

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра квантовой теории
и физики высоких энергий

ЗАДАНИЯ

по курсу "ЭЛЕКТРОДИНАМИКА" для студентов 3-его курса
физического факультета МГУ, 2019 -2020 учебный год

Авторы-составители:

В. И. ДЕНИСОВ

В. С. РОСТОВСКИЙ

В. А. СОКОЛОВ

МОСКВА - 2019

Часть 1. "Электродинамика полей и зарядов в вакууме. Специальная теория относительности"

1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Сила Лоренца.
2. Уравнения Максвелла в интегральной форме.
3. Закон сохранения заряда и закон сохранения энергии в электродинамике (в дифференциальной форме).
4. Связь полей и потенциалов. Калибровка Лоренца и уравнения для потенциалов в этой калибровке.
5. Лапласиан от скалярной функции в декартовых прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах.
6. Решение уравнений для потенциалов в виде запаздывающих потенциалов.
7. Электрический дипольный момент. Потенциал и напряженность поля диполя в электростатике. Энергия диполя во внешнем поле.
8. Магнитный дипольный момент. Векторный потенциал и напряженность поля магнитного диполя в статике.
9. Свойства плоских электромагнитных волн. Связь векторов поля \vec{H} и \vec{E} , волнового вектора \vec{k} и частоты ω .
10. Потенциалы, напряженности полей, интенсивность и угловое распределение электрического дипольного излучения.
11. Сила радиационного трения в нерелятивистском приближении.
12. Преобразования Лоренца для координат и времени в 3-мерном виде.
13. Релятивистский закон сложения скоростей.
14. Преобразования Лоренца для четырехмерных векторов; примеры четырехмерных векторов, используемых в электродинамике; их инварианты.
15. Законы преобразования напряженностей электромагнитного поля. Тензор электромагнитного поля и его инварианты.
16. Связь энергии, импульса, массы и скорости релятивистской частицы.
17. Уравнения движения релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.
18. Выражения для плотности энергии, плотности импульса и потока энергии электромагнитного поля.
19. Функция Лагранжа релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Уравнения движения в форме Лагранжа.

1 СЕМИНАР: Векторный анализ

Математический аппарат электродинамики. Оператор Гамильтона и его применение.

Операторы градиент, дивергенция и ротор в криволинейных системах координат.

Оператор Лапласа.

1.1. Используя векторный оператор "набла" $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$,

вычислить $\text{grad}(\varphi\psi)$, $\text{div}(\varphi\vec{A})$, $\text{rot}(\varphi\vec{A})$, $\text{div}[\vec{E} \times \vec{H}]$, $\text{rot}[\vec{A} \times \vec{B}]$, $\text{grad}(\vec{A}\vec{B})$, $\Delta(\varphi\psi)$, где φ, ψ – скалярные, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{H}$ – векторные функции координат.

1.2. Вычислить $\text{grad} \varphi(r)$, $\text{div}(\vec{r} \varphi(r))$, $\text{rot}(\vec{r} \varphi(r))$, $(\vec{E} \vec{\nabla})\vec{r}$, $\text{grad}(\vec{E} \vec{r})$, $([\vec{E} \times \vec{\nabla}] \vec{r})$, $\text{div} [\vec{H} \times \vec{r}]$, $\text{rot} [\vec{H} \times \vec{r}]$, $\text{grad} f(t - r/c)/r$, где \vec{r} – радиус-вектор, \vec{E} и \vec{H} – постоянные векторы, φ и f – заданные функции скалярного аргумента.

1.2а*. Вычислить $\Delta\{(\vec{\omega} \vec{r})f(r)\}$ и $\Delta\{[\vec{\omega} \vec{r}]f(r)\}$, где $\vec{\omega}$ – постоянный вектор.

1.3*. Записать $\text{grad} \varphi$, $\text{div} \vec{A}$, $\text{rot} \vec{A}$ в цилиндрической и сферической системах координат, пользуясь выражениями для операторов grad , div , rot в произвольных ортогональных координатах (q_1, q_2, q_3)

$$\text{grad} \varphi = \frac{\vec{e}_1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3},$$

$$\text{div} \vec{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 B_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 B_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 B_3) \right\},$$

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} & \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1} & \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix},$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базисные единичные векторы в точке с координатами q_1, q_2, q_3 , h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Ламе.

1.4*. Записать уравнения магнитостатики $\text{div} \vec{H} = 0$, $\text{rot} \vec{H} = 4\pi \vec{j}/c$ в цилиндрической системе координат в общем случае и в случае аксиальной симметрии.

1.5. Записать уравнение Лапласа $\Delta \Psi = 0$ в произвольных ортогональных, в декартовых, цилиндрических и в сферических координатах.

2 СЕМИНАР: Дельта-функция

Дельта-функция Дирака и ее свойства. Построение выражений для объемной плотности заряда с использованием дельта-функции для точечных и распределенных источников.

2.1. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \delta(\Phi(x)) dx$; нули функции $\Phi(x)$ предполагаются известными, а $F(x)$ – непрерывная, однозначная функция.

2.2. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \delta(4x^2 - 1) dx$.

2.3. Вычислить интеграл $I = \int_1^{10} x \cdot \delta(\sin \frac{\pi x}{3}) dx$.

2.4. Разложить $\delta(x - x_0)$ в интеграл Фурье.

2.5. Записать выражение для плотности точечного заряда в декартовых и сферических координатах.

2.6. Заряд q равномерно распределен по поверхности шара радиуса R . Построить выражение для поверхностной и объемной плотности заряда.

2.6а. Заряд q равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса R . Записать выражение для линейной и объемной плотности заряда.

2.6б*. Заряд q равномерно распределен по отрезку нити длины L . Записать выражение для объемной плотности заряда в декартовой и цилиндрической системах координат в случае: а) если центр отрезка совпадает с началом координат, а сам отрезок направлен вдоль оси x ; б) если один из концов отрезка совпадает с началом координат, а сам отрезок направлен вдоль оси x .

2.7*. Построить выражение для плотности заряда диполя с дипольным моментом \vec{P} .

2.8. Пусть задан вектор единичной длины

$$\vec{n}(\theta, \varphi) = \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\} = \{ n_x = \sin \theta \cos \varphi, n_y = \sin \theta \sin \varphi, n_z = \cos \theta \},$$

все направления которого в пространстве равновероятны. Найдите усредненные значения произведений:

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi n_\alpha n_\beta \quad \text{и} \quad \overline{n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu,$$

где n_α - проекция вектора \vec{n} на ось α .

3 СЕМИНАР: Точные решения задач электростатики

Решение уравнения Пуассона методом разложения в интеграл Фурье. Вычисление потенциала при заданной плотности заряда в статическом сферически симметричном случае.

3.1. Решить уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho(\vec{r})$ разложением в интеграл Фурье.

3.2. Найти распределение заряда и полный заряд системы, потенциал которой равен

$$\varphi(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{b}\right).$$

3.3. Найти потенциал $\varphi(r)$ сферически симметричного распределения зарядов $\rho(r)$.

3.4*. В атоме водорода в основном состоянии заряд электрона ("электронное облако") распределен с плотностью

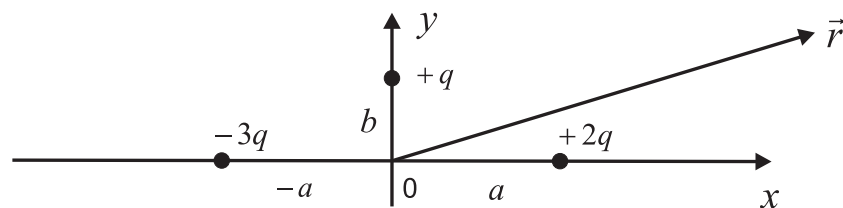
$$\rho(r) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

Найти потенциал $\varphi(r)$ электрического поля атома (ядро + электронная оболочка), энергию взаимодействия электронного облака с ядром и энергию электронного облака. Ядро считать точечным зарядом, расположенным в начале координат.

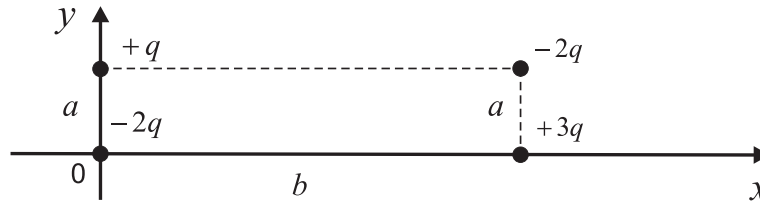
4 СЕМИНАР: Мультипольное приближение

Вычисление потенциала электростатического поля для систем точечных и распределенных зарядов в мультипольном приближении с точностью до квадрупольного слагаемого, включительно.

4.1. Найти потенциал системы зарядов, изображенной на рисунке, на больших расстояниях $r \gg a \sim b$ от системы с точностью до квадрупольного приближения, включительно.

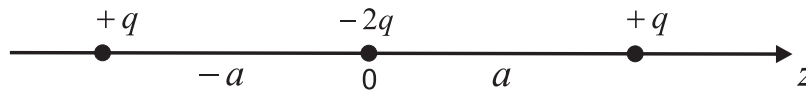


4.2. То же для системы



4.3. Найти потенциал плоского диска радиуса R , заряженного с поверхностной плотностью $\sigma_S = qr \sin \varphi / R^3$, на больших расстояниях $r \gg R$ с точностью до квадрупольного приближения, включительно.

4.4. Найти потенциал системы зарядов, изображенной на рисунке, на больших расстояниях $r \gg a$ от системы с точностью до квадрупольного приближения, включительно.



4.5. Два коаксиальных равномерно заряженных кольца из тонкой проволоки расположены в одной плоскости. Их радиусы a и b , заряды $+q$ и $-q$. Найти скалярный потенциал φ на больших расстояниях $r \gg b > a$ от такой системы зарядов с точностью до квадрупольного приближения, включительно.

4.6*. Поверхность атомного ядра описывается выражением $R(\theta) = R_0(1 + \lambda P_2(\cos \theta))$, где $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ – полином Лежандра второго порядка. Параметр деформации λ мал. Вычислить с точностью до линейных по λ членов квадрупольный момент ядра.

4.7. Скалярный потенциал, создаваемый некоторым распределением электрического заряда, на пространственной бесконечности убывает как $1/r^2$. Означает ли это, что электрический дипольный момент данного распределения зарядов отличен от нуля?

5 СЕМИНАР: Взаимодействие систем зарядов

Вычисление энергии взаимодействия систем зарядов, силы и момента сил, действующих на системы. Задачи на применение магнитного дипольного приближения.

5.1. Найти энергию взаимодействия диполя \vec{p} и точечного заряда q . Найти силу и момент сил, действующие на диполь.

5.2. Найти энергию и силу взаимодействия двух точечных диполей \vec{p}_1 и \vec{p}_2 , расположенных на большом расстоянии друг от друга.

5.2а*. Два диполя с дипольными моментами \vec{p}_1 и \vec{p}_2 находятся на большом, по сравнению с их размерами, расстоянии r друг от друга. Векторы \vec{p}_1 , \vec{p}_2 и \vec{r} взаимно перпендикулярны. Вычислить энергию взаимодействия этих диполей, силу и момент силы, действующие на диполь \vec{p}_1 со стороны поля диполя \vec{p}_2 .

5.3. Найти энергию взаимодействия точечного заряда q и квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}$, расположенных на большом расстоянии друг от друга.

5.3а*. Вывести формулы для энергии взаимодействия точечного диполя \vec{p} и квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}$, расположенных на большом расстоянии друг от друга.

5.4. Найти приближенно векторный потенциал и магнитное поле шара радиуса R , равномерно заряженного по объему зарядом q и вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр, на больших расстояниях r , $r \gg R$.

6 СЕМИНАР: Плоские волны. Потенциалы Лиенара-Вихерта

Исследование свойств плоских монохроматических электромагнитных волн с различной поляризацией. Вычисление скалярного и векторного потенциалов заряженной частицы, движущейся по заданному закону.

6.1. Плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется в вакууме вдоль оси z . Записать выражения для $\vec{E}(z, t)$, $\vec{H}(z, t)$ если волна: а) линейно поляризована, б) поляризована по кругу.

6.2. Найти плотность энергии и плотность потока энергии для плоской монохроматической электромагнитной волны, имеющей эллиптическую поляризацию; волновой вектор \vec{k} направлен по оси Z . Проверить выполнение закона сохранения энергии.

6.3. Радиус-вектор \vec{r}_0 точечного заряда q изменяется по заданному закону $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$. Используя формулы для запаздывающих потенциалов, найти скалярный φ и векторный \vec{A} потенциалы заряда (называемые потенциалами Лиенара-Вихерта).

6.3а*. Используя потенциалы Лиенара-Вихерта, найти напряженности \vec{E} и \vec{H} электромагнитного поля точечной заряженной частицы, движущейся по произвольному закону.

6.4. Используя формулы для потенциалов Лиенара-Вихерта, найти скалярный и векторный потенциалы равномерно и прямолинейно движущегося заряда q .

6.5*. Разложить скалярный и векторный потенциалы в ряд по локальному запаздыванию в дипольном приближении. Оценить вклад в потенциалы и поля от различных слагаемых в предельных случаях $\omega = 0$ (статика), $a \ll r \ll c/\omega$ (ближняя зона) и $a \ll c/\omega \ll r$ (волновая зона).

7 СЕМИНАР: Излучение нерелятивистских частиц, движущихся по заданному закону

Вычисление напряженностей электрического и магнитного полей, углового распределения и полной интенсивности излучения нерелятивистских частиц, движущихся по заданному закону. Определение поляризации излучения.

7.1. Заряд q совершает гармонические колебания вдоль оси Z с амплитудой a и частотой ω , ($a \ll c/\omega$). Найти полную интенсивность и угловое распределение излучения. Исследовать поляризацию.

7.2. Заряд q движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R . Найти угловое распределение и полную интенсивность излучения. Исследовать поляризацию излучения.

7.3. Круговой контур радиуса a с постоянным током J вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, которая образует угол α с нормалью к плоскости контура. Найти угловое распределение и полную интенсивность излучения. Указать тип поляризации.

7.4. Найти полную интенсивность и угловое распределение E2 (электрического квадрупольного) излучения линейного гармонического осциллятора (заряд q , частота ω , амплитуда a , $a \ll c/\omega$). Какова частота E2 излучения? Сравнить с полной интенсивностью и частотой E1 (электрического дипольного) излучения.

7.5. Найти полную интенсивность и частоту излучения системы из двух одинаковых зарядов q , вращающихся с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R и сдвинутых на угол $\alpha = \pi$ (т.е. в противофазе).

7.6. Оценить при каком угле $\varphi = \pi - \alpha$ интенсивности E1 и E2 излучений в задаче 7.5. будут одинаковыми.

7.7. Электрический диполь \vec{p} гармонически колеблется вдоль своей оси с амплитудой a и частотой ω (оставаясь параллельным самому себе). Найти частоту излучения и энергию, излучаемую за период.

7.8*. Диполь \vec{P} движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R оставаясь перпендикулярным плоскости окружности. Найти полную интенсивность, угловое распределение и частоту излучения.

8 СЕМИНАР: Излучение частиц при столкновении

Излучение нерелятивистских частиц при столкновениях. Определение полной энергии, излученной заряженной частицей за все время соударения.

8.1. Частица с зарядом e и массой m налетает из бесконечности на неподвижный кулоновский центр с зарядом q того же знака. Столкновение лобовое, скорость частицы на бесконечности равна v_0 . Найти полную энергию, излученную частицей за все время соударения.

8.2. Нерелятивистская частица с зарядом e , массой m рассеивается в кулоновском поле бесконечно тяжелого силового центра (заряд Q) с прицельным расстоянием a , обеспечивающим малость отклонения, $mv_0^2 \gg |eQ|/a$ (т.наз. периферическое рассеяние). Найти полную энергию, излученную во время соударения, если скорость частицы на бесконечности равна v_0 .

8.3. Нерелятивистская частица с зарядом q , массой m движется в однородном постоянном магнитном поле \vec{H} . Найти время, в течение которого кинетическая энергия частицы уменьшается в 10 раз вследствие излучения.

8.4*. Оценить по порядку величины энергию, излученную при периферическом рассеянии протона с зарядом e и массой m и нейтрона с магнитным моментом μ . Прицельное расстояние b .

9 СЕМИНАР : КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА !

10 СЕМИНАР: Рассеяние электромагнитных волн. Сила радиационного трения

Вычисление дифференциального и полного сечения рассеяния плоских электромагнитных волн на осцилляторе с учетом силы радиационного трения.

Давление света.

10.1*. Линейно поляризованная плоская монохроматическая электромагнитная волна частоты ω падает на изотропный гармонический осциллятор с собственной частотой ω_0 . Найти дифференциальное и полное сечение рассеяния в зависимости от частоты с учетом силы радиационного трения.

10.2*. Изотропный гармонический осциллятор с зарядом e , массой m и собственной частотой ω_0 помещен в однородное магнитное поле \vec{H} . Определить движение осциллятора. Исследовать частоты и поляризацию излучения в зависимости от направления. Магнитное поле считать слабым, $eH/(mc) \ll \omega_0$.

10.3*. Учитывая силу радиационного трения, найти силу давления света на свободный нерелятивистский электрон.

10.4*. Исследовать рассеяние света частоты ω на двух независимых осцилляторах с собственной частотой ω_0 в зависимости от расстояния R между осцилляторами. Вектор \vec{E} падающей волны направлен вдоль линии, соединяющей осцилляторы. Амплитуда колебаний осциллятора мала по сравнению с длиной волны. Найти дифференциальное сечение рассеяния.

10.5. Найти момент количества движения, который уносится за единицу времени излучением от точечного заряда e , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R .

11 СЕМИНАР: Преобразования Лоренца

Задачи на применение преобразований Лоренца. Доплеровское смещение частоты электромагнитной волны. Определение законов отражения от движущегося зеркала.

11.1. Получить формулы для преобразования радиуса-вектора \vec{r} и времени t при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, имеющую относительно первой произвольно направленную скорость \vec{V} .

11.2. Используя инвариантность фазы и преобразования Лоренца, найти закон преобразования частоты и волнового вектора.

11.3. На базе релятивистской теории дать объяснение явлению астрономической аберрации.

11.4. На базе релятивистской теории дать объяснение результатам опытов Физо.

11.5. Покоящийся атом испускает фотон частоты ω . В каких пределах изменяется частота излучения этого атома, если он движется со скоростью V ?

11.5а. Поскольку Земля движется вокруг Солнца, частоты излучения всех внеземных источников испытывают периодические изменения. Оценить масштабы этих изменений $\delta\omega/\omega$, а также вклад в эти изменения собственного суточного вращения Земли.

11.6. Найти зависимость между углом падения и углом отражения, а также закон преобразования частоты при отражении света от зеркала, движущегося с постоянной скоростью V .

11.7. Найти закон преобразования длины волны при переходе в систему отсчета, движущуюся под углом θ к направлению волнового вектора.

11.8. Найти потенциалы φ, \vec{A} и напряженности полей \vec{E}, \vec{H} точечного заряда q , движущегося равномерно со скоростью \vec{V} .

11.9. Найти потенциалы точечного диполя \vec{d} , движущегося поступательно с постоянной скоростью \vec{V} .

12 СЕМИНАР: Основы тензорной алгебры

Основные операции тензорной алгебры. Поднятие и опускание тензорных индексов в пространстве-времени Минковского. Преобразование компонент метрического тензора к новым координатам.

Краткое введение.

Изучение уравнений электродинамики показало, что пространство и время представляют собой единое целое – четырехмерное пространство-время. В этом 4-мерном пространстве мы можем ввести четыре взаимно ортогональные оси: $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Тогда радиус-вектор некоторой точки этого пространства будет иметь четыре компоненты и его можно записать в виде: $x^i \equiv \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \equiv \{ct, \vec{r}\}$. При такой записи обычно считают, что любой индекс, обозначенный латинской буквой (i, j, k и т.д.) может принимать четыре значения: $i = 0, 1, 2, 3$. Совершенно аналогично и любой другой 4-х вектор A^i можно спроектировать на координатные оси и определить его проекции $A^i = \{A^0, A^1, A^2, A^3\}$. По аналогии с 4-х вектором x^i компоненту A^0 называют временной компонентой, а компоненты A^1, A^2, A^3 – пространственными компонентами. В декартовых координатах компонентам A^1, A^2, A^3 соответствуют компоненты A_x, A_y, A_z .

Следующим по сложности (после 4-вектора) объектом является тензор второго ранга, имеющий два индекса: T^{ik} . Так как индексы i и k у этого тензора могут независимо друг от друга принимать значения $0, 1, 2, 3$, то данный тензор можно представить в виде матрицы, строки которой нумеруются индексом i (первый индекс), а столбцы – индексом k (второй индекс). При этом следует учесть, что в отличие от обычной матрицы здесь нумерация начинается не с единицы, а с нуля: сначала идет нулевая строка, за ней первая и т.д.

Одним из наиболее важных тензоров второго ранга является контравариантный метрический тензор g^{ik} . Предполагается, что определитель матрицы g^{ik} всегда отличен от нуля, и поэтому по данной матрице мы всегда можем

построить ей обратную. Тензор g_{ik} соответствует матрице, обратной к g^{ik} ; его называют метрическим тензором с ковариантными индексами (или, просто, ковариантным метрическим тензором).

В декартовых координатах инерциальной системы отсчета псевдоевклидова пространства-времени (пространства специальной теории относительности или пространства Минковского) матрицы, соответствующие тензорам g_{ik} и g^{ik} , совпадают:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{ik}.$$

Так как матрицы g^{ik} и g_{ik} взаимно обратны, то выполняется соотношение

$$\sum_{m=0}^3 g_{im} \cdot g^{mk} = \delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

В тензорном анализе обычно принимают правило суммирования Эйнштейна: по индексам, обозначенным одной и той же буквой и стоящим один вверху (контравариантный индекс), а другой внизу (ковариантный индекс) предполагается суммирование по всей совокупности принимаемых данными индексами значений. В силу этого правила, записывая выражение $g_{im} \cdot A^{mk}$, мы подразумеваем, что по индексу m происходит суммирование от 0 до 3:

$$g_{im} \cdot A^{mk} \equiv \sum_{m=0}^3 g_{im} \cdot A^{mk}.$$

Это правило позволяет в ряде случаев значительно упрощать запись сложных тензорных выражений.

Используя метрический тензор, мы можем поднимать и опускать индексы и у других тензоров, и, тем самым, находить связь между контра- и ковариантными компонентами одного и того же тензора. По определению имеем:

$$A_i = g_{im} A^m, \quad T_{i \cdot}^{\cdot k} = g_{im} T^{mk}, \quad T_{ik} = g_{im} g_{kn} T^{mn}, \\ A^i = g^{im} A_m, \quad T_{\cdot k}^{i \cdot} = g^{im} T_{mk}, \quad T^{ik} = g^{im} g^{kn} T_{mn}.$$

С помощью метрического тензора можно получить обобщение понятия расстояния между двумя точками на случай 4-х мерного пространства-времени.

Соответствующее "расстояние" в этом случае называется интервалом ds ; по определению квадрат интервала равен: $ds^2 \doteq g_{ik}dx^i dx^k$.

В декартовых координатах инерциальной системы отсчета псевдоевклидова пространства-времени квадрат интервала имеет вид: $ds^2 = c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2$, отсюда уже видно, что в 4-мерном пространстве-времени "квадрат" интервала ds^2 не является знакоопределенным: в зависимости от величин dt и $d\vec{r}$ он может быть меньше, равен или больше нуля.

При выполнении преобразования координат 4-мерного пространства-времени $x'^i = x'^i(x^m)$ (переход от нештрихованных координат x^m к штрихованным координатам x'^i) ковариантные четырехвекторы и тензоры 2-го ранга преобразуются по закону:

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad A'_i = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \cdot A_m, \quad T'_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \cdot T_{mn}.$$

Для контравариантных компонент имеем:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k, \quad A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k, \quad T'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \cdot T^{mn}.$$

Смешанные компоненты тензора T^m_n преобразуются по закону:

$$T'^i_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} T^m_n.$$

12.1*. На плоскости введена декартова косоугольная система координат, угол между осями которой равен ω . Записать метрический тензор и формулы для опускания и поднятия индексов (т.е. для перехода от контравариантных компонент к ковариантным и обратно).

12.2*. Записать компоненты ко- и контравариантного метрического тензора в сферических координатах.

12.3. Дан антисимметричный тензор электромагнитного поля $F_{ik} = -F_{ki}$, ковариантные компоненты которого в декартовых координатах инерциальной системы отсчета можно представить в виде

$$F_{ik} \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

где E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z – декартовы проекции векторов напряженностей электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей. Найти тензор F^{ik} .

13 СЕМИНАР: Тензор электромагнитного поля и его инварианты

Задачи на нахождение полевых конфигураций в различных инерциальных системах отсчета.
Инварианты тензора электромагнитного поля.

13.1*. Учитывая преобразования Лоренца и используя закон преобразования тензора второго ранга, найти формулы преобразования компонент \vec{E} и \vec{H} при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой вдоль оси x со скоростью V .

13.2*. Обобщить закон преобразования векторов \vec{E} и \vec{H} при преобразовании Лоренца на случай произвольного направления вектора относительной скорости \vec{V} .

13.3. В лабораторной системе отсчета угол между напряженностями полей \vec{E} и \vec{H} равен φ . Найти систему отсчета, в которой они параллельны. Всегда ли задача имеет решение? Единственно ли оно?

13.4. Электрон обладает спиновым моментом количества движения s , ($s = \hbar/2$) и связанным с ним магнитным моментом $\mu = es/(mc)$. Оценить энергию взаимодействия магнитного момента электрона в атоме водорода с кулоновским полем ядра.

13.5. Используя результаты задачи 12.3, найти выражения для $F^{ik}F_{ki}$ и сравнить их с выражением для $F'^{ik}F'_{ki}$; выразить результат через напряженности полей.

13.6*. То же для $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$. Учтеь, что в инерциальных системах отсчета абсолютно антисимметричный аксиальный тензор Леви-Чивиты имеет вид:

$$e^{iklm} = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы два индекса одинаковы;} \\ \pm 1, & \text{если все индексы разные;} \end{cases}$$

причем $e^{0123} = +1$, а остальные компоненты тензора получаются путем перестановки индексов.

13.7*. Найти закон преобразования амплитуд векторов \vec{E} и \vec{H} электромагнитной волны при преобразованиях Лоренца.

14 СЕМИНАР: Законы сохранения

Задачи релятивистской кинематики с участием массивных и безмассовых частиц.
Инварианты четырех-векторов скорости и импульса частиц.

14.1. При какой энергии частицы, имеющей массу покоя m , время ее распада в N раз больше, чем в собственной системе отсчета?

14.2. Частица с массой m_1 и скоростью v_1 поглощается частицей массы m_2 , первоначально покоившейся. Найти массу M и скорость V образовавшейся частицы.

14.3. Покоящееся возбужденное ядро с энергией возбуждения $\mathcal{E} = h\bar{\omega}_0$ испускает гамма-квант. Найти частоту гамма-кванта с учетом отдачи ядра. Масса покоя невозбужденного ядра M , $Mc^2 \gg h\bar{\omega}_0$.

14.4. Квант света с частотой ω_0 рассеивается на покоящемся свободном электроне. Найти зависимость частоты ω рассеянного фотона от угла рассеяния θ .

14.5*. То же для случая, когда электрон ультрарелятивистский, его импульс $|\vec{P}| \gg mc$ и составляет угол θ_0 с направлением движения первичного γ -кванта.

14.6. Частица с массой m_1 налетает на покоящуюся частицу с массой m_2 . Происходит реакция, в которой рождаются частицы с общей массой $M > m_1 + m_2$. Найти энергетический порог реакции T , т.е. минимальное значение кинетической энергии налетающей частицы, начиная с которого реакция становится энергетически возможной.

14.7. Найти пороговую энергию фоторождения π^0 -мезона на нуклоне в реакции: $n + \gamma \rightarrow n + \pi^0$. Массы покоя нуклона M и π^0 -мезона m известны.

14.8. Частица из ускорителя, имевшая массу покоя m и полную энергию \mathcal{E}_1 , движется к покоящейся частице-мишени той же массы. Найти суммарную кинетическую энергию T двух частиц в системе центра инерции.

14.9. Опираясь на законы сохранения энергии и импульса, показать, что невозможны ни испускание, ни поглощение фотона свободным электроном.

14.9а. Опираясь на законы сохранения энергии и импульса, показать, что невозможны ни превращение свободно движущегося π^0 -мезона в один гамма-квант, ни обратная реакция.

14.10. π^0 -мезон с массой покоя m , двигавшийся со скоростью v , распадается на два гамма-кванта. Найти энергетический спектр гамма-квантов в лабораторной системе координат.

14.11. Найти инвариантную массу системы, состоящей из двух фотонов одинаковой частоты ω , если угол между их волновыми векторами равен θ .

14.12*. Определить возможные пределы энергии антинейтрино, образующегося при бета-распаде нейтрона, $n \rightarrow p^+ + e^- + \tilde{\nu}_e$.

15 СЕМИНАР : КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА !

16 СЕМИНАР: Движение заряженных частиц во внешних полях

Задачи на определение законов движения релятивистских заряженных частиц во внешних электромагнитных полях. Интегралы движения.

16.1. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в однородном электрическом поле \vec{E} . При $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела импульс $\vec{p}_0 \perp \vec{E}$. Найти закон движения частицы – явную зависимость $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$.

16.2. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в однородном магнитном поле \vec{H} . При $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела начальную скорость \vec{v}_0 . Найти закон движения частицы. Указать все интегралы движения в данном случае.

16.3. Записать уравнения движения релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, используя функцию Лагранжа этой частицы $L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e\varphi(\vec{r}, t) + e(\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t))/c$.

16.4. Заряженная частица (заряд e , масса m) движется в поле силового центра – точечного заряда q . Выписать все интегралы движения.

17 СЕМИНАР: Излучение быстро движущихся зарядов

Вычисление интенсивности излучения при движении по окружности. Оценка углов в диаграмме направленности.

17.1. Найти полную интенсивность излучения релятивистской заряженной частицы, переходя из сопутствующей системы координат в лабораторную. Выразить интенсивность излучения: а) через скорость и ускорение; б) через внешние поля.

17.2. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется по круговой орбите постоянного радиуса R . Найти зависимость мощности излучения от энергии частицы.

17.3*. Релятивистская заряженная частица движется по окружности. В сопутствующей системе угловое распределение излучения вперед и назад одинаково. Переходя в лабораторную систему отсчета и используя формулу для аберрации света, объяснить мгновенное угловое распределение излучения. В частности, оценить створ углов, в который будет излучаться половина энергии; каким углом в лабораторной системе соответствуют передняя и задняя полусферы сопутствующей системы ?

17.4*. Ультрарелятивистский электрон вращается по круговой орбите радиуса R с угловой частотой ω_0 . Оценить спектр излучаемых частот, учитывая, что из-за "прожекторной" диаграммы направленности излучение носит импульсный характер, а $\delta\omega \cdot \delta t \sim 1$.

18 СЕМИНАР: Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Задачи на вычисление тензора энергии-импульса и тензора момента импульса
электромагнитного поля.

18.1*. Показать, что для поля плоской, монохроматической электромагнитной волны с частотой Ω тензор энергии-импульса может быть записан в виде:

$$T^{mn} = \frac{w c^2}{\Omega^2} k^m k^n,$$

где $k^m = \{k^0 = \Omega/c, \vec{k}\}$ – волновой четырех-вектор, а w – плотность энергии электромагнитного поля волны.

18.2*. Плоская электромагнитная волна с плотностью энергии поля w , падает под углом θ на пластину с коэффициентом отражения R . Найти силу, действующую на пластину со стороны поля волны.

ЗАЧЕТ С ОЦЕНКОЙ !

Часть 2. "Электродинамика сплошных сред"

1. Уравнения макроскопической электродинамики Максвелла-Лоренца.
2. Закон сохранения энергии в электродинамике сплошных сред.
3. Граничные условия для полей в кусочно-однородной среде.
4. Краевые задачи электростатики проводников и диэлектриков.
5. Магнитное поле стационарных токов. Энергия магнитостатической системы. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции.
6. Квазистационарное приближение. Условия применимости.
7. Переменные электромагнитные поля в проводящих средах. Скин-эффект.
8. Основные уравнения магнитной гидродинамики.
9. "Вмораживание" магнитного поля в движущийся идеальный проводник.
10. Материальные уравнения для движущихся проводников и диэлектриков.
11. Диэлектрическая проницаемость разреженного нейтрального газа.
12. Комплексная диэлектрическая проницаемость и ее аналитические свойства. Формулы Крамерса-Кронга.
13. Плоские электромагнитные волны в проводящей диспергирующей среде.
14. Фазовая и групповая скорости электромагнитной волны.

19 СЕМИНАР: Электростатика проводников. Метод изображений

Применение специальных методов решения задач электростатики. Метод изображений. Вычисление плотности зарядов индуцированных на поверхности проводника, находящегося во внешнем электростатическом поле.

19.1. Точечный заряд q расположен на расстоянии a от поверхности бесконечно протяженной заземленной проводящей пластины толщины h . Найти скалярный потенциал φ . Решение искать методом изображений. Проверить, что решение удовлетворяет уравнению и граничным условиям. Вычислить плотность поверхностных зарядов σ_S , энергию и силу взаимодействия заряда с пластиной. Найти полный индуцированный заряд.

19.2. Точечный заряд q расположен внутри прямого угла, образованного двумя бесконечными полуплоскостями, разграничивающими проводник и вакуум (в первом квадранте). Найти потенциал и плотность поверхностных зарядов.

19.2а. Проанализировать возможность решения, если заряд находится вне прямого угла.

19.3. Точечный диполь \vec{p} расположен в вакууме на расстоянии a от бесконечной плоской границы заземленного проводника. Найти потенциал, и момент силы, действующей на диполь.

19.4. Точечный заряд q находится на расстоянии a от центра заземленного проводящего шара радиуса R . Найти потенциал, плотность поверхностных зарядов и полный заряд, индуцированный на шаре, энергию и силу взаимодействия.

19.5. Точечный заряд q расположен на расстоянии a от центра изолированного проводящего шара радиуса R , на который нанесен заряд e . Найти потенциал, плотность поверхностных зарядов, энергию и силу взаимодействия.

19.6. Равномерно заряженная тонкая нить (линейная плотность заряда κ) расположена на расстоянии a от оси проводящего незаряженного цилиндра радиуса R , $a > R$ параллельно этой оси. Найти потенциал результирующего электрического поля. Найти плотность поверхностных зарядов на цилиндре, а также энергию и силу взаимодействия нити с цилиндром, приходящиеся на единицу длины. Воспользуйтесь выражением для интеграла:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - \lambda \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \quad \text{где постоянный коэффициент } \lambda \geq 0.$$

20 СЕМИНАР: Потенциалы и емкости

Вычисление емкости для систем, состоящих из проводников с различной геометрией, при различном взаимном расположении проводников.

20.1. Найти зависимость емкости системы двух проводящих шаров с радиусами R_1 и R_2 от расстояния L между ними, $L \gg R_1 \sim R_2$.

20.1а. Найти потенциал системы, состоящей из двух проводящих шаров, имеющих одинаковые радиусы R . Расстояние между центрами шаров равно L , причем $L \gg R$. Первый шар незаряжен, а заряд второго равен q . Вычисления провести с точностью до $(R/L)^3$.

20.2*. Определить емкость единицы длины двух параллельных бесконечных цилиндрических проводников. Радиусы проводников равны R_1 и R_2 , расстояние между осями $L > R_1 + R_2$.

20.3. Доказать теорему взаимности.

20.3а. Точечный заряд q расположен между бесконечными параллельными заземленными проводящими плоскостями. Расстояния от заряда до плоскостей равны a и b , соответственно. Используя теорему взаимности, найти заряды, индуцированные на каждой из плоскостей.

21 СЕМИНАР: Краевые задачи электростатики

Применение общих методов решения краевых задач электростатики проводников. Вычисление зарядов, индуцированных на поверхности проводника, и сил, действующих на проводник, находящийся во внешнем электростатическом поле.

21.1. Незаряженный проводящий шар радиуса R вносится в электрическое поле, которое в отсутствии шара было однородным и равным \vec{E}_0 . Определить результирующее поле \vec{E} и плотность поверхностных зарядов на шаре.

21.2. Незаряженный проводящий цилиндр радиуса R помещен во внешнее однородное электрическое поле \vec{E}_0 , перпендикулярное оси цилиндра. Найти потенциал результирующего поля.

21.3. Проводящий шар радиуса R разрезан на два полушария, соединенные между собой, и помещен во внешнее однородное поле \vec{E}_0 , направленное перпендикулярно плоскости разреза. Найти силу, действующую на каждое из полушарий.

21.3а. То же, но поле \vec{E}_0 направлено параллельно плоскости разреза.

21.4*. Проводящий шар радиуса R_0 имеет заряд q . Найти плотность поверхностного заряда σ_S и потенциал, если шар испытал малую квадрупольную деформацию: $R(\theta) = R_0(1 + \lambda P_2(\cos \theta))$ с точностью до линейных по λ членов.

22 СЕМИНАР: Электростатика диэлектриков

Задачи электростатики диэлектриков. Вычисление потенциала заряженного диэлектрика, находящегося во внешнем электростатическом поле.

22.1. Заряд q расположен на расстоянии a от плоской границы раздела двух полупространств, заполненных веществом с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 , соответственно. Найти потенциал в каждой области и силу, действующую на заряд.

22.2. Шар радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ помещен в однородное внешнее электрическое поле \vec{E}_0 . Найти потенциал.

22.3. Найти силу и потенциальную энергию взаимодействия незаряженного диэлектрического шара радиуса R и удаленного от его центра на расстояние a точечного заряда q ($a \gg R$).

22.4. В бесконечном диэлектрике с проницаемостью ϵ имеется шаровая полость радиуса R , в центре которой помещен точечный диполь \vec{p} . Найти потенциал φ .

22.5. В шаре радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ свободные заряды распределены в объеме по закону: $\rho = \rho_0 r \cos \theta$. Найти потенциал.

23 СЕМИНАР: Силы действующие на диэлектрик во внешнем электрическом поле

Вычисление сил действующих на твердые жидкие и газообразные диэлектрики во внешнем поле. Электрострикционный эффект.

23.1*. Диэлектрический цилиндр радиуса R с проницаемостью ϵ разрезан вдоль его оси на две половины. Цилиндр находится во внешнем однородном поле \vec{E}_0 , перпендикулярном плоскости разреза. Определить силу, действующую на единицу длины половинки цилиндра.

23.2*. Диэлектрический цилиндр длины L и радиуса R , ($R \ll L$), с проницаемостью ϵ помещен во внешнее поле \vec{E}_0 , направленное под углом θ к его оси. Найти момент силы, действующей на цилиндр.

23.3. Вычислить силу действующую на единицу объема разреженного, нейтрального газа с диэлектрической проницаемостью ϵ , помещенного во внешнее, неоднородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}_0(\vec{r})$.

23.4. Найти высоту поднятия жидкости с плотностью массы τ и диэлектрической проницаемостью ϵ между пластинами плоского конденсатора, опущенными в жидкость, если между ними поддерживается постоянная разность потенциалов V , а расстояние между пластинами равно d .

24 СЕМИНАР: Стационарные токи в проводниках

Токи в кусочно-однородной проводящей среде. Преломление линий тока. Магнитное поле стационарных токов.

24.1. Найти закон преломления линий тока на границе раздела двух сред. Найти плотность поверхностных зарядов.

24.2. Найти плотность объемных зарядов в неоднородном проводнике со стационарным током.

24.3. В плохо проводящую среду (например, электролит) опущены хорошо проводящие стержни. Известны потенциал каждого стержня и полный стекающий с него ток. Найти джоулево тепло, выделяющееся за единицу времени.

24.4. Найти сопротивление заземления между шарами с радиусами a и b , расположенными на большом расстоянии L , ($L \gg a \sim b$) и помещенными в плохо проводящую среду с проводимостью σ .

24.5. В неограниченной среде с проводимостью σ_0 имеется включение в виде шара радиуса R с проводимостью σ . На большом удалении от шара плотность тока в среде однородна и равна j_0 . При каком соотношении между проводимостями σ и σ_0 тепловая мощность выделяющаяся в шаре будет наибольшей?

24.6. Найти векторный потенциал и магнитное поле бесконечно длинного прямого провода с током J , равномерно распределенным по сечению проводника (цилиндр радиуса R). Найти также скалярный потенциал магнитного поля вне проводника.

25 СЕМИНАР : КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА !

26 СЕМИНАР: Индуктивность и взаимная индукция. Сила и энергия взаимодействия токов

Задачи на вычисление коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции для систем, состоящих из линейных проводников с током. Индуктивность тороидального соленоида.

26.1. Вычислить коэффициент самоиндукции единицы длины коаксиального кабеля.

26.2. Вычислить индуктивность тороидального соленоида прямоугольного сечения; кругового сечения при $a \ll R$.

26.3. Оценить давление на поверхность и силу (на единицу угла), действующую на обмотку тороидального соленоида с квадратным сечением, если по нему течет ток J , а полное число витков N .

26.4. Вычислить энергию взаимодействия прямого провода с током J_1 , параллельного оси x , и квадратной рамки с током J_2 . Провод параллелен двум сторонам рамки, но лежит вне плоскости рамки. Длина стороны рамки $2a$, ее центр масс имеет координаты $\{0, y_0, z_0\}$. Найти взаимную индукцию L_{12} , силу и момент силы.

26.5. Найти взаимную индукцию тонких коаксиальных колец с радиусами a и b , лежащих в параллельных плоскостях. Расстояние между плоскостями h . Рассмотреть случай $h \gg a \sim b \gg r$, где r – толщина провода.

27 СЕМИНАР: Скин-эффект

Слабый и сильный скин-эффект. Вычисление момента силы действующего на проводник в переменном электромагнитном поле.

27.1. Проводящий шар (радиуса R , с проводимостью σ) помещен во внешнее однородное магнитное поле $\vec{H}_0 \cos(\omega t)$. Найти магнитный момент шара \vec{m} и интенсивность излучения I , если $\delta \ll R \ll c/\omega$, где δ – толщина скин-слоя.

27.2*. В задаче 27.1 найти тепло, выделяющееся за единицу времени.

27.3. Решить задачу 27.1 для случая $R \ll \delta \ll c/\omega$. Найти тепло, выделяющееся за единицу времени.

27.3а. Проводящий шар (радиуса R , с проводимостью σ) помещен во внешнее однородное магнитное поле, постоянное по модулю и вращающееся с частотой ω , $\vec{\omega} \perp \vec{H}$. Найти момент сил, действующих на шар в приближении слабого скин-эффекта $R \ll \delta \ll c/\omega$.

27.4. Сравнить сопротивление единицы длины цилиндрического провода радиуса a в случаях слабого и сильного скин-эффекта.

28 СЕМИНАР: Квазистационарные явления

Применение метода изображений для токов в квазистационарном приближении.

28.1. Тонкий провод с током $J_0 \cos(\omega t)$ расположен параллельно плоской поверхности идеального проводника на расстоянии a от нее. Найти поле и распределение токов на поверхности проводника для сильного скин-эффекта.

28.2. Неограниченная пластина из вещества с проводимостью σ , диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ находится в вакууме и занимает пространство между плоскостями $y = \pm d$. Пластина помещена в однородное магнитное поле индукция которого вне пластины изменяется по гармоническому закону $\vec{B}_0 = B_0 \exp(-i\omega t) \vec{e}_z$. Найдите индукцию магнитного поля внутри пластины, предполагая, что выполнены условия квазистационарного приближения. Рассмотрите предельные случаи слабого $d \ll \delta$ и сильного скин-эффекта $\delta \ll d$.

28.3*. На большом расстоянии a от плоской поверхности идеального проводника расположен круговой контур радиуса r , по которому протекает

переменный ток $J_0 \cos(\omega t)$. Найти распределение токов на поверхности проводника.

29 СЕМИНАР: Электродинамика движущихся сред

Задачи электродинамики проводников и диэлектриков движущихся во внешнем поле.

Униполярная индукция.

29.1. Диэлектрический шар (радиус R , $\mu = 1$, $\epsilon \neq 1$) движется в однородном постоянном электрическом поле \vec{E}_0 со скоростью \vec{v} , $v \ll c$. Оценить создаваемое им магнитное поле.

29.2. Незаряженный проводящий цилиндр радиуса R , высоты h вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω в однородном постоянном магнитном поле $\vec{B} \perp \vec{\omega}$. Оценить момент сил (при $h \gg R$, $\delta \gg R$), необходимый для поддержания равномерного вращения.

29.3. Нейтральный проводящий цилиндр радиуса R вращается с угловой скоростью ω в постоянном магнитном поле $\vec{B} \parallel \vec{\omega}$. Определить разность потенциалов между точкой на оси цилиндра и точкой на его боковой поверхности. Найти распределение зарядов в цилиндре.

30 СЕМИНАР: Комплексная диэлектрическая проницаемость

Задачи на применение дисперсионных соотношений Крамерса-Кронига.

30.1. Пользуясь соотношениями Крамерса-Кронига, найти действительную часть $\epsilon'(\omega)$ диэлектрической проницаемости по ее мнимой части

$$\epsilon''(\omega) = (\epsilon_0 - 1) \cdot \frac{\omega\nu}{\omega^2 + \nu^2},$$

где ϵ_0 и ν – постоянные параметры.

30.2. Пользуясь соотношениями Крамерса-Кронига, найти мнимую часть комплексной диэлектрической проницаемости ϵ'' по ее действительной части

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{\alpha}{[\omega^2 + \omega_0^2][\omega^2 + \omega_1^2]},$$

где α , ω_0 и ω_1 – постоянные параметры.

30.3. В простейшей модели, описывающей среду с резонансными свойствами, мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости на положительной частотной полуоси задается выражением:

$$\epsilon''(\omega) = \lambda[H(\omega - \omega_1) - H(\omega - \omega_2)],$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, а $0 < \omega_1 < \omega_2$ и λ – постоянные параметры. Используя формулы Крамерса-Кронига найдите выражение для вещественной части комплексной диэлектрической проницаемости. Сравните результат с аналогичным выражением в осцилляторной модели.

31 СЕМИНАР: Диэлектрическая проницаемость в моделях сплошных сред

Диэлектрическая проницаемости в материальной среде состоящей из твердых диполей.

Вычисление диэлектрической проницаемости газа во внешнем магнитном поле.

31.1. Связь между $\vec{D}(\vec{r}, t)$ и $\vec{E}(\vec{r}, t)$ в материальной среде, состоящей из твердых диполей, может быть записана в виде

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{4\pi\kappa}{\tau} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \vec{E}(\vec{r}, t') dt',$$

где κ и τ – константы. Найти $\epsilon(\omega)$ для такой среды.

31.2. Получить выражение для тензора диэлектрической проницаемости разреженного газа из нейтральных одноэлектронных атомов, помещенного во внешнее однородное постоянное магнитное поле \vec{H}_0 . Воспользоваться осцилляторной моделью.

32 СЕМИНАР : КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА !

33 СЕМИНАР: Электромагнитные волны в веществе

Задачи на распространение электромагнитных волн в изотропных и анизотропных средах.

Основы оптики кристаллов.

33.1*. Пользуясь осцилляторной моделью, выяснить, при каких условиях в полностью ионизированном разреженном газе возможно распространение продольных электромагнитных колебаний. Принять $\mu = 1$, диссипациями пренебречь.

33.2. Получить закон дисперсии $\omega(k)$ и групповую скорость для поперечной ($\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k}$) и продольной ($\vec{E} \parallel \vec{k}$) волн в плазме с материальным уравнением $\vec{D} = \epsilon \vec{E} + a^2 \text{grad}(\text{div} \vec{E})$, учитывающим тепловое движение частиц. Принять $\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, $a = v_T/\omega$, где v_T – средняя тепловая скорость электронов.

33.3. Плоская монохроматическая волна распространяется вдоль оси z в веществе, для которого тензор комплексной диэлектрической проницаемости имеет вид:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_3 & 0 \\ -i\varepsilon_3 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}^*.$$

Найти фазовую скорость этой волны.

33.4. То же для волны, распространяющейся перпендикулярно к оси z .

34 СЕМИНАР: Отражение электромагнитных волн

Задачи на отражение света на границе в кусочно-однородных средах. Спектральный состав света, отраженного от неподвижной и движущейся границы диэлектрика, обладающего дисперсионными свойствами.

34.1. Белый свет отражается от поверхности вещества, для которого в рассматриваемой области частот

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad \epsilon''(\omega) = 0,$$

где $f \ll \omega_0^4$. Найти спектральный состав отраженного света для случаев нормального и наклонного падения.

34.2*. Плоская волна частоты ω_0 падает из вакуума по нормали на границу диэлектрика, движущегося с постоянной скоростью V перпендикулярно границе. Найти коэффициент отражения и частоту отраженной волны.

35 СЕМИНАР: Волноводы

Распространение электромагнитных волн в волноводах. ТЕ и ТМ-моды.

35.1*. Получить уравнения и граничные условия для ТЕ-волны в волноводе с произвольной формой сечения.

35.2*. То же для ТМ-волны.

ЭКЗАМЕН !

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Батыгин В.П., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. М. Наука, 1962.
2. Денисов В.И. Лекции по электродинамике. М., УНЦ ДО, 2007.
3. Денисов В.И. Введение в электродинамику материальных сред. М., МГУ, 1989.
4. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М., Мир, 1965.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., Наука, 1988.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.
7. Пановский В., Филлипс М. Классическая электродинамика. М., Физматгиз, 1963.
8. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.-Л., 1966.

Список вопросов и задач к экзамену доступен на сайте кафедры квантовой теории и физики высоких энергий по адресу: her.phys.msu.ru