Типовые[1] задачи к зачету по квантовой теории.

Весна 1924 г.

1 Математическое введение

1. Вычислите $\exp(i\hat{\ell}_y\varphi)\cos(\hat{z}\hat{p}_z/\hbar)\exp(-i\hat{\ell}_y\varphi)$

2. Для гармонического осциллятора вычислите
$$\exp(\xi\hat{a}^2+\xi(\hat{a}^+)^2)\sinh(7\hat{a}-13\hat{a}^+)\exp(-\xi\hat{a}^2-\xi(\hat{a}^+)^2)$$

3. Вычислите $\sigma_2^{1/3}$.

4. Вычислите $f(\hat{A})$, где
$$\hat{A}=\begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(x)=\begin{cases} -2\sqrt{2} & x<0 \\ 2 & x=0 \\ 2\sqrt{2} & x>0 \end{cases}$$

5. Вычислите $\exp\left(\frac{1}{2}\xi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)(x_0+\vec{x}\cdot\vec{\sigma})\exp\left(\frac{1}{2}\xi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$ (здесь $\vec{n}$ — единичный вектор). Вспомните специальную теорию относительности и сообразите, какой у ответа физический смысл.

6. Вычислите $\exp\left(i\frac{1}{2}\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)(\vec{b}\cdot\vec{\sigma})\exp\left(-i\frac{1}{2}\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$ (здесь $\vec{n}$ — единичный вектор). Сообразите, какой у ответа физический смысл.

7. Найдите собственные вектора и собственные значения оператора $H_{n,n+1}=H_{n,n-1}=-V$, $H_{n,n}=W$ (при $n\neq 0$), $H_{0,0}=U$, остальные $H_{n,m}=0$, здесь $-\infty<n<\infty$. Какую систему описывает такой оператор?

8. Найдите собственные вектора и собственные значения оператора $H_{n,n+1}=H_{n,n-1}=-V$, $H_{n,n}=W$, остальные $H_{n,m}=0$, здесь $1\leq n\leq N-1$. Какую систему описывает такой оператор?

2 Спин 1/2

9. Волновая функция спина 1/2 равна
$$|\psi\rangle=\begin{pmatrix} -1/2+i/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$
Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta,\varphi)$. При каких θ,φ вероятность попадания в верхний пучок достигает максимума? Чему равна эта максимальная вероятность?

[1] На зачете могут быть предложены *аналогичные* задачи.

10. Волновая функция спина 1/2 равна

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Чему равно среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}(\theta, \varphi)$? При каких θ, φ это среднее достигает максимума? Чему равно это максимальное среднее?

11. Частица со спином 1/2 находится в состоянии

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/2 - \sqrt{2}/6 & -1/6 - i/6 \\ -1/6 + i/6 & 1/2 + \sqrt{2}/6 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta, \varphi)$. При каких θ, φ вероятность попадания в верхний пучок достигает максимума? Чему равна эта максимальная вероятность?

12. Матрица плотности спина 1/2 равна

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & c \end{pmatrix}$$

Чему равно среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}(\theta, \varphi)$? При каких θ, φ это среднее достигает максимума? Чему равно это максимальное среднее?

13. Спин 1/2 в начальный момент времени направлен по оси $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Он помещен в однородное магнитное магнитное поле, направленное по оси y. Найдите волновую функцию и направление спина в произвольный момент времени t, решив задачу в представлении Шредингера.

14. Спин 1/2 в начальный момент времени находится в чистом состоянии $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Он помещен в однородное магнитное магнитное поле, направленное по оси z. Найдите направление спина в произвольный момент времени t, решив задачу в представлении Гайзенберга.

15. Спин 1/2 в начальный момент времени находится в состоянии $\rho(t=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi\vec{n}\vec{\sigma}$. Он помещен в однородное магнитное магнитное поле, ориентированное по оси y. Найдите матрицу плотности, направление и степень поляризации в произвольный момент времени t, решив задачу в представлении Шредингера.

16. Спин 1/2 в начальный момент времени находится в состоянии

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 5/8 & -\sqrt{3}/16 - 3i/16 \\ -\sqrt{3}/16 + 3i/16 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Он помещен в однородное магнитное магнитное поле, ориентированное по оси x. Найдите направление и степень поляризации в произвольный момент времени t, решив задачу в представлении Гайзенберга.

17. Спин 1/2 помещен в магнитное поле $\vec{H}(t) = (H_1 \cos\Omega t, -H_1 \sin\Omega t, H_0)$. В момент времени $t = 0$ спин был ориентирован вверх. Найдите вероятность переворота спина в момент времени t. Чему соответствует условие электронного парамагнитного резонанса?

18. Пучок частиц со спином $1/2$, ориентированным по оси y, влетает в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси z. На выходе из прибора верхний пучок пролетает область магнитного поля H_z, время пролета τ. После этого пучки сводят вместе и направляют в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси x. Найдите отношение интенсивностей пятен.

19. Пучок частиц со спином $1/2$ в состоянии $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ влетает в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси z. На выходе из прибора верхний пучок пролетает область магнитного поля H_z, время пролета τ. После этого пучки сводят вместе и направляют в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси x. Найдите отношение интенсивностей пятен.

3 Гармонический осциллятор

20. Для гармонического осциллятора вычислите $\langle n|xpx|m\rangle$.

21. Для гармонического осциллятора вычислите $\langle n|xppx|n\rangle$.

22. Для гармонического осциллятора вычислите $\langle 0|x^{2024}|2022\rangle$.

23. Одномерный гармонический осциллятор. В импульсном представлении найти явный вид волновой функции для когерентного состояния $|\alpha\rangle$.

24. Вычислите $\langle \beta|\hat{p}\hat{x}\hat{p}|\alpha\rangle$ для двух когерентных состояний. Как матричный элемент зависит от $|\alpha - \beta|$?

25. Для гармонического осциллятора вычислите среднее значение и дисперсию координаты в состоянии $|\psi\rangle = (\sqrt{3}/2)|\alpha\rangle - (i/2)|\beta\rangle$, полагая $|\alpha - \beta| \gg 1$.

26. Матрица плотности осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = (2/3)|0\rangle\langle 0| + (1/7)|0\rangle\langle 1| + (1/7)|1\rangle\langle 0| + (1/3)|1\rangle\langle 1|.$$

Найдите среднее значение и дисперсию координаты.

27. Матрица плотности осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0} \exp(-\gamma n)(1 - \exp(-\gamma))\; |n\rangle\langle n|$$

(здесь $\gamma = \hbar\omega/kT$). Найдите среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение координаты.

28. Гармонический осциллятор. В начальный момент времени волновая функция равна $\sqrt{\frac{1}{3}}|7\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|8\rangle$. Найдите средние значение и дисперсию координаты в момент времени t, решая задачу в представлении Шредингера.

29. Гармонический осциллятор. В начальный момент времени волновая функция равна $\sqrt{\frac{2}{3}}|12\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|13\rangle$. Найдите средние значение и дисперсию импульса в момент времени t, решая задачу в представлении Гайзенберга.

30. Гармонический осциллятор. В начальный момент времени волновая функция равна $\sqrt{\frac{1}{2}}|\alpha\rangle + i\sqrt{\frac{1}{2}}|\beta\rangle$ (здесь $|\alpha-\beta| \gg 1$). Найдите средние значение и дисперсию координаты в момент времени t, решая задачу в представлении Шредингера.

31. Гармонический осциллятор. В начальный момент времени волновая функция равна $\sqrt{\frac{1}{2}}|\alpha\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|\beta\rangle$ (здесь $|\alpha-\beta| \gg 1$). Найдите средние значение и дисперсию импульса в момент времени t, решая задачу в представлении Гайзенберга.

32. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t=0$ находится в основном состоянии. Затем он на интервале $0 < t < t_0$ подвергается воздействию классической силы $f(t) = f_0$. Найдите волновую функцию и вероятность обнаружить его на n-ом уровне в произвольный момент времени $t > t_0$. Чему при этом равна дисперсия импульса?

33. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t=0$ находился в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. На него действует классическая сила $f(t) = f_0\delta(t)$. Найдите волновую функцию и вероятность обнаружить его на n-ом уровне в произвольный момент времени $t > 0$. Чему при этом равна дисперсия координаты?

34. Найдите уровни энергии и волновые функции системы $H = p_x^2/(2m) + p_y^2/(2m) + kx^2/2 + qy^2/2 + \alpha xy$.

35. Найдите среднее значение и дисперсию оператора $\hat{x}$ для двух состояний двумерного симметричного гармонического осциллятора: $|\alpha_x\beta_y\rangle$ и $\sqrt{\frac{1}{2}}|\alpha_x 0_y\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|0_x\beta_y\rangle$ (здесь $|\alpha| \gg 1$ и $|\beta| \gg 1$). Каков физический смысл полученных ответов?

36. Симметричный двумерный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle$$

Найдите волновую функцию $|\psi(t)\rangle$, среднее значение и дисперсию операторов x и p_y в произвольный момент времени t.

37. Гамильтониан системы 7 частиц (одномерное движение) имеет вид

$$H = \sum_{n=1}^{7} \frac{p_n^2}{2m} + \sum_{n=1}^{7} k\frac{x_n^2}{2} + \sum_{m\neq n} q\frac{(x_m - x_n)^2}{2}$$

Найдите уровни энергии и волновые функции системы.

38. Гамильтониан системы 13 частиц (одномерное движение) имеет вид

$$H = \sum_{n=1}^{13} \frac{p_n^2}{2m} + \sum_{n=1}^{13} k\frac{x_n^2}{2} + \sum_{n=1}^{12} q\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2}$$

Найдите уровни энергии и волновые функции системы.

4 Одномерный кусочно-постоянный потенциал, периодический потенциал

39. Найдите уровни энергии в потенциале $V(|x| < a) = V_0\delta(x - a) + V_0\delta(x + a) - U_0$, $V(|x| > a) = 0$.

40. Найдите уровни энергии в потенциале $V(|x| > a) = \infty$, $V(b < |x| < a) = 0$, $V(|x| < b) = U_0$.

41. Найдите уровни энергии в потенциале $V(x) = -V_0\delta(x - a) - V_0\delta(x + a) + U_0\delta(x)$. Как их количество зависит от параметров задачи?

42. Найдите коэффициенты отражения и прохождения для потенциала $V(x < 0) = 0$, $V(x > 0) = U_0 + V_0\delta(x)$.

43. При каком q коэффициент прохождения на потенциале $V(|x| > a) = 0$, $V(|x| < a) = U_0 - q\delta(x)$, энергия частицы $E < U_0$, равен 1? Энергия частицы $E < U_0$. Считать барьер достаточно широким.

44. Найдите расположение нижней разрешенной зоны для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x - na)$$

45. Найдите приповерхностные (Таммовские) уровни в потенциале

$$V(x > 0) = -\sum_{n=1}^{\infty} V_0\delta(x - na), \qquad V(x < 0) = U_0.$$

46. Найдите коэффициент отражения на потенциале $\sum_{n=0}^{N-1} q\delta(x - na)$.

5 Квазиклассическое приближение

47. Найдите зависимость времени жизни α-активного ядра от энергии вылетающей α-частицы.

48. Найдите зависимость тока холодной эмиссии от величины приложенного электрического поля.

49. В квазиклассическом приближении найдите уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(0 < x < a) = \epsilon x$, $V(x > a) = \infty$, полагая ϵ малым.

50. В ВКБ-приближении найдите уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(x > 0) = \alpha x$

51. В ВКБ-приближении найдите уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(x > 0) = kx^2/2$. Сравните с точным решением.

6 Теория момента

52. Вычислите $\langle \ell' m' | \ell_x \ell_y | \ell m \rangle$, $\langle \ell' m' | \ell_y \ell_x | \ell m \rangle$.

53. Дана волновая функция $|\psi\rangle = \exp(i\varphi \ell_x)|lm\rangle$. Найдите $\langle \psi | \ell_z \ell_y | \psi \rangle$.

54. Система двух спинов 1/2 находится в состоянии $|\psi\rangle = \exp(i\varphi S_x)|\downarrow\downarrow\rangle$. Чему равны вероятности $P_{S=1,S_z=1}$, $P_{S=1,S_z=0}$, $P_{S=1,S_z=-1}$, $P_{S=0,S_z=0}$?

55. Система двух спинов 1/2 находится в состоянии $S = 0$. Оба спина пропускают сквозь прибор Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta, \varphi)$. Найдите вероятности всех 4 возможных результатов (вв,вн,нв,нн).

56. Волновая функция системы двух спинов имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}|\downarrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{4}}|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle$$

Найдите матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 0.

57. Гамильтониан системы двух спинов 1/2 имеет вид

$$\hat{H} = -2\mu_1 s_z^{(1)} H_z - 2\mu_2 s_z^{(2)} H_z + \alpha \vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)}$$

Найдите уровни энергии и соответствующие волновые функции.

58. Гамильтониан системы 3 спинов имеет вид $H = \alpha(\vec{s}_1\vec{s}_2 + \vec{s}_2\vec{s}_3 + \vec{s}_3\vec{s}_1)$. Найдите уровни энергии и соответствующие волновые функции.

59. Система трех спинов. Первые два находятся в состоянии

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow\rangle, \qquad \text{третий — в состоянии} \qquad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

В каком состоянии находится первый спин, если второй и третий находятся в состоянии

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle?$$

60. Система трех спинов. Первые два находятся в состоянии

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow\rangle, \qquad \text{третий — в состоянии} \qquad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

В каком состоянии находится первый спин, если второй и третий находятся в одном из двух состояний:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow\rangle?$$

При каком условии состояние первого спина окажется чистым?

61. Сложение двух спинов 1/2. Вычислите

$$\langle S=0, S_z=0|s_x^{(1)}|S=1, S_z=-1\rangle$$

$$\langle S=1, S_z=1|s_y^{(1)}|S=1, S_z=0\rangle$$

$$\langle S=0, S_z=0|s_z^{(2)}|S=1, S_z=0\rangle$$

62. Сложение орбитального момента и спина. Вычислите

$$\langle j=\ell+1/2, m_j=m+1/2|\ell_x|j=\ell+1/2, m_j=m-1/2\rangle$$

$$\langle j=\ell-1/2, m_j=m-1/2|\ell_y|j=\ell+1/2, m_j=m+1/2\rangle$$

$$\langle j=\ell-1/2, m_j=m+1/2|\ell_z|j=\ell+1/2, m_j=m+1/2\rangle$$

63. Частица со спином 1/2 находится в состоянии $|j\ell s m_j\rangle$. Найдите направление спина $\vec{n}(\tilde{\theta},\tilde{\varphi})$ в точке с координатами (r,θ,φ).

64. Сложение моментов $l_1 = 2$ и $l_2 = 2$. Найдите $|L=2, M=2\rangle$, $|L=2, M=1\rangle$, $|L=2, M=0\rangle$.

65. Сложение моментов $l_1 = 3/2$ и $l_2 = 3/2$. Найдите все старшие вектора с определенными значениями L.

66. Сложение моментов $l_1 = \ell$ и $l_2 = 1$. Найдите $|j=\ell m_j\rangle$

67. Гамильтониан системы двух спинов равен

$$H = -2\mu_1 s_y^{(1)} H_y - 2\mu_2 s_y^{(2)} H_y$$

В начальный момент времени спины обеих частицы направлены вдоль оси "z". Найдите $|\psi(t)\rangle$ и $P_{S=0}(t)$.

7 Центрально-симметричный потенциал

68. Найдите уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(0<r<b)=U_0$, $V(b<r<a)=0$, $V(r>a)=\infty$.

69. Найдите уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(0<r<a)=\infty$, $V(a<r<b)=A/r^2+q\delta(r-c)$, $V(r>b)=\infty$.

70. Найдите уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(r<a)=-U_0$, $V(r>a)=A/r^2$.

71. Найдите среднее значение кинетической энергии, потенциальной энергии, центробежного потенциала и величины $1/r^3$ для атома водорода, который находится в состоянии $|\psi_{nlm}\rangle$.