

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

физический факультет

Квантовая теория I поток январь 2023 г.

Теоретические вопросы I

1. Гильбертово пространство. Базис. Унитарные, эрмитовы и проекционные операторы. Их физический смысл.
2. Спектральное разложение эрмитова оператора. Случай непрерывного спектра. Определение функции от оператора. Теоремы о коммутаторах эрмитовых операторов и их собственных векторах.
3. Результаты измерения наблюдаемой. Матрица плотности, ее свойства, условие нормировки.
4. Чистое состояние. Матрица плотности чистого состояния. Описание чистого состояния с помощью вектора гильбертова пространства. Принцип суперпозиции, его обоснование.
5. Совместимые и несовместимые наблюдаемые. Полный набор наблюдаемых. Соотношение неопределенностей.
6. Пространство состояний составной системы. Нахождение матрицы плотности подсистемы. Примеры всех возможных комбинаций чистых и смешанных состояний у системы и подсистем.
7. “Парадоксы” квантовой теории. “Парадокс” GHZ (Greenberger, Horne, Zeilinger).
8. “Парадоксы” квантовой теории. “Парадокс” CHSH (Clauser, Horne, Shimony, Holt).
9. “Парадоксы” квантовой теории. “Парадокс” ЭПР (Эйнштейна, Подольского, Розена).
10. Представления Гайзенберга и Шредингера, связь между ними, формальные решения уравнений Гайзенберга и Шредингера.
11. Стационарные состояния. Симметрии и интегралы движения.
12. Оператор эволюции и его свойства. Выражение для оператора эволюции в случае гамильтониана, зависящего от времени.
13. Координатное и импульсное представление. Их связь. Операторы трансляции в координатном и импульсном пространстве.
14. Общие свойства спектра при одномерном движении. Дискретный спектр, непрерывный спектр, кратность вырождения. Осцилляционная теорема. Четный потенциал.
15. Непрерывный спектр и одномерное рассеяние. Движение волновых пакетов, их рассеяние на потенциале в одномерном случае.
16. Периодический потенциал, спектр и волновые функции. Периодический потенциал и конечный отрезок периодического потенциала.
17. Квазиклассическое приближение. Условие применимости. Условие сшивания в точках поворота.
18. Правила квантования Бора-Зоммерфельда. Коэффициент туннелирования. Условия применимости.
19. Теория момента. Матричные элементы оператора момента. Спин. Орбитальный момент.
20. Сложение моментов. Коэффициенты Клебша-Гордона. Старшие вектора.
21. Скалярные и векторные операторы. Матричные элементы скалярных операторов.
22. Матричные элементы векторных операторов.
23. Центральное-симметричное поле. Радиальное уравнение Шредингера, граничное условие.
24. Координатное и импульсное представление в 3-мерном случае. Поток вероятности, уравнение непрерывности. Падение на центр.

Теоретические вопросы II

1. Стационарная теория возмущений, случай невырожденного уровня. Условия применимости.
2. Стационарная теория возмущений, случай вырожденного уровня. Теория возмущений для близких уровней.
3. Тождественные частицы. Принцип неразличимости. Бозоны и фермионы. Базис в пространстве состояний тождественных частиц. Операторы в пространстве состояний тождественных частиц. Принцип Паули.
4. Многоэлектронный атом, приближение центрального поля, интегралы движения, конфигурация, термы.
5. Построение явного вида волновых функций термов, старшие вектора.
6. Диаграммы Юнга. 1-е и 2-е правила Хунда, их обоснование.
7. Тонкая структура термов. 3-е правило Хунда, его доказательство.
8. Упругое потенциальное рассеяние. Постановка задачи. Уравнение Липпмана-Швингера. Борновский ряд, условие сходимости, условие применимости 1-го борновского приближения.
9. Парциальное разложение. Условие унитарности для парциальных амплитуд рассеяния, фаза рассеяния. Оптическая теорема, ее физический смысл.
10. Метастабильные уровни. Метастабильный уровень и резонанс в рассеянии.
11. Метастабильные уровни. Метастабильный уровень и эволюция частицы в неидеальной потенциальной ловушке. Время жизни метастабильного уровня.
12. Рассеяние при низких энергиях, резонансы в рассеянии при низких энергиях. Дискретные и виртуальные уровни.
13. Рассеяние при высоких энергиях. Фаза рассеяния в приближении эйконала. Формула для амплитуды рассеяния в приближении эйконала как формула парциального разложения.
14. Представление Дирака. Нестационарная теория возмущений. Условия применимости.
15. Мгновенные переходы. Адиабатические переходы. Адиабатическая теория возмущений. Переходы мгновенные и адиабатические в рамках нестационарной теории возмущений.
16. Переходы под действием периодического возмущения. Золотое правило Ферми.
17. Функция Грина системы и эволюция состояния. Дискретный и непрерывный спектр системы и функция Грина. Превращение дискретного уровня в метастабильный при наличии возмущения. Закон распада метастабильного уровня и форма линии.
18. Вторичное квантование. Коммутационные соотношения для операторов рождения-уничтожения. Фоковское пространство. Базис в Фоковском пространстве.
19. Оператор волновой функции, его физический смысл. Операторы в представлении вторичного квантования. Гамильтониан и оператор числа частиц.
20. Квантование электромагнитного поля. Коммутационные соотношения для операторов рождения-уничтожения фотонов. Энергия и импульс поля.
21. Когерентное состояние как описание классической электромагнитной волны. Дисперсия компонент электромагнитного поля в когерентном состоянии. Нулевой шум.
22. Излучение фотонов квантовомеханической системой. Спонтанные и вынужденные переходы.
23. Мультипольное разложение в задаче излучения. Электрическое дипольное излучение, электрическое квадрупольное излучение, магнитное дипольное излучение.
24. Уравнение Дирака. Решения свободного уравнения Дирака с определенным импульсом и спиральностью, их интерпретация.
25. Невозможность локализации частицы Дирака. Скорость частицы Дирака. Спин частицы Дирака. Нерелятивистский предел уравнения Дирака, уравнение Паули. Квазирелятивистское разложение уравнения Дирака.

Задачи I

1. Вычислить $\exp(i\hat{l}_x\varphi) \cos(\hat{y}\hat{p}_z) \exp(-i\hat{l}_x\varphi)$
2. Вычислить $\exp(i\hat{l}_y\varphi) \sin(a\hat{z} + b\hat{p}_z) \exp(-i\hat{l}_y\varphi)$
3. Для гармонического осциллятора вычислить

$$\exp(\xi\hat{a}^2 + \xi(\hat{a}^+)^2) \sinh(\hat{a}) \exp(-\xi\hat{a}^2 - \xi(\hat{a}^+)^2)$$

4. Для гармонического осциллятора вычислить
- $$\exp(\xi\hat{a}^2 + \xi(\hat{a}^+)^2) \cosh(\hat{a}^+) \exp(-\xi\hat{a}^2 - \xi(\hat{a}^+)^2).$$
5. Вычислить $\sigma_2^{1/3}$.
 6. Вычислить $\sigma_1^{1/4}$.
 7. Вычислить $f(\hat{A})$, где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ 5 & x > 0 \end{cases}$$

8. Вычислить $f(\hat{A})$, где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -7i & 0 \\ 7i & 0 & -7i \\ 0 & 7i & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 4 & x > 0 \end{cases}$$

9. Вычислить $\exp(\vec{a}\vec{\sigma})\vec{b}\vec{\sigma}\exp(\vec{a}\vec{\sigma})$.
10. Вычислить $\exp(i\vec{a}\vec{\sigma})\vec{b}\vec{\sigma}\exp(-i\vec{a}\vec{\sigma})$.
11. Волновая функция спина 1/2 равна

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{3/8} - i\sqrt{3/8} \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta, \varphi)$. При каких θ, φ вероятность попадания в верхний пучок достигает максимума? Чему равна эта максимальная вероятность?

12. Волновая функция спина 1/2 равна

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Чему равно среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}(\theta, \varphi)$? При каких θ, φ это среднее достигает максимума? Чему равно это максимальное среднее?

13. Волновая функция спина 1/2 равна

$$|\psi\rangle = \exp[i(\beta/2)(-\sin\alpha\sigma_1 + \cos\alpha\sigma_2)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Куда направлен спин ($\theta=?$, $\varphi=?$). Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Найти среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.

14. Частица со спином 1/2 находится в состоянии

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{24} - i/\sqrt{24} \\ 1/\sqrt{24} + i/\sqrt{24} & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta, \varphi)$. При каких θ, φ вероятность попадания в верхний пучок достигает максимума? Чему равна эта максимальная вероятность?

15. Матрица плотности спина 1/2 равна

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & c \end{pmatrix}$$

Чему равно среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}(\theta, \varphi)$? При каких θ, φ это среднее достигает максимума? Чему равно это максимальное среднее?

16. Матрица плотности спина $1/2$ равна

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & c \end{pmatrix}$$

Найти направление поляризации и степень поляризации. Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в прибор Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Найти среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.

17. Пучок частиц со спином $1/2$, ориентированным по оси y , влетает в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси z . На выходе из прибора верхний пучок пролетает область магнитного поля H_z , время пролета τ . После этого пучки сводят вместе и направляют в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси x . Найти отношение интенсивностей пятен.

18. Пучок частиц со спином $1/2$ в состоянии $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ влетает в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси z . На выходе из прибора верхний пучок пролетает область магнитного поля H_z , время пролета τ . После этого пучки сводят вместе и направляют в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси x . Найти отношение интенсивностей пятен.

19. Матрица плотности одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{8}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{8}|1\rangle\langle 0|$$

Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию координаты в этом состоянии.

20. Матрица плотности одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{2}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle 1| + \frac{i}{6}|0\rangle\langle 1| - \frac{i}{6}|1\rangle\langle 0|$$

Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию импульса в этом состоянии.

21. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить $\langle \alpha | \hat{x} \hat{p} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle$, $\langle \alpha | \hat{p} \hat{x} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle$.

22. Одномерный гармонический осциллятор. В координатном представлении найти явный вид волновой функции для когерентного состояния $|\alpha\rangle$.

23. Одномерный гармонический осциллятор. В импульсном представлении найти явный вид волновой функции для когерентного состояния $|\alpha\rangle$.

24. При каком q коэффициент прохождения на потенциале $V(|x| > a) = 0$, $V(|x| < a) = U_0 - q\delta(x)$, энергия частицы $E < U_0$, равен 1? Энергия частицы $E < U_0$. Считать барьер достаточно широким.

25. Вычислить среднее значение $\hat{p} \hat{x}^2 \hat{p}$ в n -ом состоянии гармонического осциллятора.

26. Вычислить среднее значение $\hat{x} \hat{p}^2 \hat{x}$ в n -ом состоянии гармонического осциллятора.

27. Вычислить среднее значение $\hat{x} \hat{p} \hat{x} \hat{p}$ в n -ом состоянии гармонического осциллятора.

28. Вычислить $\langle n | \hat{x} \hat{p} \hat{x} | m \rangle$ для гармонического осциллятора.

29. Вычислить $\langle n | \hat{p} \hat{x} \hat{p} | m \rangle$ для гармонического осциллятора.

30. Матрица плотности осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n) (1 - \exp(-\alpha)) |n\rangle\langle n|$$

(здесь $\alpha = \hbar\omega/kT$). Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию координаты.

31. Волновая функция осциллятора имеет вид $|\psi\rangle = |\alpha\rangle/\sqrt{2} + |\beta\rangle/\sqrt{2}$. Полагая $\langle \alpha | \beta \rangle \ll 1$, найти среднее значение и дисперсию координаты.

32. Волновая функция осциллятора имеет вид $|\psi\rangle = |\alpha\rangle/\sqrt{2} + |\beta\rangle/\sqrt{2}$. Полагая $\langle \alpha | \beta \rangle \ll 1$, найти среднее значение и дисперсию импульса.

33. Гармонический осциллятор. Для состояния $\sqrt{\frac{1}{2}}|\alpha\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|\beta\rangle$ (здесь $|\alpha - \beta| \gg 1$) найти средние значения и дисперсии операторов $\hat{x}(t)$, $\hat{p}(t)$.

34. Гармонический осциллятор. Для состояния $\sqrt{\frac{1}{3}}|\alpha\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\beta\rangle$ (здесь $|\alpha - \beta| \gg 1$) найти средние значения и дисперсии операторов $\hat{x}(t)$, $\hat{p}(t)$.

35. Вычислить $\langle \beta | \hat{x} \hat{p} \hat{x} | \alpha \rangle$ для двух когерентных состояний. Как матричный элемент зависит от $|\alpha - \beta|$?
36. Вычислить $\langle \beta | \hat{p} \hat{x} \hat{p} | \alpha \rangle$ для двух когерентных состояний. Как матричный элемент зависит от $|\alpha - \beta|$?
37. Для гармонического осциллятора вычислить $\langle 0 | x p^{2023} | 2022 \rangle$.
38. Для гармонического осциллятора вычислить $\langle 0 | p x^{2023} | 2022 \rangle$.
39. Найти уровни энергии и волновые функции системы $H = p_x^2/(2m) + p_y^2/(2m) + kx^2/2 + qy^2/2 + \alpha xy$.
40. Найти уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = 0$, $V(x > 0) = U_0 - q\delta(x)$. Как их количество зависит от параметров задачи?
41. Найти уровни энергии в потенциале $V(|x| < a) = V_0\delta(x - a) + V_0\delta(x + a) - U_0$, $V(|x| > a) = 0$.
42. Найти уровни энергии в потенциале $V(|x| > a) = \infty$, $V(b < |x| < a) = 0$, $V(|x| < b) = U_0$.
43. Найти уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(0 < x < a) = 0$, $V(a < x < b) = U_0 - V_0\delta(x - a)$, $V(x > b) = \infty$.
44. Найти уровни энергии в потенциале $V(|x| > a) = 0$, $V(|x| < a) = -U_0 - V_0\delta(x)$.
45. Найти уровни энергии в потенциале $V(x) = -V_0\delta(x - a) - V_0\delta(x + a) - U_0\delta(x)$. Как их количество зависит от параметров задачи?
46. Найти уровни энергии в потенциале $V(x) = -V_0\delta(x - a) - V_0\delta(x + a) + U_0\delta(x)$. Как их количество зависит от параметров задачи?
47. Найти уровни энергии в потенциале $V(x) = V_0\delta(x - a) + V_0\delta(x + a) - U_0\delta(x)$. Как их количество зависит от параметров задачи?
48. Найти коэффициенты отражения и прохождения для потенциала $V(x < 0) = 0$, $V(x > 0) = U_0 + V_0\delta(x)$.
49. Найти расположение разрешенных зон для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x - na)$$

50. Найти расположение нижней разрешенной зоны для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x - na)$$

51. Найти приповерхностные (Таммовские) уровни в потенциале

$$V(x > 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} V_0\delta(x - na), \quad V(x < 0) = U_0.$$

52. Найти коэффициент отражения на потенциале $\sum_{n=0}^{N-1} q\delta(x - na)$.
53. Найти зависимость времени жизни α -активного ядра от энергии вылетающей α -частицы.
54. Найти зависимость тока холодной эмиссии от величины приложенного электрического поля.
55. В квазиклассическом приближении найти уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(0 < x < a) = \epsilon x$, $V(x > a) = \infty$, полагая ϵ малым. Сравнить с результатом теории возмущений.
56. В квазиклассическом приближении найти уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(0 < x < a) = \epsilon x^2$, $V(x > a) = \infty$, полагая ϵ малым. Сравнить с результатом теории возмущений.
57. В ВКБ-приближении найти уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(x > 0) = \alpha x$
58. В ВКБ-приближении найти уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(x > 0) = kx^2/2$. Сравнить с точным решением.
59. В квазиклассическом приближении найти условие появления нового уровня в потенциальной яме $V(x) = -U_0/\cosh^4(x/a)$.
60. Дан потенциал $V(x) = c|x|^\alpha$. Известно, что в этом потенциале ВКБ-уровни зависят от n как $E_n = dn^\nu$. Выразить ν через α . Проверить на гармоническом осцилляторе.

61. Доказать, что в центрально-симметричном потенциале энергия дискретного уровня $E_{n_r, l}$ растет с ростом l .
62. Найти уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(0 < r < b) = U_0$, $V(b < r < a) = 0$, $V(r > a) = \infty$.
63. Найти уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(0 < r < b) = 0$, $V(b < r < a) = A/r^2$, $V(r > a) = \infty$.
64. Найти уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(0 < r < a) = q\delta(r - b)$, $V(r > a) = \infty$.
65. Найти уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(0 < r < a) = \infty$, $V(a < r < b) = A/r^2$, $V(b < r < c) = U_0$, $V(r > c) = \infty$.
66. Найти уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(0 < r < a) = \infty$, $V(a < r < b) = A/r^2 + q\delta(r - c)$, $V(r > b) = \infty$.
67. Найти уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(r < a) = -U_0$, $V(r > a) = A/r^2$.
68. Найти уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(r < a) = -U_0 + A/r^2 + q\delta(r - a)$, $V(r > a) = 0$.
69. Найти уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(r < a) = -U_0 + q\delta(r - a)$, $V(r > a) = A/r^2$.
70. Найти уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(r < a) = -q\delta(r - a)$, $V(r > a) = A/r^2$.
71. Найти уровни энергии в сферически-симметричном потенциале $V(r < a) = -U_0 - q\delta(r - a)$, $V(r > a) = 0$.
72. Найти уровни энергии в сферически-симметричном потенциале $V(r < a) = B/r^2 - q\delta(r - a)$, $V(r > a) = A/r^2$.
73. Найти среднее значение кинетической энергии, потенциальной энергии, центробежного потенциала и величины $1/r^3$ для атома водорода, который находится в состоянии $|\psi_{nlm}\rangle$.
74. Вычислить $\langle \ell' m' | \ell_x \ell_y | \ell m \rangle$, $\langle \ell' m' | \ell_y \ell_x | \ell m \rangle$.
75. Дана волновая функция $|\psi\rangle = \exp(i\varphi \ell_y) | \ell m \rangle$. Найти $\langle \psi | \ell_z \ell_x | \psi \rangle$.
76. Система двух спинов $1/2$ находится в состоянии $|\psi\rangle = \exp(i\varphi S_y) | \uparrow \uparrow \rangle$. Чему равны вероятности $P_{S=1, S_z=1}$, $P_{S=1, S_z=0}$, $P_{S=1, S_z=-1}$, $P_{S=0, S_z=0}$?
77. Система двух спинов $1/2$ находится в состоянии $S = 0$. Оба спина пропускают сквозь прибор Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta, \varphi)$. Найти вероятности всех 4 возможных результатов (вв, вн, нв, нн).
78. Волновая функция системы двух спинов имеет вид
- $$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} | \downarrow \downarrow \rangle - \frac{1}{\sqrt{4}} | \uparrow \downarrow \rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} | \downarrow \uparrow \rangle$$
- Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 0.
79. Матрица плотности системы двух спинов имеет вид
- $$\hat{\rho} = \frac{1}{3} | \downarrow \downarrow \rangle \langle \downarrow \downarrow | + \frac{1}{3} | \uparrow \downarrow \rangle \langle \uparrow \downarrow | + \frac{1}{3} | \downarrow \uparrow \rangle \langle \downarrow \uparrow | - \frac{i}{8} | \uparrow \downarrow \rangle \langle \uparrow \uparrow | + \frac{i}{8} | \uparrow \uparrow \rangle \langle \uparrow \downarrow |$$
- Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 1.
80. Гамильтониан системы двух спинов $1/2$ имеет вид
- $$\hat{H} = -2\mu_1 s_z^{(1)} H_z - 2\mu_2 s_z^{(2)} H_z + \alpha \vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)}$$
- Найти уровни энергии и соответствующие волновые функции.
81. Гамильтониан системы 3 спинов имеет вид $H = \alpha(\vec{s}_1 \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \vec{s}_1)$. Найти уровни энергии и соответствующие волновые функции.
82. Гамильтониан системы 4 спинов имеет вид $H = \alpha(\vec{s}_1 \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \vec{s}_4 + \vec{s}_4 \vec{s}_1)$. Найти уровни энергии и соответствующие волновые функции.
83. Сложение двух спинов $1/2$. Вычислить

$$\langle S = 0, S_z = 0 | s_x^{(1)} | S = 1, S_z = -1 \rangle$$

$$\langle S = 1, S_z = 1 | s_y^{(1)} | S = 1, S_z = 0 \rangle$$

$$\langle S = 0, S_z = 0 | s_z^{(2)} | S = 1, S_z = 0 \rangle$$

84. Сложение орбитального момента и спина. Вычислить

$$\begin{aligned} \langle j = \ell - 1/2, m_j = m - 1/2 | s_x | j = \ell - 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle \\ \langle j = \ell + 1/2, m_j = m + 1/2 | s_y | j = \ell - 1/2, m_j = m - 1/2 \rangle \\ \langle j = \ell - 1/2, m_j = m + 1/2 | s_z | j = \ell + 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle \end{aligned}$$

85. Сложение орбитального момента и спина. Вычислить

$$\begin{aligned} \langle j = \ell + 1/2, m_j = m + 1/2 | \ell_x | j = \ell + 1/2, m_j = m - 1/2 \rangle \\ \langle j = \ell - 1/2, m_j = m - 1/2 | \ell_y | j = \ell + 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle \\ \langle j = \ell - 1/2, m_j = m + 1/2 | \ell_z | j = \ell + 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle \end{aligned}$$

86. Частица со спином $1/2$ находится в состоянии $|j\ell sm_j\rangle$. Найдите направление спина $\vec{n}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ в точке с координатами (r, θ, φ) .

87. Сложение моментов $l_1 = 2$ и $l_2 = 2$. Вычислить $|L = 2, M = 2\rangle, |L = 2, M = 1\rangle, |L = 2, M = 0\rangle$.

88. Сложение моментов $l_1 = 3$ и $l_2 = 1$. Найти все старшие вектора с определенными значениями L .

89. Найти коэффициенты Клебша-Гордона при сложении моментов $l_1 = 3/2$ и $l_2 = 2$.

90. Найти коэффициенты Клебша-Гордона при сложении моментов $l_1 = 5/2$ и $l_2 = 3/2$.

91. Найти коэффициенты Клебша-Гордона при сложении моментов $l_1 = \ell$ и $l_2 = 1$.

92. Сложение моментов $l_1 = \ell$ и $l_2 = 3/2$. Найти $|j = \ell + 1/2 m_j\rangle$

93. Спин $1/2$ в начальный момент времени находится в состоянии $\rho(t = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi\vec{n}\vec{\sigma}$. Он помещен в однородное магнитное поле, ориентированное по оси y . Найти матрицу плотности, направление и степень поляризации в произвольный момент времени t .

94. Спин $1/2$ помещен в магнитное поле $\vec{H}(t) = (H_1 \cos \Omega t, H_1 \sin \Omega t, H_0)$. В момент времени $t = 0$ спин был ориентирован вверх. Найти вероятность переворота спина в момент времени t . Указать условие резонанса.

95. Гамильтониан системы двух спинов

$$H = -2\mu_1 s_z^{(1)} H_z - 2\mu_2 s_z^{(2)} H_z$$

В начальный момент времени спин первой частицы направлен вдоль оси “x”, а второй — вдоль оси “y”. Найти $|\psi(t)\rangle$ и $P_{S=0}(t)$.

96. Гамильтониан системы двух спинов

$$H = -2\mu_1 s_y^{(1)} H_y - 2\mu_2 s_y^{(2)} H_y$$

В начальный момент времени спины обеих частицы направлены вдоль оси “z”. Найти $|\psi(t)\rangle$ и $P_{S=0}(t)$.

97. Гамильтониан системы двух частиц со спином $1/2$ имеет вид $\hat{H} = -2\mu_0(s_x^{(1)})H_x$. Найти вероятность того, что полный спин системы равен нулю в момент времени t , если в момент времени $t = 0$ система находилась в синглетном состоянии.

98. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находится в основном состоянии. Затем он на интервале $0 < t < t_0$ подвергается воздействию классической силы $f(t) = f_0$. Найти волновую функцию и вероятность обнаружить его на n -ом уровне в произвольный момент времени t .

99. Линейный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии $|0\rangle$. При $0 < t < 2\pi/\Omega$ на него действует классическая сила $f(t) = f_0 \sin(\Omega t)$. Найти волновую функцию $|\psi(t)\rangle$ и вероятность пребывания в состоянии $|n\rangle$ в произвольный момент времени t .

100. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находился в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. На него действует классическая сила $f(t) = f_0 \delta(t)$. Найти волновую функцию в момент времени t . Вычислить средние значения координаты и импульса и их дисперсию в момент времени t .

101. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находился в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Найти волновую функцию в момент времени t . Вычислить средние значения координаты и импульса и их дисперсию в момент времени t .

102. Симметричный двумерный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle$$

Найти волновую функцию $|\psi(t)\rangle$, среднее значение и дисперсию x, y, p_x, p_y в произвольный момент времени t .

Задачи II

1. Заряженный двумерный симметричный гармонический осциллятор помещен в слабое однородное магнитное поле, ориентированное по оси z . В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии второго возбужденного уровня $E^{(0)} = 3\hbar\omega$, вызванные магнитным полем.
2. Заряженный двумерный симметричный гармонический осциллятор помещен в слабое однородное магнитное поле, ориентированное по оси z . В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии первого возбужденного уровня $E^{(0)} = 2\hbar\omega$ и соответствующие волновые функции.
3. Двумерный симметричный гармонический осциллятор. В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии второго возбужденного уровня $E^{(0)} = 3\hbar\omega$, вызванные возмущением $H_I = \alpha xy$. Сравнить с точным ответом.
4. Двумерный симметричный гармонический осциллятор, гамильтониан возмущения $H_I = \alpha xy$. В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии первого возбужденного уровня $E^{(0)} = 2\hbar\omega$ и соответствующие волновые функции. Сравнить с точным ответом.
5. Одномерный гармонический осциллятор. Найти поправки к энергии n -го уровня, вызванные возмущением $H_I = \alpha x^3$.
6. Одномерный гармонический осциллятор. Найти поправки к энергии n -го уровня, вызванные возмущением $H_I = \alpha x^4$.
7. Одномерный гармонический осциллятор. Найти поправки к энергии основного состояния, вызванные возмущением $H_I = \alpha x^4$. Сравнить с ответом, полученным вариационным методом.
8. Найти диэлектрическую восприимчивость газа, состоящего из атомов водорода, находящихся в основном состоянии. Спином пренебречь.
9. Найти магнитную восприимчивость газа, состоящего из атомов водорода, находящихся в основном состоянии. Спином пренебречь.
10. Найти энергию взаимодействия двух атомов водорода на больших расстояниях (силы Ван-дер-Ваальса).
11. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в слабом магнитном поле с учетом тонкой структуры.
12. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в среднем магнитном поле с учетом тонкой структуры.
13. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в сильном магнитном поле с учетом тонкой структуры.
14. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в слабом электрическом поле с учетом тонкой структуры.
15. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в среднем электрическом поле с учетом тонкой структуры.
16. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в сильном электрическом поле с учетом тонкой структуры.
17. Три тождественных фермиона (одномерное движение) со спином $1/2$ описываются гамильтонианом

$$H = \sum_{n=1}^3 \frac{p_n^2}{2m} + \sum_{n=1}^3 k \frac{x_n^2}{2} + \alpha \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \alpha \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \alpha \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1$$

Найти энергию и волновые функции основного состояния.

18. Разложить электронную конфигурацию $3d^2$ на термы с помощью диаграмм Юнга.
19. Разложить электронную конфигурацию $3d^3$ на термы с помощью диаграмм Юнга.
20. Найти термы электронной конфигурации nl^2 с помощью диаграмм Юнга.
21. Найти явный вид волновых функций термов в конфигурации $2p^3$.
22. Найти явный вид волновых функций термов в конфигурации $2p^4$.
23. Найти явный вид волновых функций старших векторов термов в конфигурации $3d^2$.
24. Пользуясь правилами Хунда, найти квантовые числа S, L, J состояния с наименьшей энергией для конфигурации nl^k .
25. Найти поправки к уровням энергии многоэлектронного атома в слабом однородном магнитном поле.

26. Найти поправки к уровням энергии многоэлектронного атома в сильном однородном магнитном поле.
27. Найти поправки к уровням энергии многоэлектронного атома в слабом однородном электрическом поле.
28. Построить борновский ряд для одномерного рассеяния, найти в первом борновском приближении коэффициент отражения. Применить полученное выражение к надбарьерному отражению на потенциале $V(x < 0) = 0$, $V(0 < x < a) = U_0 x/a$, $V(a < x) = U_0$. Сравнить с точным ответом при $a \rightarrow 0$. Проанализировать ответ в классическом пределе.
29. На атоме водорода, находящемся в основном состоянии, рассеиваются μ -мезоны. Найти формфактор и дифференциальное сечение упругого рассеяния.
30. Источник потенциала Юкавы равномерно распределен по шару радиуса R с плотностью заряда ρ_0 :

$$V(\vec{x}) = \int_{|\vec{y}| < R} d^3\vec{y} \rho_0 \exp(-\mu \cdot |\vec{x} - \vec{y}|) / |\vec{x} - \vec{y}|$$

Найти формфактор и дифференциальное сечение упругого рассеяния на этом потенциале.

31. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса a для быстрых частиц, дебройлевская длина волны которых $\lambda \ll a$. Проанализировать классический предел задачи.
32. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса a для медленных частиц, дебройлевская длина волны которых $\lambda \gg a$.
33. Найти энергию и время жизни метастабильных s -уровней в потенциале $V(r) = V_0 \delta(r - a)$.
34. Найти энергию и время жизни метастабильных уровней в одномерном потенциале $V(x) = V_0 \delta(x - a) + V_0 \delta(x + a)$.
35. Найти энергию и время жизни метастабильных уровней в одномерном потенциале $V(|x| > a) = 0$, $V(|x| < a) = U_0 - V_0 \delta(x)$.
36. Найти парциальное сечение рассеяния s -волны на потенциале $V(r) = V_0 \delta(r - a)$. Указать положение резонансов.
37. Вычислить сечение упругого рассеяния медленной частицы на потенциальной яме $V(r < a) = -V_0$, $V(r > a) = 0$. Указать условие резонанса.
38. В приближении эйконала найти фазы рассеяния на потенциале A/r^2 . Сравнить с точным ответом.
39. В приближении эйконала найти фазы рассеяния и полное сечение рассеяния на потенциале $V(\rho, z) = U_0$ при $\rho < |a - z|$, $|z| < a$; $V(\rho, z) = 0$ при остальных ρ, z .
40. Найти фазы рассеяния при упругом рассеянии на потенциале $V(r > a) = A/r^2$, $V(r < a) = 0$.
41. Найти фазы рассеяния при упругом рассеянии на потенциале $V(r < a) = -A/r^2$, $V(r > a) = 0$. При каком условии происходит падение на центр?
42. Найти фазы рассеяния при упругом рассеянии на потенциале $V(r < a) = -U_0 + V_0 \delta(r - a)$, $V(r > a) = 0$.
43. Найти дифференциальное сечение упругого кулоновского рассеяния электрона на электроны для синглетного и триплетного состояний в системе центра масс.
44. Даны амплитуды рассеяния протона на нейтроне в триплетном и синглетном состояниях — $f_3(\theta)$ и $f_1(\theta)$. Найти вероятность переворота спина при рассеянии, если до рассеяния спин протона был направлен вверх, а спин нейтрона - вниз.
45. Найти сечения рассеяния и поглощения медленных частиц на “потенциале” $V(r < a) = -iU_0$, $V(r > a) = 0$.
46. Гармонический осциллятор при $t = -\infty$ находится в основном состоянии. Он подвергается действию возмущения $H_I = \alpha \hat{x}^2 \exp(-|t|/\tau)$. Какова вероятность найти его на уровне $|2\rangle$ в момент времени t ?
47. Гармонический осциллятор при $t = 0$ находится в основном состоянии. При $t > 0$ он подвергается действию возмущения $H_I = \alpha \hat{x}^3 \exp(-t/\tau)$. Какова вероятность найти его на уровнях $|1\rangle$ и $|3\rangle$ в момент времени t ?
48. Гармонический осциллятор при $t = -\infty$ находится в основном состоянии. Он подвергается действию возмущения $H_I = -f_0 \hat{x} \exp(-|t|/\tau)$. Какова вероятность (во 2м порядке нестационарной теории возмущений) найти его на уровне $|n\rangle$ при $t = +\infty$? Проверьте выполнения закона сохранения вероятности.
49. Найти вероятность того, что электрон в атоме трития H^3 , находящийся в основном состоянии, перейдет в $1s$ состояние иона He^{3+} при β -распаде одного из нейтронов ядра.

50. Гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в основном состоянии. При $t > 0$ он подвергается действию возмущения $H_I = -f_0 \hat{x}$. Какова вероятность найти его на уровне $|n'\rangle$ в момент времени t ?
51. Частица находится на дискретном уровне в дельта-яме $-V_0 \delta(x)$. Она подвергается действию возмущения $H_I(t) = -p_0 \hat{x} \delta(t)$. Какова вероятность найти ее на этом дискретном уровне в момент времени $t > 0$?
52. Гармонический осциллятор находится в основном состоянии. При $t > 0$ Он подвергается действию возмущения $H_I(t) = -p_0 \hat{x} \delta(t)$. Какова вероятность найти его на уровне $|n\rangle$ в момент времени $t > 0$?
53. Гармонический осциллятор с

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2m} + k \frac{x_1^2}{2}$$

находится в первом возбужденном состоянии и взаимодействует с частицей, находящейся на дискретном уровне в δ -яме:

$$H_1 = \frac{p_2^2}{2m} - U_0 \delta(x_2),$$

потенциал их взаимодействия $W(x_1, x_2) = W_0 x_1 x_2$. Найти время жизни 2-й частицы в δ -яме.

54. Частица находится на дискретном уровне в потенциальной яме $V(x) = -V_0 \delta(x)$. Частица подвергается действию возмущения $H_I = -2\hat{x}F_0 \cos(\Omega t - \Pi x)$. Найти время жизни частицы в яме. Как соотносятся вероятности вылететь из ямы налево и вылететь из ямы направо?
55. Частица находится в основном состоянии в трехмерной глубокой кубической яме $V(0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a) = -V_0$, $V(\text{вне куба}) = 0$. Найти время жизни частицы в яме, если она подвергается действию возмущения $H_I = -2\hat{z}F_0 \cos(\Omega t)$.
56. Атом водорода находится в основном состоянии. Найти время жизни атома, если он подвергается действию возмущения $H_I = -2\hat{z}F_0 \cos(\Omega t)$.
57. Найти дифференциальное сечение неупругого рассеяния частицы на сферическом гармоническом осцилляторе. Осциллятор переходит из основного в первое возбужденное состояние $|001\rangle$. Потенциал взаимодействия между частицей и осциллятором $W(\vec{x}, \vec{y}) = W_0 \delta(\vec{x} - \vec{y})$.
58. Найти дифференциальное сечение неупругого рассеяния μ -мезона на неподвижном атоме водорода. Атом переходит из состояния $1s$ в состояние $2s$.
59. Найти сечение фотоэффекта для атома водорода, находящегося в основном состоянии, полагая конечное состояние электрона плоской волной.
60. Вычислить матричный элемент $\langle kn | \hat{V} | kn \rangle$ одночастичного оператора между двухчастичными состояниями. Рассмотреть случаи бозонов и фермионов и случай $k = n$.
61. Вычислить матричный элемент $\langle kn | \hat{W} | kn \rangle$ двухчастичного оператора между двухчастичными состояниями. Рассмотреть случаи бозонов и фермионов и случай $k = n$.
62. Вычислить правую часть уравнения Гайзенберга для оператора волновой функции (гамильтониан состоит из кинетической энергии, внешнего потенциала и парного взаимодействия).
63. Найти средние значения и дисперсии напряженностей электрического и магнитного полей в двухмодовом когерентном состоянии $|\alpha_{\vec{k}_1, p_1}, \beta_{\vec{k}_2, p_2}\rangle$.
64. Найти средние значения и дисперсии напряженностей электрического и магнитного полей в состоянии $|\psi\rangle = |\alpha_{\vec{k}_1, p_1}\rangle / \sqrt{2} + |\beta_{\vec{k}_2, p_2}\rangle / \sqrt{2}$.
65. Вывести правила отбора и формулу для распределения интенсивности излучения по углам и поляризациям в электрическом квадрупольном приближении.
66. Вывести правила отбора и формулу для распределения интенсивности излучения по углам и поляризациям в магнитном дипольном приближении.
67. Указать, между какими уровнями заряженного сферического гармонического осциллятора возможны электромагнитные переходы в электрическом дипольном приближении. Вычислить время жизни первого возбужденного уровня осциллятора в этом приближении. Найти распределения интенсивности излучения по углам и поляризациям.

68. Указать, между какими уровнями заряженного сферического гармонического осциллятора возможны электромагнитные переходы в электрическом квадрупольном приближении. Найти распределения интенсивности излучения по углам и поляризациям.
69. В дипольном приближении вычислить время жизни уровня $2p_{1/2}$ атома водорода (с учетом тонкой структуры).
70. В дипольном приближении вычислить время жизни уровня $2p_{3/2}$ атома водорода (с учетом тонкой структуры).
71. Атом водорода помещен в слабое однородное магнитное поле. Описать излучение при переходе $3d \rightarrow 2p$ (тонкой структурой пренебречь). Указать количество линий в спектре и описать распределение их интенсивности по углам и поляризациям.
72. Найти время жизни и распределение интенсивности по углам и поляризациям при переходе между уровнями спина $3/2$, помещенного в магнитное поле.
73. Найти время жизни и распределение интенсивности излучения по углам и поляризациям при переходе между уровнями сверхтонкой структура атома водорода.
74. Доказать, что однофотонные переходы $S \rightarrow S$ запрещены во всех порядках мультипольности.
75. Найти закон дисперсии магнона для спиновой цепочки с гамильтонианом
- $$H = -\alpha \sum \vec{s}_n \vec{s}_{n+1} - \beta \sum \vec{s}_n \vec{s}_{n+2} - 2\mu_0 \vec{H} \sum \vec{s}_n$$
76. Найти парамагнитную составляющую магнитной восприимчивости свободного фермионного газа (спин частиц $3/2$) при нулевой температуре.
77. * Найти явный вид волновой функции и кратность вырождения для состояний $1S_{1/2}$, $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ частицы Дирака в кулоновском поле.
78. * Найти гиромагнитное отношение для состояния $1S_{1/2}$ частицы Дирака в кулоновском поле.