

Типовые¹ задачи осеннего семестра по квантовой теории.

Осень 2024 г.

1 Теория возмущений

1. Одномерный гармонический осциллятор. Найти поправки к энергии n -го уровня, вызванные возмущением $H_I = \alpha x^3$.
2. Одномерный гармонический осциллятор. Найти поправки к энергии основного состояния, вызванные возмущением $H_I = \alpha x^4$. Сравнить с ответом, полученным вариационным методом.
3. Заряженный двумерный симметричный гармонический осциллятор помещен в слабое однородное магнитное поле, ориентированное по оси z . В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии второго возбужденного уровня $E^{(0)} = 3\hbar\omega$, вызванные магнитным полем.
4. Двумерный симметричный гармонический осциллятор. В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии второго возбужденного уровня $E^{(0)} = 3\hbar\omega$, вызванные возмущением $H_I = \alpha xy$. Сравнить с точным ответом.
5. Двумерный симметричный гармонический осциллятор. В первом исчезающем порядке теории возмущений найти поправки к энергии первого возбужденного уровня $E^{(0)} = 2\hbar\omega$, вызванные возмущением $H_I = \alpha xy + \beta x^2$ при $\alpha \gg \beta$. Сравнить с ответом для общего случая $\alpha \sim \beta$.
6. Найти диэлектрическую восприимчивость разреженного газа, состоящего из атомов водорода, находящихся в основном состоянии. Спином пренебречь. Ограничьтесь первым слагаемым в сумме по уровням энергии.
7. Найти диэлектрическую восприимчивость разреженного газа, состоящего из атомов водорода, находящихся в основном состоянии. Спином пренебречь. *Не используйте* выражение с суммой по уровням энергии.
8. Найти магнитную восприимчивость разреженного газа, состоящего из атомов водорода, находящихся в основном состоянии. Спином пренебречь.
9. Найти энергию взаимодействия двух атомов водорода на больших расстояниях (силы Ван-дер-Ваальса).
10. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в среднем магнитном поле с учетом тонкой структуры.
11. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в слабом магнитном поле с учетом тонкой структуры.
12. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в среднем электрическом поле с учетом тонкой структуры.
13. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в сильном электрическом поле с учетом тонкой структуры.

¹На экзамене могут быть предложены *аналогичные* задачи.

2 Рассеяние

14. Построить борновский ряд для одномерного рассеяния. Просуммировать борновский ряд для рассеяния на потенциале $V(x) = U_0\delta(x)$, сравнить с точным ответом.

15. На атоме водорода, находящемся в основном состоянии, рассеиваются μ -мезоны. Найти формфактор и дифференциальное сечение упругого рассеяния.

16. Источник потенциала Юкавы равномерно распределен по шару радиуса R с плотностью заряда ρ_0 :

$$V(\vec{x}) = \int_{|\vec{y}| < R} d^3\vec{y} \rho_0 \exp(-\mu \cdot |\vec{x} - \vec{y}|) / |\vec{x} - \vec{y}|$$

Найти формфактор и дифференциальное сечение упругого рассеяния на этом потенциале.

17. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса a для быстрых частиц, де-бройлевская длина волны которых $\lambda \ll a$. Проанализировать классический предел задачи.

18. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса a для медленных частиц, де-бройлевская длина волны которых $\lambda \gg a$.

19. Найти энергию и время жизни метастабильных s -уровней в потенциале $V(r) = V_0 \delta(r - a)$.

20. Найти энергию и время жизни метастабильных уровней в одномерном потенциале $V(x) = V_0 \delta(x - a) + V_0 \delta(x + a)$.

21. Найти энергию и время жизни метастабильных уровней в одномерном потенциале $V(|x| > a) = 0$, $V(|x| < a) = U_0 - V_0\delta(x)$.

22. Найти парциальное сечение рассеяния s -волны на потенциале $V(r) = -V_0 \delta(r - a)$. Указать условие появления резонансов всех типов.

23. Вычислить сечение упругого рассеяния медленной частицы на потенциальной яме $V(r < a) = -V_0$, $V(r > a) = 0$. Указать условие появления резонанса.

24. В приближении эйконала найти фазы рассеяния на потенциале A/r^2 . Сравнить с точным ответом.

25. В приближении эйконала найти фазы рассеяния и полное сечение рассеяния на потенциале $V(\rho, z) = V(\rho < a(1 - |z|/b)) = U_0$, $V(\rho, z) = V(\rho > a(1 - |z|/b)) = 0$.

26. Найти фазы рассеяния при упругом рассеянии на потенциале $V(r < a) = -A/r^2$, $V(r > a) = 0$.

27. Найти дифференциальное сечение упругого кулоновского рассеяния электрона на электро-троне для синглетного и триплетного состояний в системе центра масс.

28. Даны амплитуды рассеяния протона на нейтроне в триплетном и синглетном состояниях — $f_3(\theta)$ и $f_1(\theta)$. Найти вероятность переворота спина при рассеянии на угол θ , если до рассеяния спин протона был направлен вверх, а спин нейтрона — вниз.

29. Найти сечение рассеяния и сечение поглощения медленных частиц на модельном “потенциале” $V(r < a) = -iU_0$, $V(r > a) = 0$.

3 Переходы

30. Гармонический осциллятор при $t = 0$ находится в основном состоянии. При $t > 0$ он подвергается действию возмущения $H_I = \alpha \hat{x}^3 \exp(-t/\tau)$. Какова вероятность найти его на уровнях $|1\rangle$ и $|3\rangle$ в момент времени t ?
31. Гармонический осциллятор при $t = -\infty$ находится в основном состоянии. Он подвергается действию возмущения $H_I = -f_0 \hat{x} \exp(-|t|/\tau)$. Какова вероятность (во 2м порядке нестационарной теории возмущений) найти его на уровне $|n\rangle$ при $t = +\infty$? Проверьте выполнения закона сохранения вероятности.
32. Найти вероятность того, что электрон в атоме трития H^3 , находящийся в основном состоянии, перейдет в $1s$ состояние иона He^{3+} при β -распаде одного из нейтронов ядра.
33. Гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в основном состоянии. При $t > 0$ он подвергается действию возмущения $H_I = -f_0 \hat{x}$. Какова вероятность найти его на уровне $|n'\rangle$ в момент времени t ?
34. Гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в основном состоянии. Он подвергается действию возмущения $H_I = -p_0 \hat{x} \delta(t)$. Какова вероятность найти его на уровне $|n\rangle$ в момент времени t ?
35. Частица находится на дискретном уровне в дельта-яме $-V_0 \delta(x)$. Она подвергается действию возмущения $H_I(t) = -p_0 \hat{x} \delta(t)$. Какова вероятность найти ее на этом дискретном уровне в момент времени $t > 0$?

36. Гармонический осциллятор с

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2m} + k \frac{x_1^2}{2}$$

находится в первом возбужденном состоянии и взаимодействует с частицей, находящейся на дискретном уровне в δ -яме:

$$H_2 = \frac{p_2^2}{2m} - U_0 \delta(x_2),$$

потенциал их взаимодействия $W(x_1, x_2) = W_0 x_1 x_2$. Найти время жизни 2-й частицы в δ -яме.

37. Частица находится на дискретном уровне в потенциальной яме $V(x) = -V_0 \delta(x)$. Частица подвергается действию возмущения $H_I = -2\hat{x} F_0 \cos(\Omega t - Px)$. Найти время жизни частицы в яме. Как соотносятся вероятности вылететь из ямы налево и вылететь из ямы направо?
38. Частица находится на дискретном уровне в потенциальной яме $V(x) = -V_0 \delta(x)$. Частица подвергается действию возмущения $H_I = -2\hat{x} F_0 \cos(\Omega t)$. Найти время жизни частицы в яме, используя точные выражения для непрерывного спектра.
39. Частица находится в основном состоянии в трехмерной глубокой кубической яме $V(0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a) = -V_0$, $V(\text{вне куба}) = 0$. Найти время жизни и распределение частиц по углам вылета, если она подвергается действию возмущения $H_I = -2\hat{z} F_0 \cos(\Omega t)$.
40. Одномерное движение. Частица рассеивается на гармоническом осцилляторе $ky^2/2$, который находится в основном состоянии. Найти коэффициент неупругого отражения с переходом осциллятора $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$, если потенциал взаимодействия контактный $W(x, y) = U_0 \delta(x - y)$.

41. Одномерное движение. Первая частица рассеивается на второй частице, которая находится на дискретном уровне в яме $-q\delta(y)$. Найти распределение по импульсам для второй частицы при неупругом отражении первой частицы. Потенциал взаимодействия контактный $W(x, y) = U_0\delta(x - y)$.
42. Найти дифференциальное сечение неупругого рассеяния μ -мезона на неподвижном атоме водорода. Атом переходит из состояния $1s$ в состояние $2s$.

4 Вторичное квантование

43. В представлении вторичного квантования вычислить матричный элемент $\langle kn|\hat{V}|kn\rangle$ одночастичного оператора между двухчастичными состояниями. Рассмотреть случаи бозонов и фермионов и случай $k = n$.
44. В представлении вторичного квантования вычислить матричный элемент $\langle kn|\hat{W}|kn\rangle$ двухчастичного оператора между двухчастичными состояниями. Рассмотреть случаи бозонов и фермионов и случай $k = n$.
45. Вычислить правую часть уравнения Гайзенберга для оператора волновой функции (гамильтониан состоит из кинетической энергии, внешнего потенциала и парного взаимодействия).
46. Найти закон дисперсии магнона для спиновой цепочки с гамильтонианом

$$H = -\alpha \sum \vec{s}_n \vec{s}_{n+1} - \beta \sum \vec{s}_n \vec{s}_{n+2} - 2\mu_0 \vec{H} \sum \vec{s}_n$$

47. Найти парамагнитную составляющую магнитной восприимчивости свободного фермионного газа (спин частиц $3/2$) при нулевой температуре.

5 Многоэлектронный атом

48. Четыре тождественных фермиона (одномерное движение) со спином $1/2$ описываются гамильтонианом

$$H = \sum_{n=1}^4 \frac{p_n^2}{2m} + \sum_{n=1}^4 k \frac{x_n^2}{2}$$

Найти энергию и волновую функцию основного состояния.

49. Разложить электронную конфигурацию $3d^2$ на термы с помощью диаграмм Юнга.
50. Разложить электронную конфигурацию $3d^3$ на термы с помощью диаграмм Юнга.
51. Найти термы электронной конфигурации nl^2 с помощью диаграмм Юнга.
52. Найти явный вид волновых функций термов в конфигурации $2p^3$.
53. Найти явный вид волновых функций термов в конфигурации $2p^4$.
54. Найти явный вид волновых функций старших векторов термов в конфигурации $3d^2$.
55. Пользуясь правилами Хунда, найти квантовые числа S, L, J состояния с наименьшей энергией для конфигурации nl^k .

56. Найти поправки к уровням энергии многоэлектронного атома в слабом однородном магнитном поле.
57. Найти поправки к уровням энергии многоэлектронного атома в сильном однородном магнитном поле.
58. Найти поправки к уровням энергии многоэлектронного атома в слабом однородном электрическом поле.

6 Излучение

59. Найти средние значения и дисперсии напряженностей электрического и магнитного полей в двухмодовом когерентном состоянии $|\alpha_{\vec{k}_1, p_1}, \beta_{\vec{k}_2, p_2}\rangle$.
60. Найти средние значения и дисперсии напряженностей электрического и магнитного полей в состоянии $|\psi\rangle = |\alpha_{\vec{k}_1, p_1}\rangle/\sqrt{2} + |\beta_{\vec{k}_2, p_2}\rangle/\sqrt{2}$.
61. Вывести правила отбора и формулу для распределения интенсивности излучения по углам и поляризациям в магнитном дипольном приближении.
62. Вывести правила отбора и формулу для распределения интенсивности излучения по углам и поляризациям в электрическом квадрупольном приближении.
63. В дипольном приближении вычислить время жизни уровня $2p_{1/2}$ атома водорода (с учетом тонкой структуры).
64. Атом водорода помещен в слабое однородное магнитное поле. Описать излучение при переходе $3d \rightarrow 2p$ (тонкой структурой пренебречь). Указать количество линий в спектре и описать распределение их интенсивности по углам и поляризациям.
65. Найти время жизни и распределение интенсивности по углам и поляризациям при переходах между уровнями спина $3/2$, помещенного в магнитное поле.
66. Найти время жизни и распределение интенсивности излучения по углам и поляризациям при переходе между уровнями сверхтонкой структура атома водорода.
67. Доказать, что однофотонные переходы $S \rightarrow S$ запрещены во всех порядках мультипольности.
68. Найти сечение фотоэффекта для атома водорода, находящегося в основном состоянии, полагая конечное состояние электрона плоской волной.