alpha=arctg(3{,}75)\approx 75°$. Расход воды брандспойта $q=v_0S=lS\sqrt{\dfrac{g}{2h}}\approx 24$ л/с.

Правильно записан закон движения порции воды	**2**
Правильно записано уравнение траектории для точки падения	**2**
Получено правильное уравнение для v_0	**3**
Записано правильное уравнение для ненулевого значения α	**2**
Получен правильный аналитический ответ для α или $\mathrm{tg}(\alpha)$	**2**
Получен правильный численный ответ для α (можно в форме арктангенса)	**1**
Получен правильный аналитический ответ для q	**2**
Получен правильный численный ответ для q	**1**
ВСЕГО	**15**

Задание 4:

Вопрос: Сила, с которой ротор электродвигателя натягивает трос, наматывающийся на вал ротора, прямо пропорциональна силе тока, текущего в обмотке ротора. Пусть электродвигатель поднимает равномерно груз 1, и при этом сила тока в обмотке ротора 1 А. При равномерном подъеме груза 2 тем же двигателем, подключенным к тому же аккумулятору постоянного тока, сила тока в обмотке равна 2 А. Какой из грузов поднимается с большей скоростью? Ответ объяснить.

Задача: Два разных электродвигателя подключают к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E} = 24$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Когда груз массой $m = 5$ кг поднимают вертикально на легком тросе двигателем 1, установившаяся скорость подъема равна $v_1 = 1{,}5$ м/с при силе тока в обмотке ротора $I_1 = 3$ А. При использовании двигателя 2 $v_2 = 2{,}5$ м/с при $I_2 = 3{,}25$ А. Какой будет установившаяся скорость подъема, если поднимать этот груз сразу обоими двигателями, которые параллельно подключены к тому же аккумулятору с использованием схемы подъема, показанной на рисунке (общий легкий нерастяжимый трос перекинут через легкий равноплечий подвижный блок без трения в оси)?



Ответ на вопрос: Работа сторонних сил источника с ЭДС $\mathcal{E}$ идет на механическую работу двигателя, перемещающего груз силой F со скоростью v, и на компенсацию тепловых потерь на сопротивлении контура обмотки ротора R, то есть $\mathcal{E} \cdot I = RI^2 + F \cdot v$. Если $F = kI$, то $v = \dfrac{\mathcal{E} - RI}{k}$, то есть установившаяся скорость больше при меньшем токе. Значит, большая скорость у первого груза.

Верно указаны слагаемые, входящие в уравнение энергетического баланса	**2**
Правильно записано уравнение энергетического баланса двигателя	**3**
Получено верное уравнение, связывающее скорость и силу тока	**2**
Дан верный ответ на вопрос	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: При равномерном подъеме груза сила натяжения троса должна равняться по величине силе тяжести, действующей на груз, то есть $F = mg$. Запишем уравнение энергетического баланса для подъема груза первым электродвигателем: $\mathcal{E} \cdot I_1 = R_1 I_1^2 + mg \cdot v_1$. При этом $I_1 = \dfrac{mg}{k_1}$. Аналогично для подъема вторым электродвигателем $\mathcal{E} \cdot I_2 = R_2 I_2^2 + mg \cdot v_2$, и $I_2 = \dfrac{mg}{k_2}$. При подъеме груза обоими электродвигателями с помощью подвижного блока сила натяжения троса $T = \dfrac{mg}{2} = k_1 I_1' = k_2 I_2'$, поэтому токи в обмотках роторов двигателей $I_1' = \dfrac{1}{2} I_1$ и $I_2' = \dfrac{1}{2} I_2$. Значит, уравнение энергетического баланса при третьем подъеме $\mathcal{E} \cdot \dfrac{I_1 + I_2}{2} = \dfrac{1}{4} R_1 I_1^2 + \dfrac{1}{4} R_1 I_1^2 + mg \cdot v$. Выразим сопротивления обмоток из первых двух уравнений: $R_1 = \dfrac{\mathcal{E} - k_1 v_1}{I_1} = \dfrac{\mathcal{E}}{I_1} - mg\dfrac{v_1}{I_1^2}$ (и $R_2 = \dfrac{\mathcal{E} - k_2 v_2}{I_2} = \dfrac{\mathcal{E}}{I_2} - mg\dfrac{v_2}{I_2^2}$), и подставим их в третье. В результате получим, что $\mathcal{E} \cdot \dfrac{I_1 + I_2}{2} = \mathcal{E} \cdot \dfrac{I_1}{4} - mg\dfrac{v_1}{4} + \mathcal{E} \cdot \dfrac{I_2}{4} - mg\dfrac{v_2}{4} + mg \cdot v$. Значит, $v = \dfrac{v_1 + v_2}{4} + \mathcal{E} \cdot \dfrac{I_1 + I_2}{4mg} = 1{,}75$ м/с.

Правильно записано уравнение энергетического баланса для первого подъема	**2**
Правильно записано уравнение энергетического баланса для второго подъема	**2**
Указано, что в третьем случае двигатели создают одинаковое натяжение троса, равное $mg/2$	**1**
Указано, что $I_1' = I_1/2$ и $I_2' = I_2/2$	**2**
Правильно записано уравнение энергетического баланса для третьего подъема	**2**
Из этого уравнения исключены сопротивления	**3**

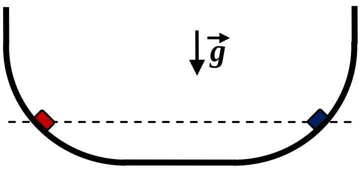
обмоток и получено уравнение для v	
Получен правильный аналитический ответ для v	**2**
Получен правильный численный ответ для v	**1**
ВСЕГО	**15**

Пример задания теоретического тура для 10-11 классов (максимальная сумма за теоретический тур – 100 технических баллов)

Задание 1:

Вопрос: Небольшая шайба, движущаяся по гладкой горизонтальной плоскости, налетает на покоящуюся шайбу, и происходит лобовой упругий удар. При каких значениях отношения масс шайб величина скорости налетающей шайбы уменьшается в два раза?

Задача: Две маленькие шайбы с разными массами отпускают без начальных скоростей с одинаковой высоты $h = 25$ см в яме–«полутрубе» с гладкими стенками (форма которых – четверть цилиндра с вертикальным продолжением сверху), гладко переходящими в гладкое горизонтальное дно (см. рисунок).



На горизонтальном дне ямы произошел упругий косой удар, в результате которого более тяжелая шайба уменьшила свою скорость в три раза и развернулась на 90°. На какую максимальную высоту поднимется более легкая шайба по стене ямы (высота стенки больше этой высоты, а ее длина такова, что шайбы не покидают ямы за время подъема).

Ответ на вопрос: Запишем законы сохранения энергии и импульса (в проекции на ось движения налетающей шайбы) для упругого лобового удара двух шайб с начальными скоростями v_0 и 0 и конечными скоростями v и V соответственно: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} \Rightarrow v_0^2 = \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + nV^2 \Rightarrow V = v_0\sqrt{\frac{3}{4n}}$ и $mv_0 = mv + MV \Rightarrow v_0 = \pm\frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\sqrt{3n}.$ Из последнего соотношения находим, что существуют два решения: $n_1 = 3$ и $n_2 = \frac{1}{3}$.

Правильно записан закон сохранения энергии	**2**
Правильно записан закон сохранения импульса	**2**
Из этих соотношений получено правильное уравнение для n	**3**
Дан правильный ответ	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Ясно (из закона сохранения механической энергии), что на горизонтальный участок шайбы выедут с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = \sqrt{2gh}$, направленными навстречу друг другу. Направим ось *x* по направлению движения боле тяжелой шайбы (массы *M*) до удара, а ось *y* – по направлению ее движения после удара (перпендикулярно *x*). Закон сохранения импульса в проекции на эти оси дает:

$$\left\{\begin{matrix} Mv_0 - mv_0 = mv_x \\ 0 = M\dfrac{v_0}{3} + mv_y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} v_x = (n-1)v_0 \\ v_y = -\dfrac{n}{3}v_0 \end{matrix}\right.$$

Здесь $n \equiv \dfrac{M}{m}$, а $\vec{v}$ – скорость более легкой шайбы после удара.

Подставим эти соотношения в уравнение закона сохранения энергии $\dfrac{(M+m)v_0^2}{2} = \dfrac{m\vec{v}^2}{2} + \dfrac{M(v_0/3)^2}{2}$. Получим, что $n(5n-13) = 0$. Поскольку $M \neq 0$, то $n = 2{,}6$. Движение вдоль оси *y* не влияет на подъем шайбы на стенку ямы, а $v_x = 1{,}6 \cdot v_0$. Снова воспользуемся законом сохранения энергии: максимальная высота подъема легкой шайбы на стенку ямы $h' = \dfrac{v_x^2}{2g} = 2{,}56 \cdot \dfrac{v_0^2}{2g} = 2{,}56h = 64$ см.

Указано (используется в решении), что на горизонтальный участок шайбы выедут с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = \sqrt{2gh}$,	**2**

направленными навстречу друг другу	
Правильно записан закон охранения импульса для соударения шайб (в векторной или компонентной форме)	**2**
Правильно выражена скорость легкой шайбы после удара через n	**3**
Правильно записан закон сохранения энергии для соударения шайб	**2**
v_x правильно выражена через v_0	**3**
Получены правильные аналитический ($h' = 2{,}56h$) и численный ответы	**2+1=3**
ВСЕГО	**15**

Задание 2:

Вопрос: В сосуде под подвижным поршнем находится воздух с относительной влажностью 30%. Какой станет относительная влажность воздуха, если опустить поршень, уменьшив объем воздуха в 3 раза, не нарушая герметичности сосуда и поддерживая неизменной температуру его содержимого?

Задача: В хорошо загерметизированном помещении температура воздуха равна $t_0 = 18°\,\text{C}$, а его относительное влажность $r_0 = 25{,}0\,\%$. В помещении включили обогреватель. Когда температура поднялась до $t_1 = 20°\,\text{C}$, относительная влажность стала равна $r_1 = 22{,}2\ \%$. Какой станет относительная влажность воздуха в помещении при повышении температуры до $t_2 = 22°\,\text{C}$? В интервале температур от $t_0 = 18°\,\text{C}$ до $t_2 = 22°\,\text{C}$ с удовлетворительной точностью зависимость давления насыщенного пара от температуры можно считать линейной.

Ответ на вопрос: Если конденсация водяного пара в процессе сжатия не начнется, то масса водяного пара останется неизменной. Тогда при изотермическом сжатии парциальное давление водяного пара будет расти обратно пропорционально объему, и к концу сжатия возрастет в 3 раза. Давление насыщенного водяного пара зависит только от температуры, и поэтому оно останется неизменным. Значит, в отсутствие конденсации относительная влажность возрастает в 3 раза и составит 90%. Как видно, пар остался не насыщенным. Значит, предположение об отсутствии конденсации верно и относительная влажность станет равна 90%.

Указано, что масса водяного пара может меняться только из-за конденсации	**3**
Указано, что в отсутствие конденсации давление растет обратно пропорционально объему	**2**
Указано (используется в решении), что давление насыщенного пара при постоянной температуре неизменно	**2**
Дан правильный ответ	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: В соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, давление паров воды массой m в помещении объемом V при температуре T равно $p = \frac{mRT}{\mu V}$. Давление насыщенного пара, согласно условию, можно записать в виде $p_н(T) = aT + b$. Поэтому относительная влажность воздуха $r(T) = \frac{mR}{\mu V}\frac{T}{aT+b}$, и можно заметить, что обратная величина является линейной функцией обратной абсолютной температуры: $\frac{1}{r} = A + B\frac{1}{T}$. Запишем эти соотношения для температур t_0 и t_1: $\frac{1}{r_0} = A + B\frac{1}{T_0}$ и $\frac{1}{r_1} = A + B\frac{1}{T_1}$. Выразим из них коэффициенты зависимости $A = \frac{r_0T_1 - r_1T_0}{r_0r_1(T_1-T_0)}$ и $B = -\frac{T_0T_1(r_0-r_1)}{r_0r_1(T_1-T_0)}$, и с их помощью вычисляем относительную влажность при t_2: $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_0r_1(T_1-T_0)}\left(r_0T_1 - r_1T_0 - \frac{T_0T_1}{T_2}(r_0 - r_1)\right)$. В результате получаем:

$$r_2 = \frac{r_0r_1(T_1-T_0)T_2}{T_2(r_0T_1-r_1T_0)-T_0T_1(r_0-r_1)} \approx 19{,}9\%.$$

Допустимо частичное использование числовых данных: например, при подстановке значений температур $r_3 = \frac{291r_0r_1}{586r_0-295r_1} \approx 19{,}9\%$.

Давление паров выражено из уравнения	**3**

Менделеева-Клапейрона	
Используется формула линейной зависимости для $p_н(T)$	**2**
Записана линеаризованная связь r и температуры	**3**
Коэффициенты линейной зависимости выражены через данные задачи (аналитически или численно)	**2+2=4**
Записано выражение для r_2	**1**
Получен правильный численный ответ	**2**
ВСЕГО	**15**

Задание 3:

Вопрос: Две горизонтальные трубы проложены параллельно, имеют одинаковую длину и одинаковое сечение почти по всей длине, кроме участка в середине, где у одной из труб имеется сужение (сечение трубы плавно уменьшается, а потом плавно увеличивается до первоначального значения). На вход обеих труб вода подается с одинаковой скоростью. В некоторый момент времени на вход труб одновременно попадают частицы краски, плывущие по течению, не касаясь стенок. В какой из труб (постоянного сечения или с сужением) частицы краски доплывут до конца трубы раньше? Сжимаемостью и вязкостью воды можно пренебречь. Ответ объяснить.

Задача: На конце шланга диаметром 3,6 см поставили коническую насадку длиной $l = 50$ см с диаметром выходного отверстия 1,8 см. Струю направляют горизонтально, а давление в шланге таково, что струя попадает в мишень, расположенную от выходного отверстия на расстоянии по горизонтали L и ниже по высоте на H. Известно, что $H = \frac{1}{3}L$ и что необходимое давление оказалось на $\Delta p = 54$ кПа больше атмосферного. Затем насадку поменяли на другую – такой же длины, но с диаметром выходного отверстия 1,2 см, и установили ее концом вверх под углом 45° к горизонту. Какое избыточное давление нужно создать в шланге теперь, чтобы струя по-прежнему попадала в мишень (положение выходного отверстия и мишени не изменились)? Плотность воды $\rho \approx 1$ г/см^3, ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

Ответ на вопрос: Для стационарного течения расход воды в каждом сечении постоянен. Так как сжимаемостью воды можно пренебречь, то это условие можно записать в виде $vS = const$. Значит, в области сужения вода (а вместе с ней и частицы краски) движутся быстрее, чем на аналогичном участке трубы постоянного сечения. Поэтому до конца трубы частицы краски раньше доплывут в трубе с сужением.

Указано, что расход воды в каждом сечении постоянен	**3**
Условие постоянства расхода используется в виде $vS = const$	**2**
Указано, что в области сужения вода и частицы краски движутся быстрее, чем на аналогичном участке трубы постоянного сечения	**2**
Дан верный ответ	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Поскольку струя попадает в мишень, то скорость ее выхода из насадки в первом случае определяется из соотношения $L = v_0 t = v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}} \Rightarrow v_0^2 = \dfrac{gL^2}{2H}$. Так как расход воды при прохождении конической насадки в каждом сечении постоянен, то скорость воды на входе в насадку $V = \left(\dfrac{d_1}{d_0}\right)^2 v_0$.

Перепад давлений можно определить из уравнения Бернулли (давление на выходе из насадки считаем равным атмосферному):

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 \Rightarrow \Delta p = \frac{\rho v_0^2}{2}\left[1 - \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^4\right] = \frac{15gL^2}{64H}.$$

Во втором случае для нахождения скорости выхода воды из насадки запишем уравнение траектории «маленькой» порции воды

$$\left\{\begin{aligned} x(t) &= v_0' \cos(\alpha)t \\ y(t) &= v_0' \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x) = \mathrm{tg}(\alpha)\cdot x - \frac{g\,x^2}{2v_0'^2\cos^2(\alpha)} = \mathrm{tg}(\alpha)x - \frac{g\,x^2}{2v_0'^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)]\,.$$

Для точки падения $-H = L\cdot \mathrm{tg}(\alpha) - \dfrac{gL^2}{2v_0'^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)]$. По условию, $\alpha = 45°$, и поэтому $v_0'^2 = \dfrac{gL^2}{2(L+H)}$. Скорость входа воды в насадку теперь $V' = \left(\dfrac{d_2}{d_0}\right)^2 v_0'$, а уравнение Бернулли принимает вид $\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const$. При прохождении насадки центр масс слоя поднимается на высоту $h_2 - h_1 \approx l\sin(\alpha)$. Значит, $\dfrac{\rho V'^2}{2} + p' = \dfrac{\rho v_0'^2}{2} + \rho g l \sin(\alpha) + p_0$, и

$$\Delta p' = \frac{\rho v_0'^2}{2}\left(1 - \frac{d_2^4}{d_0^4}\right) + \rho g l \sin(\alpha) = \frac{20}{81}\frac{gL^2}{L+H} + \rho g l \sin(\alpha) =$$

$$= \frac{256}{243}\frac{H}{L+H}\Delta p + \rho g l \sin(\alpha) \approx 17 \text{ кПа}.$$

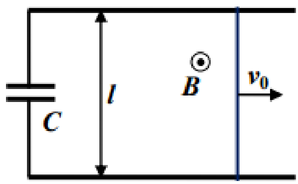
Правильно определено v_0 (для первого случая)	**1**
Записано выражение для скорости на входе в насадку $V = \left(\dfrac{d_1}{d_0}\right)^2 v_0$	**2**
Записано уравнение Бернулли (закон сохранения энергии) для первого случая	**1**
Получена формула, эквивалентная $\Delta p = \dfrac{15gL^2}{64H}$	**2**
Правильно определено v_0' (для второго случая)	**2**
Записано выражение для скорости на входе в насадку $V' = \left(\dfrac{d_2}{d_0}\right)^2 v_0'$	**1**
Записано уравнение Бернулли (закон сохранения энергии) для второго случая	**2**

Получена правильная формула для $\Delta p'$	**2**
Получен правильный численный ответ	**2**
ВСЕГО	**15**

Задание 4:

Вопрос: Найдите ЭДС индукции в проводящем стержне длиной $l = 0{,}5$ м, скользящем по параллельным соединенным шинам, плоскость которых перпендикулярна вектору индукции $B = 0{,}5$ Тл однородного магнитного поля со скоростью $v = 1$ м/с. Стержень перпендикулярен шинам.

Задача: Изучите возможность преобразования энергии, теряемую массивным телом при торможении, в энергию заряда конденсатора емкостью $C = 6$ Ф. Дрезина массой $m = 12$ т движется со скоростью $v_0 = 25$ м/с, и опускает на горизонтальные сверхпроводящие шины проводящую перемычку длины $l = 1{,}5$ м, замыкая цепь заряда конденсатора. Шины и перемычка находятся в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 8$ Тл. Трение перемычки о шины пренебрежимо мало. Найдите максимальный заряд конденсатора и КПД его зарядки до этого заряда (затратами считать потерю кинетической энергии дрезины).



Ответ на вопрос: При движении перемычки изменяется площадь контура, и поэтому изменяется магнитный поток. В соответствии с законом Фарадея, величина ЭДС индукции

$$E_i = \left|\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}\right| = Bl\,\frac{\Delta x}{\Delta t} = Blv = 0{,}25\ \text{В}.$$

Правильно указано, что изменение магнитного потока связано с изменением площади контура	**3**
Правильно записан закон Фарадея	**3**
Получена правильная формула для ЭДС индукции	**2**
Получен правильный численный ответ	**2**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: При движении перемычки в магнитном поле в ней наводится ЭДС индукции. В соответствии с законом Фарадея, величина этой ЭДС $\mathrm{E}_i = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = Bl\frac{\Delta x}{\Delta t} = Blv$. Ток зарядки конденсатора в момент, когда его заряд $q = CU_C$ определяется из соотношения $I = \frac{\mathrm{E}_i - U_C}{R} = \frac{Bl}{R}v - \frac{q}{CR}$. Ускорение дрезины создается силой Ампера, действующей на перемычку: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{IBl}{m}$. Заметим, что для любого малого интервала времени $\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{Bl}{m}\frac{\Delta q}{\Delta t}$, то есть заряд растет, а скорость падает – пока ЭДС индукции не сравняется с напряжением на конденсаторе: $Blv_{\min} = \frac{q_{\max}}{C}$ (после этого заряд конденсатора перестанет расти, а скорость – уменьшатся). Кроме того, $\Delta v = -\frac{Bl}{m}\Delta q$, и, суммируя все малые изменения, находим: $v_0 - v_{\min} = \frac{Bl}{m}q_{\max}$. Из двух полученных уравнений для минимальной скорости и максимального заряда находим:

$$v_0 - v_{\min} = \frac{B^2l^2C}{m + B^2l^2C}v_0, \qquad q_{\max} = \frac{mBlv_0C}{m + B^2l^2C} \approx 1679\,\text{Кл}.$$

Максимальная энергия заряда конденсатора $E_{\max} = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{m^2B^2l^2Cv_0^2}{2(m + B^2l^2C)^2}$, а потеря кинетической энергии дрезины $\Delta E_K = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{m(2m + B^2l^2C)B^2l^2Cv_0^2}{2(m + B^2l^2C)^2}$, поэтому КПД зарядки $\eta = \frac{E_{\max}}{\Delta E_K} = \frac{m}{2m + B^2l^2C} \approx 48\%$. В целом можно заметить, что вообще максимальное возможное значение КПД близко к 50% при $B^2l^2C << m$. Можно также заметить, что $v_0 - v_{\min} \approx 0{,}067 \cdot v_0$, то есть зарядка одного конденсатора в таком режиме тормозит дрезину лишь на небольшую часть скорости (а при существенном торможении заметно уменьшается КПД зарядки), поэтому в реальности имеет смысл использовать большое количество последовательно заряжаемых конденсаторов.

Правильно определена ЭДС индукции в перемычке	**1**
Правильно записана связь тока в перемычке со скоростью и зарядом конденсатора	**2**
Правильно записано уравнение движения дрезины	**2**
Записано условие баланса напряжений для установившегося режима, эквивалентное $Blv_{\min} = \dfrac{q_{\max}}{C}$	**2**
Получено соотношение, эквивалентное $v_0 - v_{\min} = \dfrac{Bl}{m} q_{\max}$	**3**
Правильно найден максимальный заряд конденсатора (формула или число)	**2**
Правильно найдены максимальное значение энергии конденсатора и изменение кинетической энергии дрезины	**1+1=2**
Получен правильный численный ответ для КПД зарядки (в интервале от 47% до 50%)	**1**
ВСЕГО	**15**

Рекомендации по подготовке
к олимпиадам по физике

Задачи, которые предлагаются участникам олимпиад, несколько отличаются от типовых школьных задач. Главная характерная особенность олимпиадной задачи – ее нестандартность, то есть внешняя непохожесть на типовые задачи. Для решения большинства олимпиадных задач практически никогда не требуется знание материала, изучение которого не предусмотрено школьными программами физики и математики. Однако решение олимпиадных физических задач требует умения строить физические модели, глубокого понимания физических законов, умения самостоятельно применять их в различных ситуациях, а также свободного владения математическим аппаратом (без последнего получение решения большинства физических задач невозможно).

В настоящее время издано большое количество литературы, которая может быть использована для подготовки учащихся к участию в олимпиадах высокого уровня по физике (как при самостоятельных занятиях, так и при работе с учителем). Сделаем краткий обзор литературы, которая может быть рекомендована для подготовки к участию в различных олимпиадах по физике (список литературы приведен ниже).

Одной из первых физических олимпиад в нашей стране была ***Московская городская олимпиада школьников по физике***. Материалы Московских городских олимпиад по физике разных лет частично содержатся в книгах [1], [2] и [3]. В книге [4], вышедшей в серии «Библиотечка "Квант"», опубликованы задачи Московских городских олимпиад по физике 1968–1985 годов. В книге [5] содержатся условия задач, которые предлагались ученикам 8-х – 11-х классов на теоретических турах Московских городских олимпиад по физике в 1986–2007 гг. Большая часть помещенных в этих книгах задач снабжена подробными решениями.

К задачам олимпиадного уровня трудности можно также отнести задачи, опубликованные в пособиях и сборниках [6], [7], [8]. Особо следует отметить задачник [9], созданный на основе опыта преподавания физики старшеклассникам в Новосибирском специализированном учебно-научном центре при НГУ. В этом задачнике собрано большое количество довольно трудных школьных задач и отсутствуют решения (есть только ответы). Самостоятельная работа с этой книгой при подготовке к олимпиадам является особенно эффективной, но она возможна только при довольно высоком исходном уровне знаний учащегося.

Для подготовки к ***олимпиаде учащихся 7-х – 8-х классов*** можно рекомендовать книгу [10] (следует помнить, что на момент ее издания в нашей стране было введено десятилетнее полное среднее образование, поэтому 6-й и 7-й классы того времени соответствуют нынешним 7-му и 8-му классам).

Весьма полезным, особенно на начальном этапе подготовки к олимпиадам, является классический задачник [11].

Информацию, которая может быть полезна при подготовке к различным олимпиадам по физике, также можно почерпнуть в сети Internet, обратившись по адресам [12], [13], [14] и [15].

Для целенаправленной подготовки к олимпиадам по физике «Ломоносов» и «Покори Воробьевы горы!» можно рекомендовать сборники заданий [18] – [20], в которых собраны задачи, предлагавшиеся на этих олимпиадах с 2001 года. Также для этой цели можно рекомендовать книгу [21], которая, кроме того, будет полезна и при подготовке к сдаче ЕГЭ по физике.

Подготовка к участию в олимпиадах по физике должна включать в себя несколько составляющих. Прежде всего, необходимо полно и всесторонне освоить материал школьной программы соответствующего класса по физике и математике – без этого достичь высоких результатов при выступлении на физической олимпиаде невозможно. В дополнение к материалу школьной программы необходимо осваивать дополнительные разделы школьного курса физики. Критерием успешности подготовки к олимпиаде «Ломоносов» по физике и к олимпиаде «Покори Воробьевы горы!» может служить способность учащегося к решению задач по соответствующим темам из задачников [1], [2], [3], [11] и [18] – [21].

При подготовке к Московской олимпиаде школьников по физике учащемуся необходимо разбирать задачи из сборников [4] и [5] (пытаться решать задачи, а в случае возникновения затруднений – знакомиться с их решениями), а также самостоятельно решать задачи из сборника [9] и задачи федерального окружного этапа Всероссийской олимпиады по физике из книги [22]. При работе с последней книгой учащемуся следует обратить внимание на задачи экспериментальных туров и попытаться решить и самостоятельно выполнить хотя бы некоторые из них. Это послужит хорошей подготовкой к возможному участию в экспериментальном туре олимпиады.

На данной стадии подготовки большую пользу может принести посещение специальных занятий, которые проводятся опытными преподавателями специально для школьников, желающих принимать участие в олимпиадах высокого уровня по физике. Такие занятия, организованные Департаментом образования г. Москвы для учеников 8-х – 11-х классов, проходят в Московском институте открытого образования, на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, а также в ряде школ и лицеев г. Москвы.

Готовясь к олимпиадам по физике, нужно помнить о том, что олимпиада – это всего лишь интеллектуальное соревнование, которое проводится, прежде всего, с целью повышения интереса школьников к изучению предмета. Поэтому не следует расстраиваться, если стать победителем олимпиады не удалось. В любом случае подготовка к олимпиаде позволяет глубже освоить школьную программу, изучить дополнительные вопросы курса физики, научиться решать различные типы задач (в том числе, весьма трудных). В конечном итоге, все это принесет ощутимую пользу в плане получения хорошего образования и положительно скажется при сдаче итоговой аттестации в форме ЕГЭ и дополнительных вступительных испытаний при поступлении в Московский университет.

Список рекомендуемой литературы

Ниже приведен список пособий и ресурсов сети «Интернет», которые могут быть полезны при подготовке к олимпиадам по физике. Также очень полезно познакомиться с публикациями в журнале «Квант», в особенности – со статьями и задачами, опубликованными в рубриках «Задачник "Кванта"», «Физический факультатив», «Практикум абитуриента», «Варианты вступительных испытаний» и «Олимпиады».

1. Зубов В. Г., Шальнов В. П. Задачи по физике. – М.: Гостехиздат, 1952. – 320 с. (и все последующие издания до 11-го, М.: Новая волна, 2000).
2. Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б., Керженцев В. В., Мякишев Г. Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1980. – 384 с. (и все последующие издания до 10-го, М.: Физматлит, 2003).
3. Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Сборник задач по элементарной физике: Пособие для самообразования. – М.: Наука, 1964. – 440 с. (и все последующие издания до 7-го, М.: УНЦ ДО МГУ, 2004).
4. Буздин А. И., Ильин В. А., Кривченков И. В., Кротов С. С., Свешников Н. А. Задачи московских физических олимпиад / Под ред. С. С. Кротова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 192 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 60.) % 1968-1985 гг.
5. Варламов С.Д., Зинковский В.И., Семёнов М.В., Старокуров Ю.В., Шведов О.Ю., Якута А.А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005. Приложение: олимпиады 2006 и 2007. (изд. 2-е, испр. и доп.) / Под ред. Семёнова М.В. , Якуты А.А. – М.: Изд-во МЦНМО, 2007. – 696 с.
6. Буздин А. И., Зильберман А. Р., Кротов С. С. Раз задача, два задача... – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 240 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 81.)
7. Слободецкий И. Ш., Асламазов Л. Г. Задачи по физике. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 176 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 5). А также 2-е изд. – М.: Бюро Квантум, 2001. – 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 86).

8. Балаш В. А. Задачи по физике и методы их решения. – М.: Просвещение, 1964 (и все последующие издания до 4-го, М.:, Просвещение, 1983).
9. Задачи по физике: Учебное пособие / Под ред. О. Я. Савченко. – 4-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2001. – 368 с.
10.Лукашик В. И. Физическая олимпиада в 6--7 классах средней школы: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1987. – 192 с.
11.Гольдфарб Н. И. Физика. Задачник. 10--11 кл.: пособие для общеобразовательных учреждений. – М.: Дрофа, 2006. – 398 с. (и все предыдущие издания).
12.Страница Московской физической олимпиады на сервере Кафедры общей физики Физического факультета МГУ: http://genphys.phys.msu.ru/ol/
13.Веб-сайт «Олимпиады для школьников»: http://info.olimpiada.ru/
14.Материалы журнала «Квант» в интернете: http://kvant.mccme.ru/
15. Архив материалов газеты «Физика» (Издательский дом «Первое сентября»): http://fiz.1september.ru
16. Интернет-библиотека МЦНМО: http://ilib.mccme.ru/
17. IPhO – InternationalPhysicsOlympiads. Материалы международных физических олимпиад (на английском языке). http://ipho.phy.ntnu.edu.tw/ /
18. Задачи вступительных испытаний и олимпиад по физике в МГУ (сборники за 2001–2017 гг.). – М.: Физический ф-т МГУ.
19. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. Практический курс для поступающих в университеты. – М.: Физматлит, 2006. – 544 с.
20. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Подготовка к вступительным испытаниям в МГУ. Физика. 770 задач с подробными решениями. – М.: «Макс пресс», 2009. – 456 с.
21. Вишнякова Е.А., Макаров В.А., Семенов М.В., Черепецкая Е.Б., Чесноков С.С., Якута А.А. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач. / Под ред. В.А. Макарова, М.В. Семёнова, А.А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект–Центр, 2010. – 368 с.
22. Всероссийские олимпиады по физике. 1992--2004 / Под ред. С. М. Козела, В. П. Слободянина. – 2-е изд., доп. – М.: Вербум-М, 2005. – 534 с.

Содержание

Подписано в печать 01.10.2021.
Формат А5. Объем 5,5 п.л. Тираж 300 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
119991 Москва, Ленинские горы, д. 1, стр.2

Отпечатано в отделе оперативной печати
Физического факультета МГУ