

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

физический факультет

Квантовая теория I поток январь 2024 г.

Теоретические вопросы

1. Динамическая схема квантовой механики. Представления Гейзенберга и Шредингера. Переход от одного представления к другому. Оператор эволюции $U(t_2; t_1)$, его общий вид и основные свойства.
2. Эволюция квантовомеханического состояния во времени. Стационарные состояния, их основные свойства. Эволюция во времени нормированных суперпозиций состояний из дискретной и непрерывной частей энергетического спектра.
3. Квантование гармонического осциллятора через операторы рождения-уничтожения. Когерентные состояния, их основные свойства.
4. Toy model (Alice, Bob, ancilla) квантовой телепортации как задача об измерении в системе трех спинов $1/2$ физических величин совместно с фон Неймановской наблюдаемой (проектором на определенное состояние двух других спинов).
5. Общие свойства уравнения Шредингера для нерелятивистской частицы в потенциальном поле. Уравнение непрерывности, его физический смысл. Вариационный принцип для стационарного уравнения Шредингера.
6. Стационарная теория возмущений для невырожденного дискретного уровня (первый и второй порядки). Теория возмущений для вырожденного дискретного уровня. Близкие уровни под влиянием возмущения (avoiding crossing effect).
7. Принцип неразличимости одинаковых по своим физическим характеристикам частиц. Бозоны и фермионы. Волновые функции системы N тождественных частиц, разложение по одночастичному базису.
8. Эффективное спин-спиновое (обменное) взаимодействие как результат расщепления энергетических уровней под влиянием возмущения в системе двух тождественных частиц со спином $1/2$. Одномерный ферромагнетик Гейзенберга. Спиновые волны (магноны).
9. Многоэлектронный атом в приближении центрального поля. Оболочки и термы. Периодическая система элементов. Правила Хунда для термов внешней оболочки многоэлектронного атома, их обоснование. Тонкая структура термов, LS- и JJ- типы связи.
10. Диаграммы Юнга для валентной оболочки. Определение явного вида волновых функций термов через старшие вектора и детерминант Слэтера.
11. Вариационные методы (Ритца, Хартри-Фока и Хартри) определения электронных ВФ и уровней энергии многоэлектронного атома (на примере пара- и ортогелия).
12. Модель Томаса-Ферми для многоэлектронного атома. Поправка Амальди. Зависимость между атомным номером Z и орбитальным моментом электронов l валентной оболочки в модели Томаса-Ферми, ее проявление в порядке заполнения периодической системы элементов.

13. Основы молекулярной связи. Адиабатическое приближение, его обоснование. Ион и молекула водорода, их электронные волновые функции в первом приближении. Роль обменных эффектов.
14. Типы химической связи. Спаренные и валентные электроны. Химическая валентность, ее пространственная направленность. Гибридизация связей (на примере s- и p-орбиталей). σ - и π -связи.
15. Мгновенные переходы. Принцип Кондона. Воздействия, моделируемые δ -функцией. Адиабатическая теория возмущений. Фаза Берри.
16. Золотое правило Ферми для переходов в непрерывный спектр (первый порядок).
17. Метастабильное состояние как полюс функции Грина. Закон распада. Форма линии.
18. Квантовый эффект Зенона.
19. Потенциальное упругое рассеяние. Постановка задачи, амплитуда и дифференциальное сечение. Уравнение Липпмана-Швингера.
20. Борновский ряд в теории рассеяния. Первое борновское приближение, область его применимости.
21. Метод частичного разложения в упругом рассеянии. Фаза рассеяния. Условие унитарности для частичных амплитуд рассеяния. Оптическая теорема, ее физический смысл.
22. Рассеяние при низких энергиях. Резонансы в упругом рассеянии при низких энергиях.
23. Резонансное рассеяние на метастабильном уровне. Физический смысл метастабильного уровня.
24. Упругое рассеяние при высоких энергиях. Приближение эйконала.
25. Рассеяние тождественных частиц (в с.ц.м.).
26. Квантование свободного электромагнитного поля излучения в кулоновской калибровке. Фотоны, их энергия-импульс, спин и спиральность. Почему необходимо рассматривать пространство Фока. Вакуумная энергия.
27. Когерентные состояния и классические электромагнитные поля. Как правильно описывать классическую электромагнитную волну в терминах фотонов. Всегда ли это возможно? Оценка дисперсий потенциалов и напряженностей классической электромагнитной волны через функцию выборки актуальных мод с большими числами заполнения (оглабляющую классического волнового пакета) и флуктуации чисел заполнения по закону больших чисел.
28. Излучение и поглощение фотонов атомом в первом порядке теории возмущений. Спонтанное излучение и вынужденное излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна.
29. Мультипольное разложение в задаче излучения. E1, E2 и M1 переходы.
30. Уравнение Дирака. Уравнение непрерывности, его ковариантная форма. Спин частицы Дирака.
31. Уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле. Нерелятивистское приближение, уравнение Паули. Спиновый магнитный момент дираковской частицы. Аномальный магнитный момент, его описание через оператор Дирака-Паули.

32. Решения уравнения Дирака для свободной частицы с определенным импульсом и спиральностью. Интерпретация состояний с отрицательной энергией. Позитроны как дырки в море Дирака. С-преобразование.
33. Квазирелятивистское разложение уравнения Дирака для электрона в центральном поле. Спин-орбитальное взаимодействие и другие релятивистские поправки, их физический смысл.

Задачи

1. Волновая функция спина 1/2 равна

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Чему равно среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}(\theta, \varphi)$? При каких θ, φ это среднее достигает максимума? Чему равно это максимальное среднее?

2. Матрица плотности спина 1/2 равна

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & c \end{pmatrix}$$

Чему равно среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}(\theta, \varphi)$? При каких θ, φ это среднее достигает максимума? Чему равно это максимальное среднее?

3. Матрица плотности спина 1/2 равна

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & c \end{pmatrix}$$

Найти направление поляризации и степень поляризации. Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Найти среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.

4. Одномерный гармонический осциллятор. В импульсном представлении найти явный вид волновой функции для когерентного состояния $|\alpha\rangle$.
5. Вычислить $\langle n | \hat{p} \hat{x} \hat{p} | m \rangle$ для гармонического осциллятора.
6. Найти уровни энергии в потенциале $V(|x| > a) = 0$, $V(|x| < a) = -U_0 - V_0 \delta(x)$.
7. Найти уровни энергии в потенциале $V(x) = -V_0 \delta(x-a) - V_0 \delta(x+a) + U_0 \delta(x)$. Как их количество зависит от параметров задачи?
8. В квазиклассическом приближении найти уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(0 < x < a) = \epsilon x$, $V(x > a) = \infty$, полагая ϵ малым. Сравнить с результатом теории возмущений.
9. Система двух спинов 1/2 находится в состоянии $S = 0$. Оба спина пропускают сквозь прибор Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta, \varphi)$. Найти вероятности всех 4 возможных результатов (вв, вн, нв, нн).
10. Волновая функция системы двух спинов имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} |\downarrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{4}} |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\downarrow\uparrow\rangle$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 0.

11. Найти зависимость разности энергий основного и первого возбужденного уровней молекулы аммиака NH_3 от внешнего электрического поля.
12. В первом исчезающем приближении найти коэффициент электрической поляризуемости атома водорода в основном состоянии.
13. В первом исчезающем порядке теории возмущений найти энергию взаимодействия двух атомов водорода, находящихся в основном состоянии на большом расстоянии друг от друга (силы Ван-дер-Ваальса).
14. Найти расщепление уровней энергии атома водорода в слабом (по сравнению с тонкой структурой) магнитном поле.
15. Рассчитать расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в среднем (по сравнению с тонкой структурой) магнитном поле.
16. Рассчитать расщепление уровней атома водорода в сильном (по сравнению с тонкой структурой) магнитном поле.
17. Рассчитать расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в слабом (по сравнению с тонкой структурой) электрическом поле.
18. Рассчитать расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в среднем (по сравнению с тонкой структурой) электрическом поле.
19. Рассчитать расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в сильном (по сравнению с тонкой структурой) электрическом поле.
20. Рассчитать расщепление уровня атома водорода с $n = 2$ в перпендикулярных однородных электрическом и магнитном полях с учетом спинового магнитного момента электрона. Тонкой структурой пренебречь.
21. Найти расщепление уровня атома водорода с $n = 2$ в параллельных однородных электрическом и магнитном полях с учетом спинового магнитного момента электрона. Тонкой структурой пренебречь.
22. Найти вариационным методом энергию основного состояния атома гелия. Пробную функцию выбрать в виде произведения $1s$ -одноэлектронных кулоновских функций с эффективным зарядом $Z_{eff} = \alpha$, играющим роль вариационного параметра.
23. Найти среднюю энергию электронов и давление вырожденного электронного газа ($T = 0$).
24. Найти парамагнитную восприимчивость вырожденного электронного газа ($T = 0$).
25. Найти зависимость тока холодной эмиссии электронов с поверхности металла от приложенного электрического поля (без учета наведения зеркального заряда).
26. Найти зависимость энергии магнона от волнового числа в одномерной спиновой цепочке с гамильтонианом

$$H = -\alpha \sum_n \vec{s}_n \cdot \vec{s}_{n+1} - \beta \sum_n \vec{s}_n \cdot \vec{s}_{n+2} - 2\mu_0 H_z \sum_n \vec{s}_z^{(n)}.$$
27. Разложить электронную конфигурацию $(np)^3$ на термы.
28. Разложить электронную конфигурацию $(nd)^2$ на термы.
29. Найти явный вид волновых функций термов в конфигурации $(np)^3$.

30. Найти явный вид волновых функций термов в конфигурации $(np)^4$.

31. Найти квантовые числа термина основного состояния (S, L, J) валентной электронной конфигурации $(n\ell)^k$

32. Показать, что в многоэлектронном атоме оператор спин-орбитального взаимодействия

$$\sum_k g(r_k) \vec{\ell}_k \cdot \vec{s}_k$$

приводит к расщеплению каждого термина с квантовыми числами L, S на $2L+1$ или на $2S+1$ подуровней.

33. Найти расщепление уровней энергии многоэлектронного атома в сильном (по сравнению с тонкой структурой) однородном магнитном поле.

34. Найти расщепление уровней энергии многоэлектронного атома в слабом (по сравнению с тонкой структурой) однородном магнитном поле.

35. Найти расщепление уровней энергии многоэлектронного атома в слабом (по сравнению с тонкой структурой) однородном электрическом поле.

36. Двухуровневая система с состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$, энергии которых $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$, подвергается действию не зависящего от времени возмущения \hat{W} . Вычислить вероятность обнаружить систему в первом и во втором состоянии в момент времени t , если в момент времени $t = 0$ система находилась в основном состоянии $\hbar\omega_1$.

37. Двухуровневая система с состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$, энергии которых $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$, подвергается действию периодического возмущения, гамильтониан которого $\hat{W} \cos(\Omega t)$. Вычислить вероятность обнаружить систему в первом и во втором состоянии в момент времени t , если в момент времени $t = 0$ система находилась в основном состоянии $\hbar\omega_1$ для случая, когда расстройка частот $\Delta = \omega_2 - \omega_1 - \Omega$ мала.

38. Найти зависимость интенсивности сигнала в ЭПР-эксперименте от частоты Ω возбуждающего магнитного поля. Образец состоит из спинов $1/2$, магнитное поле равно

$$(H_1 \cos(\Omega t), -H_1 \sin(\Omega t), H_0).$$

39. При $t = 0$ нейтральная частица со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом $\vec{\mu} = 2\mu_0\vec{s}$ находится в состоянии с проекцией спина $+1/2$ на некоторое направление \vec{n} . Рассмотреть прецессию магнитного момента в поле, направленном под углом θ к этому направлению и имеющем напряженность H . Найти направление, вдоль которого ориентирован спин в момент времени t .

40. Нейтральная частица со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом $\vec{\mu} = 2\mu_0\vec{s}$ находится в однородном магнитном поле, изменяющемся во времени по закону

$$H(\sin \theta \cos(\omega t), \sin \theta \sin(\omega t), \cos(\theta)).$$

В момент времени $t = 0$ проекция спина на направление поля была равна $+1/2$. Определить вероятность того, что в момент времени t проекция спина на направление магнитного поля равна $-1/2$.

41. Найти вероятность перехода атома трития H^3 из $1s$ состояния в состояния $1s$ и $2s$ иона гелия He^{3+} при β -распаде одного из нейтронов ядра.

42. Найти дифференциальное сечение неупругого рассеяния частицы на неподвижном сферическом гармоническом осцилляторе с переходом последнего из основного в первое возбужденное состояние при контактном взаимодействии между частицей и осциллятором $W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = W_0\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

43. В борновском приближении вычислить дифференциальное сечение неупругого рассеяния мюона на неподвижном атоме водорода с возбуждением атомного электрона из $1s$ в $2s$.
44. В приближении эйконала найти парциальные фазы рассеяния на потенциале $V(r) = A/r^2$. Сравнить с точным ответом.
45. В борновском приближении вычислить формфактор и дифференциальное сечение упругого рассеяния мюонов на атоме водорода, находящемся в основном состоянии.
46. В борновском приближении найти формфактор и дифференциальное сечение упругого рассеяния заряженной частицы на равномерно заряженном шаре радиуса R .
47. В борновском приближении найти формфактор и дифференциальное сечение на потенциале $W(\vec{x}) = \int_{|\vec{y}| < a} d^3\vec{y} U_0 V(\vec{x} - \vec{y})$, где $V(\vec{x})$ — потенциал Юкавы $V(\vec{x}) = g \exp(-\mu|\vec{x}|)/|\vec{x}|$.
48. Вычислить амплитуду и сечение упругого рассеяния медленной частицы на потенциальной яме $V(r < a) = -V_0$, $V(r > a) = 0$. При каком условии в таком рассеянии наблюдается резонанс?
49. Вычислить фазу рассеяния s -волны при рассеянии на потенциале $V(r) = V_0\delta(r - a)$. При каком условии в таком рассеянии наблюдается резонанс?
50. Найти энергию и время жизни метастабильных s -состояний в потенциале $V(r) = V_0\delta(r - a)$.
51. Вычислить амплитуду и сечение упругого резонансного рассеяния частицы для s -волны на потенциале $V(r < a) = V_0r^2$, $V(r > a) = 0$. Найти энергию и время жизни метастабильных состояний, соответствующих этим резонансам.
52. Найти амплитуду и сечение упругого рассеяния медленной частицы на потенциале $V(r) = -V_0\delta(r - a)$. При каком условии в таком рассеянии наблюдается резонанс?
53. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса a для быстрых частиц, де-бройлевская длина волны которых $\lambda \ll a$.
54. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса a для медленных частиц, де-бройлевская длина волны которых $\lambda \gg a$.
55. Найти вероятность того, что рассеянный на протоне медленный нейтрон изменит ориентацию своего спина, если до столкновения спин нейтрона был направлен по оси z , а спин протона — в противоположном направлении. Амплитуда рассеяния системы протон-нейтрон в синглетном состоянии равна f_0 , в триплетном равна f_1 .
56. Найти дифференциальное сечение упругого кулоновского рассеяния двух α -частиц в системе центра масс.
57. Найти дифференциальное сечение упругого кулоновского рассеяния электрона на электроне для синглетного и триплетного состояний в системе центра масс.
58. Рассчитать угловое распределение фотоэлектронов при фотоэффекте на основном состоянии бесспинового атома водорода, индуцированном поляризованной плоской электромагнитной волной, считая конечное состояние электрона плоской волной.
59. Показать, что однофотонные переходы $S \rightarrow S$ запрещены во всех порядках мультипольности.

60. Установить, между какими уровнями заряженного сферического гармонического осциллятора возможны электромагнитные переходы в дипольном приближении. Вычислить время жизни первого возбужденного состояния осциллятора в этом приближении и распределение интенсивности излучения по углам и поляризациям.
61. Установить закон, по которому меняется интенсивность и поляризация линий в триплете, соответствующем зеемановскому расщеплению при переходе $3D \rightarrow 2P$, в зависимости от угла между направлением вылета фотонов и магнитным полем.
62. В дипольном приближении вычислить время жизни уровня $2P_{1/2}$ атома водорода и распределение интенсивности излучения по углам и поляризациям (с учетом тонкой структуры).
63. В дипольном приближении вычислить время жизни уровня $2P_{3/2}$ атома водорода и распределение интенсивности излучения по углам и поляризациям (с учетом тонкой структуры).
64. Нейтральная частица со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом $\vec{\mu} = 2\mu_0\vec{s}$ находится в однородном магнитном поле напряженности H . Найти время жизни возбужденного состояния и угловое распределение излучения при его распаде.
65. Найти явный вид волновой функции свободной дираковской частицы с определенными импульсом и спиральностью, ток переноса для свободного движения волнового пакета с энергией фиксированного знака.
66. Найти явный вид волновой функции электрона для основного $1S_{1/2}$ состояния и кратность вырождения уровней $1S_{1/2}$, $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$, $2P_{3/2}$ в релятивистском атоме водорода. Объяснить различие в кратности вырождения.
67. Три частицы со спином $1/2$ находятся в состоянии, когда 1-ая и 2-ая образуют триплет по их суммарному спину S_{12} с нулевой проекцией, а 3-я находится в произвольном чистом состоянии $|\psi\rangle$. Проводится серия одновременных измерений некоторой величины \hat{F} , относящейся только к 1-ой частице, и величины суммарного спина 2-ой и 3-ей частиц S_{23} . Отбираются события, когда $S^{(23)} = 1$ и $S_z^{(23)} = 0$. Для этих событий найти $\langle \hat{F} \rangle$ и $\langle \hat{F}^2 \rangle$. Как изменятся результаты измерения \hat{F} , если выборка будет производиться по событиям с $S^{(23)} = 0$?
68. Три частицы со спином $1/2$ находятся в состоянии, когда 1-ая и 2-ая образуют синглет по их суммарному спину S_{12} , а 3-я находится в произвольном чистом состоянии $|\psi\rangle$. Проводится серия одновременных измерений некоторой величины \hat{F} , относящейся только к 1-ой частице, и величины суммарного спина 2-ой и 3-ей частиц S_{23} . Отбираются события, когда $S_{23} = 0$. Показать, что для этих событий $\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle$ и $\langle \hat{F}^2 \rangle = \langle \psi | \hat{F}^2 | \psi \rangle$. Как изменятся результаты измерения \hat{F} , если не делать такую специальную выборку?
69. Три частицы со спином $1/2$ находятся в состоянии, когда 1-ая и 2-ая образуют синглет по их суммарному спину S_{12} , а 3-я находится в произвольном чистом состоянии $|\psi\rangle$. Проводится серия одновременных измерений некоторой величины \hat{F} , относящейся только к 1-ой частице, и величины суммарного спина 2-ой и 3-ей частиц S_{23} . Отбираются события, когда $S^{23} = 1$ и $S_z^{23} = 0$. Для этих событий найти $\langle \hat{F} \rangle$ и $\langle \hat{F}^2 \rangle$. Как изменятся результаты измерения \hat{F} , если выборка будет производиться по всем трем значениям проекции спина триплета?
70. Показать, что три p -орбитали образуют валентные связи под прямым углом друг к другу. В чем сходство и различие молекул NH_3 и PH_3 , NH_3 и NH_4 ?
71. Найти угол между тетраэдрическими связями четырехвалентного углерода, структуру σ - и π -орбиталей в молекуле этилена (исходя из того, что молекула плоская и σ -связи образуют углы $2\pi/3$), и ацетилена (исходя из того, что молекула линейная).

72. Структура валентных σ - и π -орбиталей в молекуле азота N_2 .