

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ

И.о. декана физического факультета МГУ,
профессор, д.ф.-м.н.



/ В.В. Белокуров /

«21» марта 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Differential equations and mathematical physics

Программа (программы) подготовки
научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре
Дифференциальные уравнения и математическая физика
(103-01-00112-фмн)

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом по МГУ от 24 ноября 2021 года № 1216 «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова».

1. Краткая аннотация:

Название дисциплины: Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Цель изучения дисциплины – расширение и углубление знаний о современном состоянии и тенденциях развития в области математического моделирования и численных методов.

2. Уровень высшего образования - подготовка кадров высшей квалификации.

3. Научная специальность: 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика; область науки: естественные науки.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры: дисциплины (модули), направленные на подготовку к кандидатским экзаменам - Дисциплина, совпадающая с наименованием научной специальности.

5. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов, из которых 54 часа составляет контактная работа аспиранта с преподавателем (33 часа занятия лекционного типа, 21 час мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 54 часа составляет самостоятельная работа учащегося.

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия

Необходимы знания высшей математики и общей физики в объеме курсов, преподаваемых на физических специальностях классических университетов, полученных на предыдущих уровнях высшего образования.

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них						Самостоятельная работа обучающегося, часы из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	Всего
Тема 1. Основы функционального анализа (Метрические пространства (изометрия, сходимост, полнота, сепарабельность, процедуры пополнения, понятие о пространствах l^p и L^p). Топологические пространства (база, топология, порождённая метрикой). Понятие компактности (компактность метрических и топологических пространств). Линейные, нормированные, банаховы, евклидовы и гильбертовы пространства (полные евклидовы пространства,	6	2	1				3	3		3

теорема Рисса-Фишера, изоморфизм гильбертовых пространств).										
Тема 2. Мера и интеграл (Теория меры (алгебра множеств, жорданов объём, мера Лебега, общее понятие меры, полная мера, измеримые функции, сходимость почти всюду, сходимость по мере, равномерная сходимость, теорема Егорова, понятие меры Винера). Интеграл Лебега. Понятие об интеграле Стильтьеса и его применениях в теории вероятностей. Теорема Радона-Никодима и мера Радона-Никодима.)	9	3	1	1			4	5		5
Тема 3. Функциональные пространства (Пространство L^p . Пространство $L^p(-\infty, \infty)$ и функции Эрмита. Понятие о пространствах W_l^p и теоремах вложения. Функционалы в нормированных пространствах, Теорема Хана-Банаха. Линейные операторы в нормированных пространствах. Понятие спектра оператора. Теоремы о спектре вполне непрерывного оператора в	9	3	1	1			4	5		5

гильбертовом пространстве. Теоремы Фредгольма. Понятие корректной и некорректной задачи. Понятие регуляризирующего алгоритма Тихонова. Выпуклые функционалы в гильбертовых пространствах.)										
Тема 4. Методы математической физики (Классификация дифференциальных уравнений, в частных производных второго порядка. Основные уравнения математической физики и постановка краевых задач. Метод разделения переменных. Специальные функции. Уравнения эллиптического типа. Уравнения параболического типа. Уравнение колебаний. Краевые задачи для уравнения $\Delta u + cu = -f$.)	6	2	1				3	3		3
Тема 5. Основы математического моделирования (Основные понятия и принципы математического моделирования. Некоторые классические задачи математической физики. Задача с данными на характеристиках.	8	3	1				4	4		4

Общая задача Коши. Функция Римана. Задача о промерзании (задача о фазовом переходе. Задача Стефана). Динамика сорбции газа. Внешние задачи для уравнения Гельмгольца. Условия излучения. Квадрупольный излучатель. Задачи математической теории дифракции. Математическое моделирование нелинейных объектов и процессов. Математические модели процессов нелинейной теплопроводности и горения. Автомодельные решения. Режимы с обострением. Математические модели теории нелинейных волн. Обобщенное решение. Уравнение Кортевега – де Фриза и законы сохранения. Солитонные решения.										
Тема 6. Методы исследования математических моделей . Вариационные методы решения краевых задач и определения собственных значений. Алгоритмы проекционного метода. Метод конечных разностей. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Разностная задача для уравнения теплопроводности на отрезке. Явные и неявные	10	3	1	1			5	5		5

схемы. Экономичные разностные схемы. Консервативные однородные разностные схемы. Интегро-интерполяционный метод. Метод конечных элементов. Спектральный анализ разностной задачи Коши. Асимптотические методы. Метод малого параметра. Регулярные и сингулярные возмущения. Метод ВКБ. Метод усреднения Крылова – Боголюбова. Фракталы и фрактальные структуры. Самоорганизация и образование структур. Синергетика. Диссипативные структуры. Модель брюсселятора. Вейвлет-анализ.)										
Тема 7. Численные методы приближения функций, дифференцирования и интегрирования (Приближение функций. Интерполирование быстропеременных функций. Интерполирование функций многих переменных. Среднеквадратичная аппроксимация рядами Фурье и регуляризация суммирования этих рядов. Численное дифференцирование. Дифференцирование	8	2	1	1			4	4		4

быстропеременных функций. Некорректность, дифференцирования и его регуляризация. Численное интегрирование. Экстраполяционное повышение точности сгущением сетки. Интегрирование быстропеременных функций. Выделение особенностей и вычисление несобственных интегралов. Кратные интегралы: метод Монте-Карло.)									
Тема 8. Численное решение систем уравнений, нахождение собственных значений, экстремальные задачи (Системы уравнений. Решение линейных систем и обращение матриц методом исключения. Линейные системы специального вида и их решение методом прогонки. Варианты метода прогонки: матричная прогонка, циклическая прогонка, потоковый вариант метода прогонки. Нелинейное уравнение. Метод последовательных приближений, метод линеаризации, метод секущих, метод парабол. Системы нелинейных уравнений. Нахождение собственных значений и векторов матриц. Подобное приведение матриц к	10	3	1	1			5	5	5

почти треугольной и трёхдиагональной форме. Метод обратных итераций; включение сдвига. Нахождение минимума. Минимум функции одного переменного. Минимум функции многих переменных; методы спуска и сопряжённых градиентов. Минимум в ограниченной области; задача линейного программирования; метод штрафных функций. Минимизация функционала.)										
Тема 9. Численное решение дифференциальных и интегральных уравнений (Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши. Метод Рунге-Кутта. Решение жёстких систем. Краевые задачи и задачи на собственные значения. Свойства разностных собственных функций. Метод дополненного вектора. Метод Галёркина. Уравнения в частных производных. Автомодельные решения. Основные понятия разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость. Основные методы построения	12	4	2	1			7	5		5

разностных схем. Условие сходимости. Исследование устойчивости. Классы устойчивости двухслойных схем. Уравнения переноса. Квазилинейное уравнение. Параболическое уравнение. Квазилинейное уравнение. Многомерное параболическое уравнение. Метод переменных направлений. Метод суммарной аппроксимации. Эллиптические уравнения. Прямые и итерационные методы решения. Метод быстрого преобразования Фурье. Гиперболические уравнения. Одномерное и многомерное уравнение акустики, явная схема и факторизованная неявная схема. Интегральные уравнения. Некорректные задачи и регуляризация по А.Н.Тихонову.)										
Тема 10. Теория вероятностей (Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Классическая теоретико- вероятностная модель. Аксиоматическое построение теории вероятностей. Условная вероятность. Независимость. Последовательность независимых испытаний. Распределение	9	3	1	1			5	4		4

Пуассона. Теорема Пуассона. Теоремы Муавра-Лапласа. Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин. Законы больших чисел. Характеристическая функция. Центральная предельная теорема. Конечные однородные цепи Маркова. Теорема Маркова. Теория случайных процессов. Марковские случайные процессы, процессы с независимыми приращениями, стационарные процессы.).									
Тема 11. Математическая статистика (Распределение ортогональных проекций и функций от них. Интервальные оценки параметров функции распределения. Теория точечного оценивания. Существование и единственность несмещённой оценки минимальной дисперсии. Необходимое и достаточное условие. Неравенство Крамера-Рао. Эффективность. Достаточность. Теорема Блекуэлла-Колмогорова. Оценки максимального правдоподобия. Рандомизация в задаче проверки статистических гипотез. Фундаментальная Лемма Неймана-Пирсона. Равномерно	9	3	1	1			5	4	4

наиболее мощные критерии. Принцип отношения правдоподобий. Критерий отношения правдоподобий в теории нормальной регрессии. Асимптотическое распределение отношения правдоподобий.).										
Тема 12. Элементы теории статистических решений (Основная задача выпуклого программирования. Условие регулярности. Теорема Куна-Таккера. Постановка задачи редукции сигналов как задачи выпуклого программирования. Связь с регуляризацией А.Н.Тихонова. Общая задача редукции.).	8	2	1				5	3		3
Промежуточная аттестация: допуск к кандидатскому экзамену										4
Итого	108	33	13	8			54			54

8. Образовательные технологии

Используемые формы и методы обучения: лекции и семинарские занятия, самостоятельная работа аспирантов.

В процессе преподавания дисциплины преподаватель использует как классические формы и методы обучения (лекции и семинарские занятия), так и активные методы обучения.

При проведении лекционных занятий преподаватель использует при необходимости аудиовизуальные, компьютерные и мультимедийные средства обучения, а также демонстрационные и наглядно-иллюстрационные (в том числе раздаточные) материалы.

9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю): аспирантам предоставляется программа курса, план занятий и задания для самостоятельной работы, презентации к лекционным занятиям.

10. Ресурсное обеспечение

Основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
2. Корпусов М.О., Панин А.А. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Том I Общая теория, в двух частях. Физический факультет МГУ Отдел оперативной печати Физического Факультета МГУ, 2016. ISBN 978-5-8279-0130-3, 427 с.
3. Корпусов М.О., Панин А.А. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Том 2. Функциональные пространства. Физический факультет МГУ Отдел оперативной печати Физического факультета МГУ, 2017, 288 с.
4. Корпусов М.О. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка: Курс лекций. Москва, URSS, 2024. ISBN 978-5-9710-8875-2, 224 с.
5. Корпусов М.О. Параболические уравнения второго порядка: Курс лекций. Москва, URSS, 2024, ISBN 978-5-9710-7648-3, 300 с.
6. Корпусов М.О. Эллиптические уравнения второго порядка: Курс лекций. Москва, URSS, 2024, ISBN 978-5-9710-7647-6, 314 с.
7. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. Москва, КУРС, 2017. ISBN 978-5-906923-36-3, 400 с.
8. Тихонов Н.А., Токмачев М.Г., Галанин М.П. Математические модели и методы их исследования. Москва, Ленанд, 2024, ISBN 978-5-9710-7866-1, 500 с.
9. Галанин М.П., Тихонов Н.А., Токмачев М.Г. Математическое моделирование: теория и применение. Москва, Ленанд, 2022, ISBN 978-5-9710-9750-1, 600 с.
10. Мухартова Ю.В., Токмачев М.Г. Методы математической физики. Материалы семинаров. Отдел оперативной печати физического факультета МГУ Москва, 2021, 332 с.
11. Боголюбов А.Н., Левашова Н.Т., Могилевский И.Е., Мухартова Ю.В., Шапкина Н.Е. Функция Грина оператора Лапласа Физический факультет МГУ, 2018, Москва, 188 с
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1999.
13. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М. Наука, 2004.
14. Владимиров В.С. Уравнений математической физики. М.: Наука, 1988.

15. Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., Волков В.Т., Левашова Н.Т., Полежаева Е.В. Введение в теорию сингулярных возмущений. опубликовано в Интернет [http://math.phys.msu.ru/Education/Special_courses / Asymptotic_methods_in_nonlinear_problems_of_mathematical_physics/show_page](http://math.phys.msu.ru/Education/Special_courses/Asymptotic_methods_in_nonlinear_problems_of_mathematical_physics/show_page), 2019, 100 с.
16. Калиткин Н.Н. Численные методы. В двух книгах. Книга первая. Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. Численный анализ. Книга вторая. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Методы математической физики. М.: Издательский центр «Академия» 2013.
17. Самарский А.А. Теория разностных схем М. Наука 1983.
18. Соболев И.М. Метод Монте-Карло М. Наука 1972.
19. Пытьев Ю.П. Шишмарёв И.А. Теория вероятностей, математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков. 2-е издание, исправленное и дополненное. Издательский дом МГУ, 2023.
20. Малугин, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для вузов. Москва : Издательство Юрайт, 2023.
21. Гнеденко В.Б. Курс теории вероятностей. Изд. 13 URSS, 2022.

Дополнительная литература:

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. -Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. -М.: Наука, 1974.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. -М.: Наука, 1984.
4. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию М. Наука 1977.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач М. Мир 1972.

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели:

Д.ф.-м.н., профессор Голубцов П.В., e-mail: golubtsov@physics.msu.ru, тел.: (495)939-1033.

Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

Образцы домашних заданий:

1. Линейные нормированные, банаховы, евклидовы и гильбертовы пространства. Определения и основные свойства.
2. Изложите метод разделения переменных для случая неоднородного уравнения и неоднородных граничных условий.
3. Метод Рунге-Кутты. Решение жестких систем.
4. Понятие корректно и некорректной задачи. Понятие регуляризирующего алгоритма Тихонова.
5. Эллиптические уравнения. Прямые и итерационные методы решения. Метод быстрого преобразования Фурье.
6. Уравнение переноса. Линейные уравнения: схема бегущего счета. Квазитинейное уравнение
7. Топологические пространства (база, топология, порожденная метрикой).
8. Интегральные уравнения. Некорректные задачи и регуляризация по А.Н.Тихонову.

9. Приближение функций. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита. Интерполирование быстропеременных функций.
10. Теория случайных процессов. Марковские случайные процессы, процессы с независимыми приращениями, стационарные процессы.

Вопросы для промежуточной аттестации – зачета:

1. Дайте определение топологического пространства. Как определяется дискретная и антидискретная топология?
2. Дайте определение компактности. Приведите примеры компактного и некомпактного пространств.
3. В чем состоит процедура пополнения?
4. Приведите пример функции, не интегрируемой по Лебегу.
5. Приведите пример некорректной задачи.
6. Опишите классификацию дифференциальных уравнений, в частных производных второго порядка.
7. Какие физические задачи, приводят к уравнениям гиперболического типа?
8. Перечислите основные свойства решений уравнения специальных функций.
9. Дайте определение сферических функций.
10. Как определяется функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона и каковы её свойства?
11. Дайте определения поверхностных потенциалов простого и двойного слоя.
12. Принцип максимума для уравнения параболического типа.
13. В чем состоит принцип предельного поглощения?
14. Что такое автомодельное решение? Приведите пример.
15. Как определяется обобщенное решение для нелинейных волн?
16. В чем состоят методы спуска и сопряжённых градиентов?
17. В чем состоит метод Рунге-Кутты?
18. Дайте определение случайной величины. Каковы основные числовые характеристики случайных величин?
19. Что такое стационарный случайный процесс?
20. Дайте определение достаточной статистики.

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения

Зачет проходит по билетам, включающем 3 вопроса. Уровень знаний аспиранта по каждому вопросу на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». В случае если на все вопросы был дан ответ, оцененный не ниже чем «удовлетворительно», аспирант получает общую оценку «зачтено».

Шкала оценивания знаний, умений и навыков

Результат освоения дисциплины	Критерии оценивания знаний, умений и навыков			
	2/ не зачтено	3/ зачтено	4/ зачтено	5/ зачтено
Знания	Отсутствие знаний основных методов теории дифференциальных уравнений и математической	В целом успешные, но не систематические знания основных методов теории дифференциальных уравнений и	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы знания основных методов теории дифференциальных	Успешные и систематические знания основных методов теории дифференциальных уравнений и

Результат освоения дисциплины	Критерии оценивания знаний, умений и навыков			
	2/ не зачтено	3/ зачтено	4/ зачтено	5/ зачтено
	физики	математической физики	уравнений и математической физики	математической физики
Умения	Отсутствие умения применять знания основных методов теории дифференциальных уравнений и математической физики	В целом успешное, но не систематическое применять знания основных методов теории дифференциальных уравнений и математической физики	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение применять знания основных методов теории дифференциальных уравнений и математической физики	Успешное и систематическое умение применять знания основных методов теории дифференциальных уравнений и математической физики
Навыки	Отсутствие/фрагментарное владение навыками решения научных задач в области дифференциальных уравнений и математической физики	В целом успешное, но не систематическое владение навыками решения научных задач в области дифференциальных уравнений и математической физики	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками решения научных задач в области дифференциальных уравнений и математической физики	Успешное и систематическое владение навыками решения научных задач в области дифференциальных уравнений и математической физики