Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Физический факультет

ДВИ по физике с решениями задач

2015-2024

ОЛИМПИАДЫ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА:

phys.msu.ru/olimpiady.php

ФИЗФАК — АБИТУРИЕНТАМ:

t.me/open_ff

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

ФИЗИКА

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ 2015 – 2024 годов

(с подробными решениями)

Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2025

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я729
Ф50

В разработке заданий в течение ряда лет участвовали:

Буханов В.М., Вишнякова Е.А., Власова И.М., Грачев А.В., Журавлев А.В., Зотеев А.В., Иванов В.Ю., Иванова И.Б., Иванова О.С., Козлов С.Н., Коновко А.А., Лукашева Е.В., Мартышов М.Н., Невзоров А.Н., Нетребко Н.В., Никанорова Е.А., Никитин С.Ю., Павликов А.В., Плотников Г.С., Погожев В.А., Подымова Н.Б., Поляков О.П., Поляков П.А., Полякова М.С., Склянкин А.А., Стрыгин С.Е., Чесноков С.С., Чистякова Н.И., Чичигина О.А., Шалыгина О.А., Шевцов В.С., Шулейко Д.В.

Физика. Задачи вступительного испытания 2015 – 2024 годов (с подробными решениями) /Буханов В.М. и др. Под ред. В.А. Макарова – Москва: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова – 2025. – 64 с.: ил.

ISBN 978-5-8279-0340-6

В сборнике приведены задачи дополнительного вступительного испытания по физике, проводившегося на физическом факультете МГУ в 2015 - 2024 годах, снабженные подробными решениями, обоснованиями применимости используемых законов и допущений, а также анализом полученных ответов.

Для учащихся старших классов, абитуриентов, учителей и преподавателей, ведущих занятия по физике со школьниками.

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я729

ISBN 978-5-8279-0340-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящая программа составлена на основе ныне действующих учебных программ для школ и классов с углубленным изучением физики.

При подготовке к экзамену основное внимание следует уделить выявлению сущности физических законов и явлений, умению истолковывать физический смысл величин и понятий, а также умению применять теоретический материал к решению задач. Необходимо уметь пользоваться при вычислениях системой СИ и знать внесистемные единицы, указанные в программе.

Глубина ответов на пункты программы определяется содержанием опубликованных учебников для школ и классов с углубленным изучением физики, указанных в конце настоящей программы.

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика

Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Система отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь.
Скорость. Сложение скоростей.
Ускорение. Сложение ускорений.
Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. Зависимости скорости, координат и пути от времени.
Криволинейное движение. Движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности. Тангенциальное и нормальное ускорения.
Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.
Поступательное и вращательное движения твердого тела.

1.2. Динамика

Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принцип относительности Галилея.
Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.
Инертность тел. Масса. Плотность.
Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы
Третий закон Ньютона.
Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.
Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.
Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.
Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.
Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.

1.3. Законы сохранения в механике

Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Импульс системы материальных точек. Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы измерения работы и мощности.

Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Закон сохранения механической энергии.

1.4. Статика твердого тела

Сложение сил, приложенных к твердому телу. Момент силы относительно оси вращения. Правило моментов.

Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия тел.

1.5. Механика жидкостей и газов

Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт. ст.

Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.

Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.

Закон Архимеда для тел, находящихся в жидкости или газе. Плавание тел.

Движение жидкостей. Уравнение Бернулли.

1.6. Механические колебания и волны. Звук

Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.

Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волны. Скорость распространения волн. Фронт волны. Уравнение бегущей волны. Стоячие волны.

Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн.

Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Масса и размер молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.

Тепловое равновесие. Температура и ее физический смысл. Шкала температур Цельсия. Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.
Уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.

2.2. Элементы термодинамики

Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоемкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изотермическому, изохорному и изобарному процессам. Расчет работы газа с помощью pV-диаграмм. Теплоемкость одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.
Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

2.3. Изменение агрегатного состояния вещества

Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.
Влажность. Относительная влажность.
Кристаллическое и аморфное состояние вещества. Удельная теплота плавления.
Уравнение теплового баланса.

2.4. Поверхностное натяжение в жидкостях

Сила поверхностного натяжения. Явления смачивания и несмачивания. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления.

2.5. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

Тепловое линейное расширение. Тепловое объемное расширение. Тепловое расширение жидкостей. Особенности теплового расширения воды.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. Электростатика

Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Проводники и диэлектрики. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.
Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряженность электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Теорема Гаусса. Поле равномерно заряженных плоскости, сферы и шара.

Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда. Эквипотенциальные поверхности.
Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Электроемкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.
Энергия электрического поля.

3.2. Постоянный ток

Электрический ток. Сила тока. Условия существования тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение.
Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников. Измерение силы тока, напряжения и сопротивления.
Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Правила Кирхгофа.
Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.
Электрический ток в металлах.
Электрический ток в электролитах. Законы электролиза.
Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа - диод. Электронно-лучевая трубка.
Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. *p-n* – переход и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Термистор и фоторезистор.
Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

3.3. Магнетизм

Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной индукции. Картины магнитного поля прямого тока и соленоида. Понятие о магнитном поле Земли.
Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.
Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.
Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетики.

3.4. Электромагнитная индукция

Магнитный поток. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.
Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции.
Энергия магнитного поля тока.

3.5. Электромагнитные колебания и волны

Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.
Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.
Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращение энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в

колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.
Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.
Открытый колебательный контур. Опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн. Принципы радиосвязи.

4. ОПТИКА

4.1. Геометрическая оптика

Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.
Интенсивность (плотность потока) излучения. Световой поток. Освещенность.
Законы отражения света. Плоское зеркало. Сферическое зеркало. Построение изображений в плоском и сферическом зеркалах.
Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения**.**
Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.
Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

4.2. Элементы физической оптики

Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света.
Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.
Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.
Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционная решетка.
Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.
Постулаты теории относительности (постулаты Эйнштейна). Связь между массой и энергией.

5. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

Опыты Резерфорда по рассеянию α-частиц. Планетарная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение энергии атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.
Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмульсионный метод.
Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.
Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Физика: Механика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики /Под ред. Г.Я. Мякишева. – М.: Дрофа, 2001.
2. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
3. Мякишев Г.Я., Синяков А.З., Слободсков Б.А. Физика: Электродинамика. 10 – 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
4. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Колебания и волны. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
5. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
6. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Задачи по элементарной физике. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.
7. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.Г., Мякишев Г.Я. Физика. Для поступающих в вузы: Учебн. пособие. Для подготов. отделений вузов. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

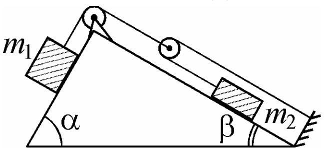
1. Грачев А.В., Погожев В.А., Селиверстов А.В. Физика: 7 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2007.
2. Грачев А.В., Погожев В.А., Вишнякова Е.А. Физика: 8 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2008.
3. Элементарный учебник физики /под ред. Г.С. Ландсберга. В 3-х кн. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.
4. Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д. Физика. Справочное пособие. Для поступающих в вузы. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.
5. Физика. Учебники для 10 и 11 классов школ и классов с углубленным изучением физики /под ред. А.А. Пинского. – М.: Просвещение, 2000 и предшествующие издания.
6. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика. В 3-х кн. М.: Физматлит, 2001.
7. Павленко Ю.Г. Физика. Полный курс для школьников и поступающих в вузы: Учебное пособие. – М.: Большая Медведица, 2002.
8. Сборник задач по физике /под ред. С.М. Козела – М.: Просвещение, 2000 и предшествующие издания.
9. Гольдфарб Н.И. Физика. Задачник. 9 – 11 кл.: Пособие для общеобразовательных учебных заведений. – М.: Дрофа, 2000 и предшествующие издания.
10. Задачи по физике /под ред. О.Я. Савченко – М.: Наука, 1988.
11. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике в МГУ – 1992-2002. М.: Физический факультет МГУ, 1992 и последующие издания.

В 2015 – 2019 годах дополнительное вступительное испытание по физике в МГУ и в его Севастопольском филиале проводилось в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа. Ниже приводятся примеры заданий дополнительного вступительного испытания.

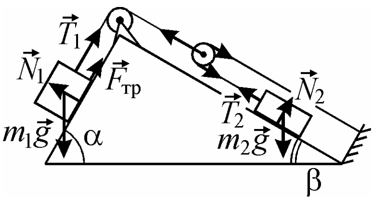
2015 год

15.I. Механика

15.I.1. Задача. На гранях закрепленной призмы находятся два груза массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг, соединенные друг с другом и неподвижной опорой невесомыми и нерастяжимыми нитями через систему невесомых блоков (см. рисунок). Правая грань призмы гладкая, левая − шероховатая с коэффициентом трения $\mu = 0,6$. Определите модуль ускорения левого груза a_1. Углы при основании призмы $\alpha = 60º$, $\beta = 30º$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



15.I.1. Решение. Тела движутся под действием сил, изображенных на рисунке, где $m_{1,2}\vec{g}$ − силы тяжести, $\vec{N}_{1,2}$ − нормальные составляющие сил реакции призмы, $\vec{T}_{1,2}$ − силы натяжения нитей, $\vec{F}_{тр}$ − сила трения скольжения. По второму закону Ньютона имеем: $m_1a_1 = m_1g\sin\alpha - T_1 - \mu m_1 g\cos\alpha$ (для левого груза), $m_2a_2 = T_2 - m_2g\sin\beta$ (для правого груза). Кроме того, справедливы равенства, вытекающие из условия, что нити нерастяжимы и невесомы, а именно $a_2 = 2a_1$, $T_1 = 2T_2$. Решая записанную систему уравнений, находим, что $a_1 = \dfrac{(m_1\sin\alpha - 2m_2\sin\beta - \mu m_1\cos\alpha)}{m_1 + 4m_2}g$.



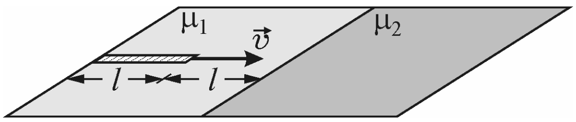
Ответ: $a_1 = \dfrac{(m_1\sin\alpha - 2m_2\sin\beta - \mu m_1\cos\alpha)}{m_1 + 4m_2}g \approx 0,22$ м/с^2.

15.I.2. Задача. На горизонтальной поверхности стола лежит доска массой $M = 0,5$ кг, а на доске сидит лягушка массой $m = 50$ г. В некоторый момент времени лягушка совершает прыжок, отталкиваясь от доски, и приобретает скорость $\upsilon = 1$ м/с, направленную под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Считая, что длительность толчка лягушки о доску равна $\tau = 0,1$ с, а сила, действующая на лягушку во время толчка, практически постоянна, определите, при каких значениях коэффициента трения μ доски о стол, доска в момент толчка будет оставаться неподвижной. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

15.I.2. Решение. Согласно второму закону Ньютона изменение импульса лягушки за время τ равно импульсу суммы сил, действующих на лягушку, за это же время.

Поскольку на лягушку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции доски $\vec{R}$, то изменение импульса лягушки $m\Delta\vec{v} = (m\vec{g} + \vec{R})\tau$. Учтем, что до прыжка лягушка покоилась, и разложим силу реакции доски на две составляющие: нормальную к доске $\vec{N}$ и касательную к ней $\vec{F}$. Тогда закон изменения импульса лягушки в проекции на вертикальное и горизонтальное направления принимает вид: $mv\sin\alpha = (N - mg)\tau$, $mv\cos\alpha = F\tau$. По третьему закону Ньютона сила, с которой лягушка действует на доску, равна по модулю и противоположна по направлению силе реакции доски $\vec{R}$. Поскольку по условию доска остается неподвижной, $F = F_{\text{тр}}$, где $F_{\text{тр}}$ − модуль силы трения покоя, удерживающий доску на месте. Сила нормального давления доски на стол в момент прыжка лягушки равна $N_0 = N + Mg$. По закону сухого трения сила трения покоя удовлетворяет неравенству $F_{\text{тр}} \le \mu N_0$. Решая записанную систему, находим, что $\mu \ge \dfrac{mv\cos\alpha}{mv\sin\alpha + (M+m)g\tau}$. **Ответ:** $\mu \ge \dfrac{mv\cos\alpha}{mv\sin\alpha + (M+m)g\tau} \approx 0{,}06$.

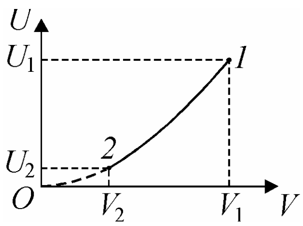
15.I.3. Задача. По горизонтальному столу скользит слева направо тонкая однородная линейка длиной $l = 20$ см. Поверхность стола состоит из двух панелей, обработанных с различным качеством. Коэффициент трения между линейкой и левой панелью равен μ_1, а между линейкой и правой панелью − μ_2 (см. рисунок). В тот момент, когда расстояние от правого конца линейки до линии соприкосновения (стыка) панелей равно *l*, модуль скорости линейки $v = 1$ м/с. При каком максимальном значении коэффициента трения $\mu_2 = \mu_{2\max}$ линейка может полностью попасть на правую панель, если коэффициент трения $\mu_1 = 0{,}05$, а вектор скорости линейки направлен перпендикулярно стыку панелей? Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



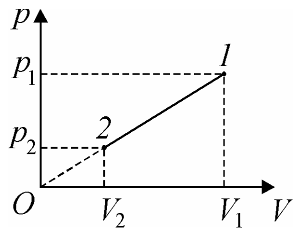
15.I.3. Решение. Модуль работы силы трения на всем перемещении линейки можно представить в виде суммы трех слагаемых: $A = A_0 + A_1 + A_2$. Здесь $A_0 = \mu_1 mgl$ − модуль работы силы трения на перемещении линейки по левой панели до стыка с правой панелью (*m* – масса линейки), A_1 − модуль работы силы трения, действующей со стороны левой панели, на перемещении линейки с левой панели на правую панель. Обозначив через *x* длину той части линейки, которая находится на левой панели, для модуля силы трения, действующей со стороны левой панели, имеем $F_1 = \mu_1 \dfrac{mg}{l} x$. Заметим, что эта сила изменятся в зависимости *x* линейно в пределах от $\mu_1 mg$ до нуля. Поэтому модуль работы силы F_1 на перемещении *l* равен $A_1 = \dfrac{1}{2}\mu_1 mgl$. Аналогично можно найти модуль работы силы трения F_2, действующей со стороны правой панели, на том же перемещении: $A_2 = \dfrac{1}{2}\mu_2 mgl$. При мы предполагаем, что линейка остановилась, оказавшись целиком в правой панели. Применив теорему об изменении кинетической энергии, получим равенство $\frac{mv^2}{2} = \mu_1 mgl + \frac{1}{2}\mu_1 mgl + \frac{1}{2}\mu_2 mgl$. Отсюда находим максимальную величину коэффициента трения μ_2, а именно $\mu_{2\text{мах}} = \frac{v^2}{gl} - 3\mu_1$.

Ответ: $\mu_{2\text{мах}} = \frac{v^2}{gl} - 3\mu_1 = 0{,}35$.

15.II. Молекулярная физика и термодинамика



15.II.1. Задача. Какую работу A надо совершить для сжатия некоторого количества идеального одноатомного газа в $k = 3$ раза, если внутренняя энергия газа U меняется при этом так, как показано на рисунке? Участок *1 – 2* – отрезок параболы с вершиной в начале координат. Исходное значение внутренней энергии газа равно $U_1 = 135$ кДж.



15.II.1. Решение. Внутренняя энергия идеального одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$, т.е. $U \sim T$. Поскольку участок *1 – 2* – отрезок параболы, то и $T \sim V^2$. Из уравнения состояния газа $pV = \nu RT$ следует, что на этом участке $p \sim V$. Работу по сжатию газа найдём, вычислив площадь фигуры под графиком $p = p(V)$, т.е. трапеции. Имеем $A = \frac{1}{2}(kp_2 + p_2)(kV_2 - V_2) = \frac{1}{2}(k^2 - 1)p_2V_2$. Из сравнения выражений $U_2 = \frac{3}{2}\nu RT_2$ и $p_2V_2 = \nu RT_2$ следует, что $p_2V_2 = \frac{2}{3}U_2$, а значит искомая работа равна $A = \frac{k^2 - 1}{3}U_2$. Учитывая, что $U_2 = \frac{1}{k^2}U_1$, получаем окончательно, что $A = \frac{k^2 - 1}{3k^2}U_1$.

Ответ: $A = \frac{k^2 - 1}{3k^2}U_1 = 40$ кДж.

15.II.2. Задача. В цилиндре под поршнем при температуре $20°$ С находятся воздух, водяные пары и вода. Число молей воздуха равно числу молей пара, а масса воды в три раза больше массы пара. Объём смеси медленно увеличивают при постоянной температуре до тех пор, пока относительная влажность воздуха не уменьшится до 50%. Определите конечное давление влажного воздуха p, если давление насыщенного пара при $20°$ С равно $p_{\text{нас}} = 2{,}33$ кПа.

15.II.2. Решение. Поскольку в начальном состоянии пар в цилиндре является насыщенным, и число молей воздуха равно числу молей пара, то парциальное давление сухого воздуха в этом состоянии равно $p_{\text{возд}\,0} = p_{\text{нас}}$. При медленном расширении смеси в 4 раза вся вода испарится, а пар останется насыщенным, т.е. относительная влажность воздуха сохранится равной 100%. Для того чтобы относительная влажность воздуха уменьшилась до 50%, нужно увеличить объем смеси еще в два раза. Таким образом, конечный объем смеси равен восьми начальным объемам. Следовательно, конечное давление сухого воздуха $p_{\text{возд к}} = \dfrac{p_{\text{нас}}}{8}$. Искомое давление влажного воздуха $p = p_{\text{возд к}} + p_{\text{пара к}} = \dfrac{p_{\text{нас}}}{8} + \dfrac{p_{\text{нас}}}{2} = \dfrac{5}{8} p_{\text{нас}}$. **Ответ:** $p = \dfrac{5}{8} p_{\text{нас}} \approx 1{,}46$ кПа.

15.II.3. Задача. Герметично закрытый сосуд объемом $V = 2$ л находится при температуре $t_1 = 36\ °\text{C}$. При этом половину сосуда занимает вода, а другую половину – насыщенный водяной пар. На какую величину ΔN увеличится число молекул водяного пара в сосуде при его нагревании до температуры $t_0 = 100\ °\text{C}$? Давление насыщенного водяного пара при температуре $36\ °\text{C}$ составляет $p_{\text{нас}} = 5{,}9$ кПа. Нормальное атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа. Изменением объема воды за счет изменения ее плотности и частичного испарения можно пренебречь. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

15.II.3. Решение. Состояние водяного пара описывается уравнением $p = nkT$, где p – давление пара, $n = 2N/V$ – концентрация молекул пара, N – число молекул пара, T – его абсолютная температура. Отсюда $N = \dfrac{pV}{2kT}$. Таким образом, начальное число молекул пара $N_{\text{нач}} = \dfrac{p_{\text{нас}}V}{2kT_1}$, где $T_1 = 273 + t_1 = 309\ \text{К}$. Учтем, что при температуре $T_0 = 273 + t_0 = 373\ \text{К}$ давление насыщенного водяного пара совпадает с нормальным атмосферным давлением p_0. Число молекул пара при равно $N_{\text{кон}} = \dfrac{p_0 V}{2kT_0}$.

Следовательно, $\Delta N = N_{\text{кон}} - N_{\text{нач}} = \dfrac{p_0 V}{2kT_0}\left(1 - \dfrac{p_{\text{нас}}}{p_0} \cdot \dfrac{T_0}{T_1}\right)$.

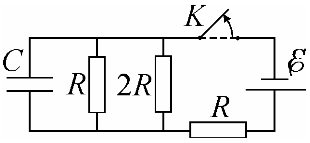
Ответ: $\Delta N = \dfrac{p_0 V}{2k(t_0 + 273)}\left(1 - \dfrac{p_{\text{нас}}}{p_0} \cdot \dfrac{t_0 + 273}{t_1 + 273}\right) \approx 1{,}8 \cdot 10^{22}$.

15.III. Электродинамика

15.III.1. Задача. Конденсатор емкостью $C_1 = 10$ мкФ зарядили от источника постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}$. Отключив конденсатор от источника, его соединили с незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 2C_1$. После установления напряжения на конденсаторах их обкладки замкнули проводником с достаточно большим сопротивлением, в котором выделилось количество теплоты Q = 0,3 Дж. Определите ЭДС источника $\mathcal{E}$.

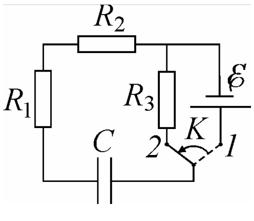
15.III.1. Решение. После соединения конденсаторов напряжения на них установятся одинаковыми, а их суммарный заряд останется равным первоначальному заряду первого конденсатора, т.е. $U_2 = U_1$, $(C_1 + C_2)U_1 = C_1\mathcal{E}$. Следовательно, $U_1 = \dfrac{C_1\mathcal{E}}{C_1 + C_2}$. После замыкания конденсаторов проводником с большим сопротивлением они полностью разрядятся, а выделившееся при этом количество теплоты практически будет равно электрической энергии, которой обладали конденсаторы до замыкания, а именно, $Q = \dfrac{(C_1 + C_2)U_1^2}{2}$. Из написанных соотношений следует, что $\mathcal{E} = \dfrac{\sqrt{2Q(C_1 + C_2)}}{C_1}$. **Ответ:** $\mathcal{E} = \dfrac{\sqrt{2Q(C_1 + C_2)}}{C_1} \approx 424$ В.

15.III.2. Задача. В приведенной на рисунке схеме электроёмкость конденсатора C = 6 мкФ, ЭДС источника $\mathcal{E}$ = 5 В, а ключ K замкнут. Какое максимальное количество теплоты Q может выделиться на резисторе $2R$ после размыкания ключа? Внутреннее сопротивление источника считайте пренебрежимо малым.



15.III.2. Решение. Сопротивление цепи при замкнутом ключе K равно $\dfrac{5R}{3}$. Поэтому до размыкания ключа сила тока, протекающего через источник, равна $I = \dfrac{3\mathcal{E}}{5R}$, а напряжение на конденсаторе равно $U = \dfrac{2}{3}RI = \dfrac{2\mathcal{E}}{5}$. Запасённая в конденсаторе энергия $W = \dfrac{CU^2}{2} = \dfrac{2C\mathcal{E}^2}{25}$ выделится в виде теплоты на резисторах R и $2R$ после размыкания ключа в количествах, обратно пропорциональных их сопротивлениям, т.е. на резисторе $2R$ выделится 1/3 часть этой энергии. Отсюда получаем, что $Q = \dfrac{2C\mathcal{E}^2}{75}$.

Ответ: $Q = \dfrac{2C\mathcal{E}^2}{75} = 4 \cdot 10^{-6}$ Дж, или 4 мкДж.



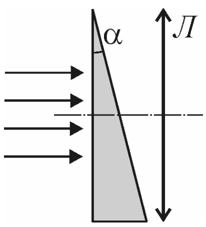
15.III.3. Задача. В цепи, схема которой изображена на рисунке, ключ K сначала достаточно долго удерживали в положении *1*. Затем ключ перевели в положение *2*. Известно, что после этого на сопротивлении R_1 выделилось количество теплоты Q_1 = 1 мДж. Определите ЭДС $\mathcal{E}$ источника. При расчетах примите R_1 = 100 Ом; R_2 = 200 Ом; R_3 = 300 Ом; C = 120 мкФ.

15.III.3. Решение. В исходном состоянии конденсатор зарядится до разности потенциалов $\mathcal{E}$. После перебрасывания ключа *K* в положение *2* конденсатор полностью разрядится и в цепи, состоящей из резисторов R_1, R_2 и R_3, выделится количество теплоты $Q = \dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}$. Поскольку в последовательной цепи количества теплоты, выделяющиеся на отдельных резисторах, пропорциональны их сопротивлениям, то $Q_1 = \dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}\dfrac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$. Отсюда $\mathcal{E} = \sqrt{\dfrac{2Q_1}{C}\cdot\dfrac{R_1+R_2+R_3}{R_1}}$.

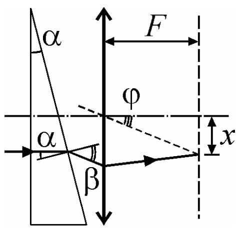
Ответ: $\mathcal{E} = \sqrt{\dfrac{2Q_1}{C}\cdot\dfrac{R_1+R_2+R_3}{R_1}} = 10$ В.

15.IV. Оптика

15.IV.1. Задача. Параллельный пучок света падает по нормали на грань стеклянной призмы. Угол при вершине призмы равен $\alpha = 0{,}1$ рад, показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. За призмой установлена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 1$ м так, что главная оптическая ось линзы перпендикулярна входной грани призмы (см. рисунок). На каком расстоянии *x* от главной оптической оси линзы будет сфокусирован световой пучок, преломленный призмой?

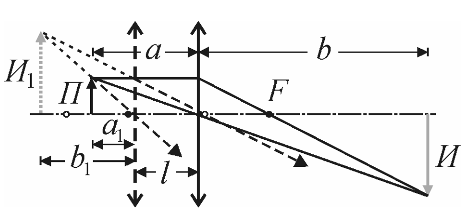


Указание. Для упрощения расчетов воспользуйтесь приближенной формулой $\sin x \approx \mathrm{tg}\, x \approx x$, справедливой для малых значений аргумента *x*, заданного в радианах.



15.IV.1. Решение. Угол φ, на который призма отклоняет падающий на нее пучок света, определяется формулой $\varphi = \beta - \alpha$ (см рисунок). Здесь β – угол преломления, определяемый законом Снеллиуса $n\sin\alpha = \sin\beta$, или $n\alpha \approx \beta$. Отсюда $\varphi \approx (n-1)\alpha$. Параллельный пучок лучей линза собирает в побочном фокусе. При этом луч, идущий через центр линзы, не преломляется. Отсюда $x = F\cdot\mathrm{tg}\,\varphi \approx F\cdot\varphi \approx F\cdot(n-1)\alpha$. **Ответ:** $x \approx (n-1)\alpha F = 5$ см.

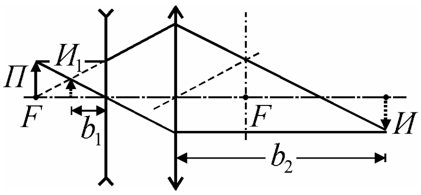
15.IV.2. Задача. Действительное изображение предмета, находящегося на расстоянии $a = 8$ см от тонкой собирающей линзы, получается с некоторым увеличением. После перемещения линзы вдоль ее главной оптической оси на расстояние $l = 4$ см линза дает мнимое изображение предмета с таким же увеличением. Определите фокусное расстояние линзы *F*.



15.IV.2. Решение. Построение действительного изображения *И* и мнимого изображения $И_1$ предмета *П* показано на рисунке. Для исходного положения линзы использованы сплошные линии, для смещенного − штриховые. Используя обозначения, приведенные на рисунке, по формуле тонкой линзы имеем: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$ (для исходного положения линзы), $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1}=\frac{1}{F}$ (для смещенного ее положения). Увеличение предмета в первом случае определяется выражением $\Gamma=\frac{b}{a}=\frac{F}{a-F}$, а во втором случае $\Gamma_1=\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_1}{a-l}=\frac{F}{F-a+l}$. Учитывая, что по условию $\Gamma_1=\Gamma$, из этих выражений получаем, что $F=a-\frac{l}{2}$. **Ответ:** $F=a-\frac{l}{2}=6$ см.

15.IV.3. Задача. Две тонкие линзы с одинаковыми по модулю фокусными расстояниями расположены так, что их главные оптические оси совпадают. Первая линза является рассеивающей, а вторая – собирающей. Расстояние между линзами равно модулю их фокусного расстояния. Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси перед рассеивающей линзой в ее левом фокусе. Определите увеличение Г, даваемое этой системой линз.

15.IV.3. Решение. Построение изображения *И* предмета *П*, которое дает система



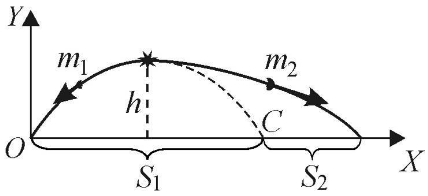
линз, показано на рисунке. Видно, что размер изображения совпадает с размером предмета, т.е. $\Gamma=1$. Этот же результат можно получить путем расчета. Рассеивающая линза формирует мнимое изображение предмета $И_1$. Расстояние b_1 от рассеивающей линзы до этого изображения согласно формуле тонкой линзы $\frac{1}{F}-\frac{1}{b_1}=-\frac{1}{F}$ равно $b_1=\frac{F}{2}$, а увеличение этого изображения $\Gamma_1=\frac{b_1}{F}=\frac{1}{2}$. Изображение $И_1$ играет роль предмета для собирающей линзы и находится на расстоянии $F+b_1=\frac{3}{2}F$ от нее. По формуле $\frac{2}{3F}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{F}$ находим, что расстояние от линзы до даваемого ею изображения $b_2=3F$, а увеличение этого изображения $\Gamma_2=\frac{b_2}{1{,}5F}=2$. Увеличение, даваемое системой линз, $\Gamma=\Gamma_1\cdot\Gamma_2=1$. **Ответ:** $\Gamma=1$.

2016 год

16.I. Механика

16.I.1. Задача. Снаряд массой $m = 16$ кг вылетел из пушки под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. В верхней точке траектории снаряд разорвался на две части, причем осколки снаряда упали на землю одновременно. Осколок массой $m_1 = 4$ кг упал почти на пушку, а другой осколок упал на землю на расстоянии $S = 8$ км от пушки. Пренебрегая сопротивлением воздуха и массой взрывчатого вещества в снаряде, найдите кинетическую энергию снаряда $E_к$ в момент вылета из пушки. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

16.I.1. Решение. Траектория снаряда до разрыва и траектории осколков после разрыва изображены на рисунке. Если бы снаряд не разорвался, то дальность его полета



была бы равна $S_1 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. (см. штриховую линию на рисунке). Здесь v_0 – начальная скорость снаряда. Поскольку осколки упали на землю одновременно, после разрыва снаряда их скорости были направлены горизонтально. Их центр масс, двигаясь по воображаемой траектории неразорвавшегося снаряда, упал бы в точке C на расстоянии S_1 от пушки. Обозначим через S_2 расстояние от точки падения центра масс до точки падения второго осколка. В соответствии с определением центра масс, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{m - m_1}{m_1} = 3$. Следовательно, $S = S_1 + S_2 = \frac{4v_0^2 \sin 2\alpha}{3g}$, откуда получаем, что $v_0^2 = \frac{3gS}{4\sin 2\alpha}$. Начальная кинетическая энергия снаряда равна $E_к = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{3}{8}\frac{mgS}{\sin 2\alpha}$. **Ответ:** $E_к = \frac{3}{8}\frac{mgS}{\sin 2\alpha} \approx 0{,}55$ МДж

16.I.2. Задача. В маленьком бассейне с вертикальными стенками плавает игрушечный плот, на котором лежат одинаковые игрушки. На стенке бассейна нанесена шкала для измерения высоты уровня воды. Когда ребенок перенёс с плота на бортик бассейна одну игрушку, высота уровня воды изменилась на $\Delta h_1 = 6$ см. Он хотел перенести туда же и вторую игрушку, но уронил ее, и игрушка упала на дно. Высота уровня воды после этого изменилась еще на $\Delta h_2 = 1$ см. Во сколько раз n плотность материала игрушки больше, чем плотность воды?

16.I.2. Решение. Когда одна игрушка массой m оказалась на бортике, масса плота с игрушками стала меньше на величину m, и уровень воды понизился на $\Delta h_1 = \frac{m}{\rho_0 S}$, где ρ_0 – плотность воды, S – площадь дна бассейна. Когда вторую игрушку сняли с плота, уровень воды понизился еще на $\frac{m}{\rho_0 S}$, а когда после этого игрушка упала в воду, уровень воды поднялся на $\frac{m}{\rho S}$, где ρ − плотность материала игрушки. Таким образом, $\Delta h_2 = \frac{m}{\rho_0 S} - \frac{m}{\rho S} = \frac{m}{\rho_0 S}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) = \Delta h_1\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$. Отсюда находим, что $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 - \Delta h_2 / \Delta h_1}$.

Ответ: $n = \frac{1}{1 - \Delta h_2 / \Delta h_1} = 1{,}2$.

16.I.3. Задача. Брусок массой M = 100 г, прикрепленный посредством пружины к неподвижной стенке, совершает гармонические колебания на гладком столе с амплитудой A_0 = 5 см. В момент прохождения бруском положения равновесия на него падает вертикально кусок пластилина массой m = 56,25 г и сразу прилипает к бруску. Определите установившуюся амплитуду A_1 колебаний бруска с прилипшим к нему пластилином.

16.I.3. Решение. Обозначим через v_0 скорость бруска при прохождении положения равновесия до прилипания пластилина, а через v_1 − скорость бруска сразу после прилипания к нему пластилина. По закону сохранения импульса в момент прилипания пластилина к бруску имеем $Mv_0 = (M+m)v_1$. Следовательно, максимальная скорость бруска с прилипшим пластилином равна $v_1 = \frac{M \cdot v_0}{M+m}$. Из закона сохранения энергии следуют уравнения $\frac{kA_0^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2}$ и $\frac{kA_1^2}{2} = \frac{(M+m)v_1^2}{2}$, где k − жесткость пружины. Из этих уравнений находим, что $A_1 = A_0\sqrt{\frac{M}{M+m}}$.

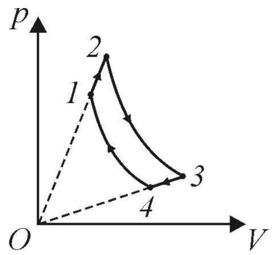
Ответ: $A_1 = A_0\sqrt{\frac{M}{M+m}} = 4$ см.

16.II. Молекулярная физика и термодинамика

16.II.1. Задача. U-образную трубку постоянного сечения расположили вертикально, частично заполнили ртутью и отметили уровень ртути на ее стенках. Затем левое колено трубки герметично закрыли, а в открытое правое колено трубки долили некоторое количество ртути, в результате чего поверхность ртути в коленах сместилась от первоначального положения. Определите атмосферное давление p_0, если отношение смещений уровней ртути в правом и левом коленах от первоначального положения равно $n = 4$, а высота воздушного столба в левом колене $L = 25$ см. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба. Температуру воздуха считайте постоянной.

16.II.1. Решение. Обозначим через H высоту слоя ртути, которую налили в правое колено, а через h – смещение ртути в левом колене от исходного уровня. Тогда изменение уровня ртути в правом колене будет $H - h$, а давление воздуха в левом колене $p = p_0 + \rho g(H - 2h)$, где ρ – плотность ртути, g – ускорение свободного падения. По закону Бойля-Мариотта $pLS = p_0(L + h)S$, где S – площадь сечения трубки. Из этих уравнений находим, что $p_0 = \dfrac{\rho g(H-2h)L}{h}$. Учитывая, что по условию $\dfrac{H-h}{h} = n$, получаем окончательно, что $p_0 = \rho gL(n-1)$.

Ответ: $p_0 = \rho gL(n-1) = 750$ мм рт. ст.



16.II.2. Задача. Над идеальным газом проводится циклический процесс, состоящий из двух участков *1 – 2*, *3 – 4*, на которых давление пропорционально объему, и двух адиабат *2 – 3*, *4 – 1* (см. рисунок). Известно, что изменение температуры газа на участке *1 – 2* равно $\Delta T_1 = 20$ К, а модуль изменения температуры на участке *3 – 4* равен $\Delta T_2 = 15$ К. Найдите коэффициент полезного действия цикла η.

16.II.2. Решение. Газ получает теплоту от нагревателя на участке *1 – 2* и отдает теплоту холодильнику на участке *3 – 4*. КПД цикла по определению равен $\eta = \dfrac{A}{Q_{12}}$, где A – работа, совершаемая газом за цикл. Поскольку изменение внутренней энергии газа в циклическом процессе равно нулю, из первого закона термодинамики следует, что работа газа равна алгебраической сумме количеств теплоты, которыми газ обменивается с окружающими телами. Таким образом, $A = Q_{12} - |Q_{34}|$. Кроме того, $Q_{12} = C(T_2 - T_1) = C\Delta T_1$, $Q_{34} = C(T_4 - T_3) = -C\Delta T_2$, где C – теплоемкость газа в процессе, в котором давление пропорционально объему. Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в том, что теплоемкость ν молей одноатомного идеального газа в таком процессе равна $C = 2\nu R$, где R – универсальная газовая постоянная.

Ответ: $\eta = \left(1 - \dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right) \cdot 100\% = 25\%$.

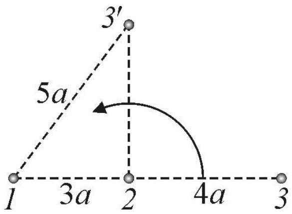
16.II.3. Задача. Горизонтально расположенный цилиндр, герметично закрытый с обоих торцов, разделён поршнем на две равные части, длина каждой из которых равна $l = 30$ см. В каждой части цилиндра находится вода и её пар при температуре $t = 100$ ºC. При этом масса воды в каждой из частей в 5 раз меньше массы пара. Площадь поперечного сечения поршня равна $S = 20$ см^2, а его масса $M = 200$ г. На какое расстояние h сместится поршень через достаточно большой промежуток времени, если цилиндр поставить вертикально, а температуру содержимого цилиндра поддерживать постоянной? Трение между поршнем и стенками цилиндра считайте пренебрежимо малым, модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2, а нормальное атмосферное давление – $p_0 = 10^5$ Па. Ответ приведите в миллиметрах, округлив до целых.

16.II.3. Решение. В горизонтально расположенном цилиндре пар является насыщенным и его давление равно p_0. Когда цилиндр ставят вертикально, поршень начинает опускаться, пар в нижней части цилиндра конденсируется, а вода в верхней части испаряется. Если в нижней части цилиндра не весь пар сконденсировался, а верхней части цилиндра вся вода испарилась, то при равновесии поршня давление ненасыщенного пара в верхней части цилиндра уменьшилось до величины $p_1 = p_0 - \dfrac{Mg}{S}$. Если число молей пара в каждой из частей горизонтально расположенного цилиндра обозначить через ν, то число молей воды в этих частях по условию будет равно $\nu/5$. Поэтому согласно уравнению Менделеева–Клапейрона давление в горизонтально расположенном цилиндре должно удовлетворять соотношению $p_0 Sl = \nu RT$, а в верхней части вертикального цилиндра установившееся давление p_1 будет удовлетворять соотношению $p_1 S(l+h) = 1{,}2\nu RT$. Из записанных соотношений находим, что $h = \dfrac{p_0 S/5 + Mg}{p_0 S - Mg} \cdot l$. **Ответ:** $h = \dfrac{p_0 S/5 + Mg}{p_0 S - Mg} \cdot l \approx 64$ мм.

16.III. Электродинамика

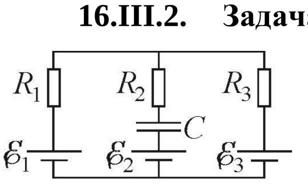
16.III.1. Задача. Три одинаковых точечных заряда $q = 10^{-8}$ Кл удерживают на одной прямой так, что расстояние между первым и вторым зарядами равно $3a$, а между первым и третьим зарядами равно $7a$, где $a = 10$ см. Определите минимальную работу, которую нужно совершить, чтобы переместить эти заряды в вершины прямоугольного треугольника с катетами длиной $3a$ и $4a$, преодолевая действие только электростатических сил, создаваемых этими зарядами. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

16.III.1. Решение. Потенциал точки, находящейся на расстоянии r от точечного



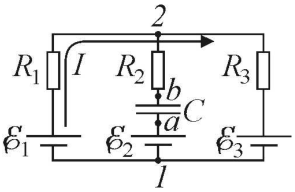
заряда q, относительно бесконечно удалённой от него точки равен $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Согласно принципу суперпозиции электростатических полей потенциал, создаваемый первым и вторым зарядами в точке *3*, где удерживают третий заряд, равен $\varphi_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\dfrac{1}{7a} + \dfrac{1}{4a}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{11}{28a}$, а потенциал вершины прямоугольного треугольника с длиной основания $3a$ и высотой $4a$ (точки *3′* на рисунке), в крайних точках основания которого находятся точечные заряды q, равен $\varphi_3 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\dfrac{1}{4a} + \dfrac{1}{5a}\right) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{9}{20a}$. Поэтому искомая работа равна $A = q(\varphi_3 - \varphi_1) = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \cdot \left(\dfrac{9}{20} - \dfrac{11}{28}\right) = \dfrac{q^2}{70\pi\varepsilon_0 a}$. **Ответ:** $A = \dfrac{q^2}{70\pi\varepsilon_0 a} \approx 5{,}1 \cdot 10^{-7}$ Дж.

16.III.2. Задача. В электрической схеме, представленной на рисунке,



сопротивления резисторов $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом, электроемкость конденсатора $C = 2$ мкФ, ЭДС источников $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $\mathcal{E}_2 = 8$ В, $\mathcal{E}_3 = 5$ В, их внутренние сопротивления пренебрежимо малы. Найдите заряд q на пластинах конденсатора.

III.2. Решение. По цепи течет постоянный ток I, направление которого указано на



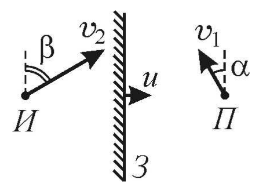
рисунке стрелкой. По закону Ома для полной цепи $I = \dfrac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_3}{R_1 + R_3}$. Разность потенциалов между точками *1* и *2* находим из закона Ома для неоднородного участка цепи, согласно которому $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathscr{E}_1 - IR_1$, а разность потенциалов между обкладками конденсатора $\varphi_a - \varphi_b = \varphi_1 + \mathscr{E}_2 - \varphi_2 = IR_1 - \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$. Следовательно, заряд на конденсаторе равен $q = C \cdot (\varphi_a - \varphi_b) = C \cdot \left(\dfrac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_3}{R_1 + R_3} R_1 - \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 \right)$.

Ответ: $q = C \cdot \left(\dfrac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_3}{R_1 + R_3} R_1 - \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 \right) = 10^{-6}$ Кл, или 1 мкКл.

16.III.3. Задача. Ученик собрал электрическую цепь, состоящую из источника и подключенного к нему нагрузочного резистора. При этом сопротивление резистора ученик подобрал таким, чтобы в резисторе выделялась максимально возможная мощность. Во сколько раз n изменится коэффициент полезного действия (КПД) цепи, если к источнику вместо одного подключить два таких резистора, соединенных параллельно?

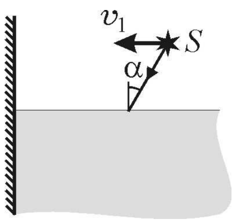
16.III.3. Решение. Используя закон Ома для полной цепи и закон Джоуля–Ленца, находим, что мощность, выделяющаяся в резисторе сопротивлением R, равна $N = \dfrac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}$, где $\mathscr{E}$ – ЭДС источника, r – его внутреннее сопротивление. Анализ этого выражения показывает, что оно достигает максимума при $R = r$. Например, находя производную от N по R, а именно, $N' = \dfrac{\mathscr{E}^2[(R+r)^2 - 2(R+r)R]}{(R+r)^4}$, и приравнивая ее нулю, приходим к записанному выше условию. КПД цепи, определяемый как $\eta = \dfrac{N}{N_{\text{полн}}}$, где $N_{\text{полн}} = \dfrac{\mathscr{E}^2}{R+r}$ – мощность, развиваемая источником, равен $\eta = \dfrac{R}{R+r}$. Поэтому в первом случае КПД $\eta_1 = \dfrac{r}{r+r} = \dfrac{1}{2}$, а во втором случае $\eta_2 = \dfrac{r/2}{r/2+r} = \dfrac{1}{3}$. Искомое отношение равно $n = \dfrac{\eta_2}{\eta_1} = \dfrac{2}{3}$. **Ответ:** $n = \dfrac{2}{3}$, т.е. КПД уменьшится в полтора раза.

16.IV. Оптика



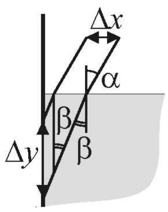
16.IV.1. Задача. Плоское зеркало *З* движется поступательно с некоторой постоянной скоростью, вектор которой направлен перпендикулярно плоскости зеркала. Предмет *П* движется со скоростью υ_1 = 1 см/с под углом α = 30° к плоскости зеркала, а его изображение *И* движется под углом β = 60° к плоскости зеркала (см. рисунок). Найдите модуль u скорости зеркала.

16.IV.1. Решение. Поскольку проекции скоростей предмета и изображения на направление, параллельное зеркалу, равны, то $v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta$, откуда $v_2 = v_1 \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Введем неподвижную координатную систему, направив ось OY перпендикулярно зеркалу, а начало координат совместив с плоскостью зеркала в некоторый момент времени $t = 0$. Если l – расстояние от предмета до зеркала при $t = 0$, то в момент времени t координаты предмета и изображения станут равными соответственно $y_п = l - v_1 t \sin\alpha$ и $y_и = -l + v_2 t \sin\beta$. Поскольку зеркало находится посередине между предметом и изображением, то его координата в момент времени t составит величину $y_з = \dfrac{y_п + y_и}{2}$. Следовательно, проекция скорости зеркала на ось OY равна $u_y = \dfrac{y_з}{t} = \dfrac{v_2 \sin\beta - v_1 \sin\alpha}{2}$. **Ответ:** $u = \dfrac{v_1(\cos\alpha \operatorname{tg}\beta - \sin\alpha)}{2} = 0{,}5$ см/с.



16.IV.2. Задача. Источник света S, испускающий тонкий луч, движется горизонтально над поверхностью воды в бассейне, приближаясь к его стенке с постоянной скоростью $v_1 = 0{,}5$ м/с, вектор которой перпендикулярен стенке. Луч направлен в воду так, что угол падения равен $\alpha = 30°$. С какой скоростью v_2 движется под водой по вертикальной стенке бассейна световое пятно от луча? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

16.IV.2. Решение. Ход луча, преломленного на границе раздела воздуха и воды, изображен на рисунке при двух положениях источника. Видно, что горизонтальное перемещение Δx источника и вертикальное перемещение Δy светлого пятна на стенке бассейна связаны соотношением $\Delta y = \dfrac{\Delta x}{\operatorname{tg}\beta}$, где β – угол преломления. По закону преломления $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$.

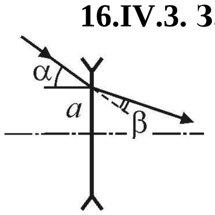


Следовательно, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$. При равномерном движении за время Δt источник сместится на $\Delta x = v_1 \Delta t$, а светлое пятно на стенке бассейна − на $\Delta y = v_2 \Delta t$.

Окончательно $v_2 = \dfrac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \cdot v_1$. Пятно движется по стенке вверх.

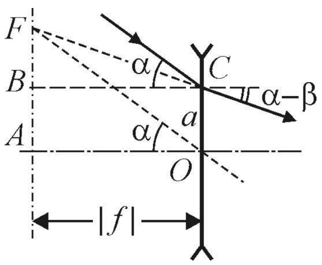
Ответ: $v_2 = \dfrac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \cdot v_1 \approx 1{,}2$ м/с.

16.IV.3. Задача. На поверхность тонкой рассеивающей линзы падает луч света на расстоянии $a = 1$ см от центра линзы под углом $\alpha = 0{,}1$ рад к ее главной оптической оси. Найдите модуль фокусного расстояния линзы f, если вышедший из линзы луч отклоняется от первоначального направления на угол $\beta = 0{,}05$ рад. Учтите, что для малых значений аргумента x,



заданного в радианной мере, справедлива приближенная формула $\operatorname{tg} x \approx x$.

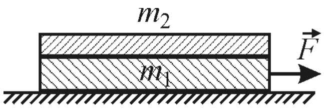
16.IV.3. Решение. Ход лучей изображен на рисунке. При построении преломленного в линзе луча использован вспомогательный луч FO, параллельный падающему и проходящий через оптический центр линзы O без преломления. Согласно известному свойству тонкой рассеивающей линзы, продолжения всех параллельных лучей, падающих на нее, пересекаются в точке F фокальной плоскости. С учетом того, что фокусное расстояние рассеивающей линзы отрицательно, из треугольников AOF и BCF находим, что $f \operatorname{tg}\alpha = a + f \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, откуда $f = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$. **Ответ:** $f = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha-\beta)} \approx \dfrac{a}{\beta} = 20$ см.



2017 год

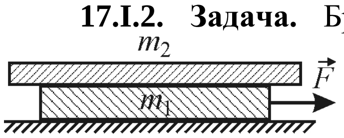
17.I. Механика

17.I.1. Задача. На гладкой горизонтальной поверхности лежит брус массой m_1 = 2 кг и длиной l = 1 м (рисунок). Сверху на брус положили однородную доску такой же длиной, масса которой m_2 = 1 кг. Через время t_0 = 1 с после того, как за привязанную к брусу веревку начали тянуть в горизонтальном направлении с силой F = 8 H, левый конец доски стал опускаться вниз. Определите коэффициент трения μ между доской и брусом. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.



17.I.1. Решение. Пусть a_1 и a_2 − ускорения бруса и доски в неподвижной системе отсчета. Уравнения движения для бруса и доски имеют вид: $m_1a_1 = F - f$, $m_2a_2 = f$, где $f = \mu m_2 g$. Отсюда следует, что $a_2 = \mu g$, $a_1 = \frac{1}{m_1}(F - \mu m_2 g)$. Модуль ускорения доски относительно бруса $a_{\text{отн}} = a_1 - a_2 = \frac{F}{m_1} - \mu g\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)$. Доска начнет «свешиваться», когда её центр тяжести достигнет конца бруса, т.е. при $\frac{a_{\text{отн}}t_0^2}{2} = \frac{l}{2}$. В итоге получаем что $\mu = \frac{F - (m_1 l / t_0^{\;2})}{(m_1 + m_2)g}$. **Ответ:** $\mu = \frac{F - (m_1 l / t_0^{\;2})}{(m_1 + m_2)g} = 0{,}2$.

17.I.2. Задача. Брус массой m_1 = 6 кг лежит на гладкой горизонтальной поверхности (см. рисунок). Сверху на брус симметрично относительно него положили однородную доску массой m_2 = 4 кг. Через время t_0 = 2 с после того, как за веревку, привязанную к брусу, начали тянуть в горизонтальном направлении с силой F = 36 Н, левый конец доски стал опускаться вниз. Определите длину бруса l, если коэффициент трения между доской и брусом μ = 0,3. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.



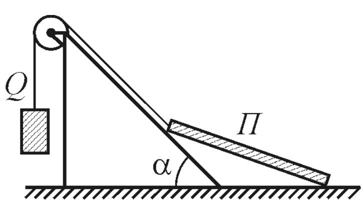
17.I.2. Решение. Пусть a_1 и a_2 − ускорения бруса и доски в неподвижной системе отсчета. Уравнения движения для бруса и доски имеют вид: $m_1a_1 = F - f$, $m_2a_2 = f$, где $f = \mu m_2 g$. Отсюда следует, что $a_2 = \mu g$, $a_1 = \frac{1}{m_1}(F - \mu m_2 g)$. Ускорение доски относительно бруса $a_{\text{отн}} = a_1 - a_2 = \frac{F}{m_1} - \mu g\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)$. Левый конец доски начнет опускаться вниз, когда ее центр тяжести достигнет конца бруса, т.е. при $\frac{a_{\text{отн}}t_0^2}{2} = \frac{l}{2}$. В итоге получаем что $l = \left(F - (m_1 + m_2)\mu g\right)\frac{t_0^2}{m_1}$. **Ответ:** $l = \left(F - (m_1 + m_2)\mu g\right)\frac{t_0^2}{m_1} = 4$ м.

17.I.3. Задача. По гладкому горизонтальному льду замёрзшего озера скользит доска массой M = 20 кг со скоростью, модуль которой равен v_0 = 2 м/с. Скорость доски параллельна её длинной стороне. В некоторый момент времени стоящий на льду человек аккуратно опустил на эту доску брусок массой m = 1 кг так, чтобы его центр масс оказался на прямой, проходящей через центр масс доски параллельно её длинной стороне. Определите коэффициент трения μ бруска о доску, если брусок перестал скользить по доске, переместившись относительно нее на расстояние l = 95 см. Считайте, что модуль ускорения свободного падения g = 10 м/с^2. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

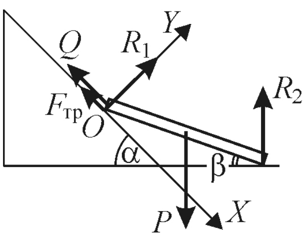
17.I.3. Решение. Поскольку силы сухого трения скольжения, действующие на доску и брусок по модулю равны μmg, то относительно человека брусок начинает двигаться с ускорением $a_1 = \mu g$ в направлении движения доски, а доска начинает тормозить с ускорением $a_2 = \dfrac{m}{M}\mu g$, направленным противоположно ее движению. Брусок и доска после соприкосновения будут двигаться поступательно прямолинейно со скоростями $v_1 = a_1 t$ и $v_2 = v_0 - a_2 t$. Скольжение бруска по доске прекратится, когда скорости этих тел относительно льда станут равными, т.е. выполнится условие $a_1 t_0 = v_0 - a_2 t_0$. Отсюда $t_0 = \dfrac{M v_0}{\mu g(m+M)}$. Поскольку за это время брусок переместится относительно льда на расстояние $x = \dfrac{\mu g t_0^2}{2}$, а доска сместится на расстояние $X = v_0 t_0 - \dfrac{\mu m g t_0^2}{2M}$, то $l = X - x = \left(v_0 - \mu g t_0 \dfrac{(m+M)}{2M} \right) t_0$. Подставляя сюда найденное выше выражение для t_0, получаем, что $l = \dfrac{M v_0^2}{2\mu g(m+M)}$. Отсюда $\mu = \dfrac{M v_0^2}{2gl(m+M)}$.

Ответ: $\mu = \dfrac{M v_0^2}{2gl(m+M)} \approx 0{,}20$.

17.I.4. Задача. Тонкая однородная пластина $П$ опирается одним ребром на гладкую горизонтальную поверхность, а другим – на шероховатую наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол $\alpha = 45°$ (см. рисунок). Модуль действующей на пластину силы тяжести P = 10 Н. К середине верхнего ребра пластины прикреплена гладкая невесомая нить, переброшенная через блок. На другом конце нити подвешен груз Q. Отрезок нити между пластиной $П$ и блоком параллелен наклонной плоскости, а между грузом Q и блоком – вертикален. Определите вес груза Q, при котором рассмотренная система будет находиться в равновесии, если коэффициент трения пластины о наклонную плоскость равен μ = 0,2. Числовой ответ округлите до двух значащих цифр.



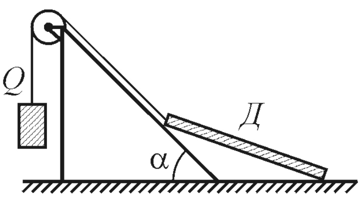
17.I.4. Решение. Пусть ось OX инерциальной системы отсчета направлена вдоль наклонной плоскости, а ось OY – перпендикулярно ей (см. рисунок). Поскольку нить невесомая и гладкая, а груз Q покоится, то условие отсутствия ускорения у центра масс



пластины можно представить в виде $-Q - F_{тр} - R_2 \sin\alpha + P\sin\alpha = 0$, $R_1 + R_2\cos\alpha - P\cos\alpha = 0$, а отсутствие углового ускорения пластины относительно оси, проходящей через точку O, в виде: $R_2 l\cos\beta - P\frac{l}{2}\cos\beta = 0$. Здесь Q – модуль силы, действующей со стороны нити на пластину, R_1 и R_2 модули нормальных составляющих сил реакции наклонной плоскости и горизонтальной поверхности, $F_{тр} = \mu R_1$ – модуль силы трения пластины о наклонную плоскость, l – длина пластины. При этом изображенное на рисунке направление силы трения покоя соответствует минимальному значению Q. Решая совместно приведённую систему уравнений, находим, что $Q_{\min} = \frac{P}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Если же значение силы Q максимально, то направление силы трения будет противоположным показанному на рисунке, а потому проекцию силы трения следует считать положительной. Решение соответствующей этому случаю системы уравнений дает $Q_{\max} = \frac{P}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$. Таким образом, искомая величина удовлетворяет неравенствам $\frac{P}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \le Q \le \frac{P}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

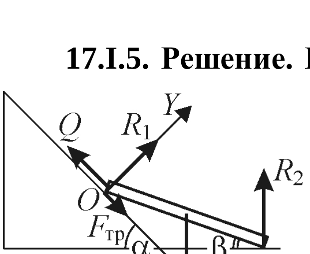
Ответ: $\frac{P}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \le Q \le \frac{P}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, т.е. $2{,}8\ \text{Н} \le Q \le 4{,}2\ \text{Н}$.

17.I.5. Задача. Тонкая однородная дощечка *Д* опирается одним ребром на



гладкую горизонтальную поверхность, а другим – на шероховатую наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол $\alpha = 45°$ (см. рисунок). Модуль действующей на дощечку силы тяжести $P = 10$ Н. К середине верхнего ребра дощечки прикреплена гладкая невесомая нить, переброшенная через блок. На другом конце нити подвешен груз Q. Отрезок нити между дощечкой *Д* и блоком параллелен наклонной плоскости, а между грузом Q и блоком – вертикален. Определите коэффициент трения μ дощечки о наклонную плоскость, зная, что равновесие системы нарушается, если вес груза Q превышает 5 Н. Числовой ответ округлите до двух значащих цифр.

17.I.5. Решение. Пусть ось OX инерциальной системы отсчета направлена вдоль



наклонной плоскости, а ось OY – перпендикулярно ей (см. рисунок). Поскольку нить невесомая и гладкая, а груз Q покоится, то условие отсутствия ускорения у центра масс дощечки можно представить в виде: $-Q + F_{тр} - R_2\sin\alpha + P\sin\alpha = 0$, $R_1 + R_2\cos\alpha - P\cos\alpha = 0$, а отсутствие углового ускорения дощечки относительно оси, проходящей через точку O, в виде: $R_2 l\cos\beta - P\frac{l}{2}\cos\beta = 0$. Здесь Q – модуль силы, действующей со стороны нити на дощечку, R_1 и R_2 модули нормальных составляющих сил реакции наклонной плоскости и горизонтальной поверхности, $F_{тр} = \mu R_1$ – модуль силы трения дощечки о наклонную плоскость, l – длина дощечки. При этом изображенное на рисунке направление силы трения покоя соответствует максимальному значению силы Q. Решая совместно приведённую систему уравнений, находим, что $\mu = \dfrac{2Q - P\sin\alpha}{P\cos\alpha}$. **Ответ:** $\mu = \dfrac{2Q - P\sin\alpha}{P\cos\alpha} \approx 0{,}41$.

17.II. Молекулярная физика и термодинамика

17.II.1. Задача. В закрытом с обоих торцов цилиндре при температуре 100 °С находятся пары воды и гелий, отделённые друг от друга гладким тяжёлым поршнем. Когда ось цилиндра была горизонтальной, объёмы пара и гелия были равны друг другу, а давление водяного пара было в n = 3 раза меньше давления насыщенного пара воды при 100 °С. После того, как цилиндр поставили вертикально, через достаточно большой промежуток времени половина пара сконденсировалась. Определите установившееся давление p гелия в вертикально расположенном цилиндре, если температура в обеих частях цилиндра всё время поддерживалась неизменной. Нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

17.II.1. Решение. Пусть $p_н = p_0 = 10^5$ Па – давление насыщенного пара воды при 100 °С, V – объёмы пара и гелия в исходном состоянии, $\nu_п$ – число молей пара, а $\nu_г$ – число молей гелия. Поскольку давления и объемы пара и гелия в исходном состоянии равны друг другу, то $\nu_г = \nu_п = \dfrac{p_0 V}{nRT}$. Здесь T = 373 К. Так как в вертикально стоящем цилиндре часть пара сконденсировалась при неизменной температуре, то гелий должен находиться в верхней части цилиндра, а давление в нижней части цилиндра должно стать равным p_0. Поскольку плотность пара во много раз меньше плотности воды при 100 °С, то объёмом сконденсировавшейся воды можно пренебречь, а потому занятый гелием объём можно считать равным $V_1 = 2V - \dfrac{V}{2n} = \dfrac{(4n-1)V}{2n}$. Поэтому согласно уравнению Менделеева – Клапейрона искомое давление гелия равно $p = \dfrac{\nu_г RT}{V_1} = \dfrac{2p_0}{4n-1}$. **Ответ:** $p = \dfrac{2p_0}{4n-1} = \dfrac{2}{11} p_0 \approx 18{,}2$ кПа.

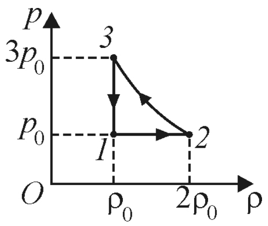
17.II.2. Задача. Над одноатомным идеальным газом совершают процесс, в котором давление газа линейно уменьшается с ростом его объема. При этом отношение конечного объема газа к начальному $\dfrac{V_2}{V_1} = m = 4$, а отношение конечного давления к начальному $\dfrac{p_2}{p_1} = n = \dfrac{1}{2}$. Найдите, во сколько раз k количество теплоты, полученное газом в этом процессе, больше изменения его внутренней энергии.

17.II.2. Решение. Работа, совершенная газом в рассматриваемом процессе, $A=\frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1)$, изменение внутренней энергии газа $\Delta U=\frac{3}{2}(p_2V_2-p_1V_1)$. Согласно первому закону термодинамики $\Delta Q=\frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1)+\frac{3}{2}(p_2V_2-p_1V_1)$. Искомое отношение равно

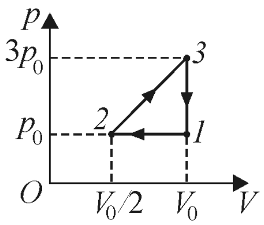
$$k=\frac{4p_2V_2-4p_1V_1+p_1V_2-p_2V_1}{3(p_2V_2-p_1V_1)}=\frac{4\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{V_2}{V_1}-4+\frac{V_2}{V_1}-\frac{p_2}{p_1}}{3\left(\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{V_2}{V_1}-1\right)}=\frac{4mn-4+m-n}{3(mn-1)}.$$

Ответ: $k=\frac{4nm-4+m-n}{3(mn-1)}=\frac{5}{2}$.

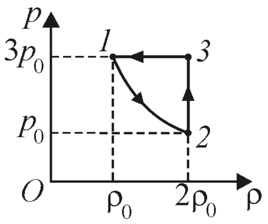
17.II.3. Задача. Идеальный одноатомный газ совершает в тепловом двигателе цикл *1–2–3–1*, в котором давление p газа изменяется с изменением его плотности ρ так, как показано на рисунке, причём график процесса *2–3* представляет собой участок гиперболы, описываемой уравнением $p=b+\frac{k}{\rho}$. Определите КПД цикла η. Ответ приведите в процентах, округлив до одного знака после запятой.



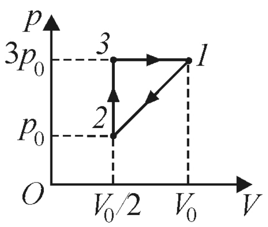
17.II.3. Решение. Согласно условию, на участке *2–3* зависимость давления газа от его плотности описывается законом вида $p=b+\frac{k}{\rho}$. Из системы уравнений $p_0=b+\frac{k}{2\rho_0}$, $3p_0=b+\frac{k}{\rho_0}$ находим, что $b=-p_0$, $k=4p_0\rho_0$ и $p=p_0\left(-1+4\frac{\rho_0}{\rho}\right)$, или $p=p_0\left(-1+4\frac{V}{V_0}\right)$, где V_0 – объем газа в состояниях *1* и *3*. Таким образом, pV-диаграмма цикла имеет вид, изображенный на рисунке. Работа газа за один цикл $A=\frac{1}{2}2p_0V_0\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{p_0V_0}{2}$. Газ получает теплоту на участке *2–3*, а отдает теплоту на участках *3–1* и *1–2*. Следовательно, полученное от нагревателя количество теплоты $Q_н=\frac{3}{2}\nu R(T_3-T_2)+\frac{1}{2}4p_0V_0\left(1-\frac{1}{2}\right)$. Учитывая, что согласно уравнению Менделеева–Клапейрона, $\nu RT_2=p_0\frac{V_0}{2}$, $\nu RT_3=3p_0V_0$, находим, что $Q_н=\frac{19p_0V_0}{4}$. КПД цикла равен $\eta=\frac{A}{Q_н}=\frac{2}{19}$. **Ответ:** $\eta=\frac{2}{19}\cdot100\%\approx10{,}5\%$.



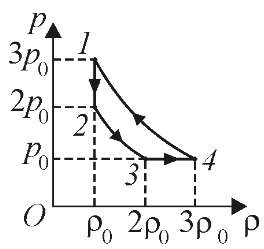
17.II.4. Задача. Идеальный одноатомный газ совершает в тепловом двигателе цикл *1–2–3–1*, в котором давление p газа изменяется с изменением его плотности ρ так, как показано на рисунке, причём график процесса *1–2* представляет собой участок гиперболы, описываемой уравнением $p = b + \frac{k}{\rho}$. Определите коэффициент полезного действия (КПД) цикла η. Ответ приведите в процентах, округлив до одного знака после запятой.



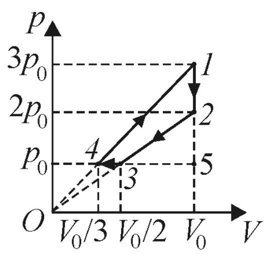
17.II.4. Решение. Согласно условию, на участке *1–2* зависимость давления газа от его плотности описывается законом вида $p = b + \frac{k}{\rho}$. Из системы уравнений $p_0 = b + \frac{k}{2\rho_0}$, $3p_0 = b + \frac{k}{\rho_0}$ находим, что $b = -p_0$, $k = 4p_0\rho_0$ и $p = p_0\left(-1 + 4\frac{\rho_0}{\rho}\right)$, или $p = p_0\left(-1 + 4\frac{V}{V_0}\right)$, где V_0 – объем газа в состоянии *1*. Таким образом, pV-диаграмма цикла имеет вид, изображенный на рисунке. Работа газа за один цикл $A = \frac{1}{2}2p_0V_0\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{p_0V_0}{2}$. Газ получает теплоту на участках *2–3* и *3–1*, а отдает теплоту на участке *1–2*. Следовательно, полученное от нагревателя количество теплоты $Q_н = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + \frac{5}{2}\nu R(T_1 - T_3)$. Учитывая, что согласно уравнению Менделеева–Клапейрона, $\nu RT_1 = 3p_0V_0$, $\nu RT_2 = p_0\frac{V_0}{2}$, $\nu RT_3 = 3p_0\frac{V_0}{2}$, находим, что $Q_н = \frac{21p_0V_0}{4}$. КПД цикла равен $\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{2}{21}$. **Ответ:** $\eta = \frac{2}{21} \cdot 100\% \approx 9{,}5\%$.



17.II.5. Задача. Идеальный одноатомный газ совершает в тепловом двигателе цикл *1–2–3–4–1*, в котором давление p газа изменяется с изменением его плотности ρ так, как показано на рисунке, причём графики процессов *2–3* и *4–1* представляют собой участки гипербол. Определите коэффициент полезного действия (КПД) цикла η. Ответ приведите в процентах, округлив до одного знака после запятой.



17.II.5. Решение. Согласно условию, на участке *2–3* зависимость давления газа от его плотности описывается законом вида $p = \frac{k}{\rho}$. Из уравнения $2p_0 = \frac{k}{\rho_0}$ находим, что $k = 2p_0\rho_0$ и $p = 2p_0\frac{\rho_0}{\rho}$, или $p = 2p_0\frac{V}{V_0}$, где V_0 – объем газа в состояниях *1* и *2*. Рассуждая аналогично, находим, что на участке *4–1* давление



зависит от объема по закону $p = 3p_0 \frac{V}{V_0}$. Таким образом, *pV*-диаграмма цикла имеет вид, изображенный на рисунке. Работу газа за один цикл, численно равную площади S_{1234} фигуры *1–2–3–4*, удобно рассчитать по формуле $A = S_{154} - S_{253} = \frac{1}{2} 2p_0 \left(1 - \frac{1}{3}\right) V_0 - \frac{1}{2} p_0 \left(1 - \frac{1}{2}\right) V_0 = \frac{5p_0V_0}{12}$. Газ получает теплоту на участке *4–1* и отдает теплоту на участках *1–2*, *2–3* и *3–4*. Следовательно, полученное от нагревателя количество теплоты $Q_н = \frac{3}{2} \nu R(T_1 - T_4) + \frac{1}{2} 4p_0 \left(1 - \frac{1}{3}\right) V_0$. Учитывая, что согласно уравнению Менделеева–Клапейрона $\nu RT_1 = 3p_0V_0$, $\nu RT_4 = p_0 \frac{V_0}{3}$, находим, что $Q_н = \frac{16p_0V_0}{3}$. КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{5}{64}$. **Ответ:** $\eta = \frac{5}{64} \cdot 100\% \approx 7{,}8\%$.

17.III. Электродинамика

17.III.1. Задача. Заряженная частица массой $m = 1$ мг находится в вакууме в электрическом поле неподвижного равномерно заряженного шара. Частицу удерживают в состоянии покоя на некотором расстоянии от центра шара, действуя на нее силой $F = 1$ мН. Затем частицу отпускают, и она начинает двигаться. Пройдя от исходного положения расстояние $s = 1$ м, частица приобретает скорость $v = 1$ м/с. Каково ускорение a частицы в этот момент времени? Частица и шар заряжены одноименно.

17.III.1. Решение. Пусть q – заряд частицы, Q – заряд шара, r – начальное расстояние между частицей и центром шара. По закону Кулона $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2}$, где ε_0 – электрическая постоянная. Учитывая, что потенциальная энергия электростатического отталкивания зарядов q и Q, находящихся на расстоянии x друг от друга, равна $\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 x}$, по закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r+s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQs}{r(r+s)} = F\frac{sr}{r+s}.$$

По второму закону Ньютона $ma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{(r+s)^2} = F\left(\frac{r}{r+s}\right)^2$. Объединяя записанные выражения, получаем, что $a = \frac{mv^4}{4Fs^2}$. **Ответ:** $a = \frac{mv^4}{4Fs^2} = 0{,}25$ м/с^2.

17.III.2. Задача. Заряженную частицу массой $m = 1$ мг удерживают в состоянии покоя на в вакууме некотором расстоянии от центра неподвижного равномерно заряженного шара, действуя на нее силой $F = 1$ мН. Когда частицу отпускают, она, пройдя от исходного положения расстояние $s = 1$ м, движется с ускорением

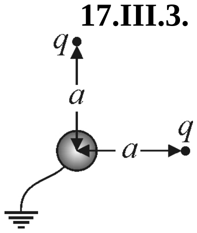
$a = 0{,}25$ м/с^2. Какова скорость v частицы в этот момент времени? Частица и шар заряжены одноименно.

17.III.2. Решение. Пусть q – заряд частицы, Q – заряд шара, r – начальное расстояние между частицей и центром шара. По закону Кулона $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2}$, где ε_0 – электрическая постоянная. Учитывая, что потенциальная энергия электростатического отталкивания зарядов q и Q, находящихся на расстоянии x друг от друга, равна $\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 x}$, по закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r+s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQs}{r(r+s)} = F\frac{sr}{r+s}.$$

По второму закону Ньютона $ma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{(r+s)^2} = F\left(\frac{r}{r+s}\right)^2$. Объединяя записанные выражения, получаем, что $v = \sqrt[4]{\frac{4aFs^2}{m}}$. **Ответ:** $v = \sqrt[4]{\frac{4aFs^2}{m}} = 1$ м/с.

17.III.3. Задача. Два одинаковых точечных заряда $q = 10^{-7}$ Кл находятся на расстояниях $a = 1$ м от центра заземлённой проводящей сферы радиуса $R = 5$ см (рисунок). Отрезки, проведённые из центра сферы к зарядам, взаимно перпендикулярны. Расстояния от зарядов и сферы до окружающих тел достаточно велики. Определите модуль F силы, с которой заряды действуют на сферу. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



17.III.3. Решение. Потенциал изолированной незаряженной сферы, центр которой находится на расстоянии a от точечного заряда q, равен $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Поскольку сфера заземлена и находится в поле двух зарядов, то справедливо равенство $\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0$. Отсюда следует, что заряд Q, индуцированный на поверхности сферы, равен $Q = -\frac{2qR}{a}$. Учитывая, что $R \ll a$, можно считать, что этот заряд эквивалентен точечному заряду Q, находящемуся в центре сферы. Следовательно, модуль искомой силы $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$, где, в соответствии с законом Кулона, $F_1 = F_2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$. Из записанных выражений получаем, что $F = \frac{q^2 R\sqrt{2}}{2\pi\varepsilon_0 a^3}$.

Ответ: $F = \frac{q^2 R\sqrt{2}}{2\pi\varepsilon_0 a^3} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ Н.

17.III.4. Задача. Резистор сопротивлением $R = 8$ Ом подключен к источнику постоянного тока с внутренним сопротивлением $r = 4$ Ом. Резистор с каким сопротивлением R_x надо подсоединить параллельно резистору R, чтобы мощность, выделяющаяся во внешней цепи, не изменилась?

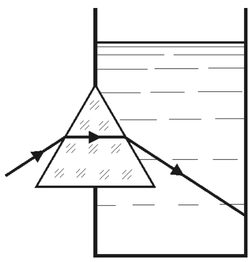
17.III.4. Решение. Условие равенства мощностей, выделяющихся во внешней цепи при разных сопротивлениях нагрузки R_1 и R_2, можно записать в виде $N = \frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 R_2}{(R_2 + r)^2}$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС источника. Из этого равенства находим, что $r = \sqrt{R_1 R_2}$. Следовательно: $\sqrt{\frac{R_x R^2}{R_x + R}} = r$ и $R_x = \frac{Rr^2}{R^2 - r^2}$. **Ответ:** $R_x = \frac{Rr^2}{R^2 - r^2} \approx 2{,}7$ Ом.

17.III.5. Задача. При поочередном подключении резисторов с сопротивлениями R_1 = 9 Ом и R_2 = 4 Ом к источнику постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 10 В во внешней цепи выделяется одинаковая мощность. Определите величину этой мощности N.

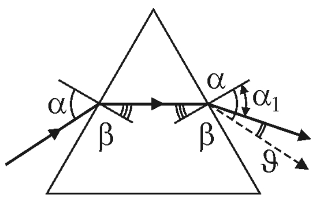
III.5. Решение. Условие равенства мощностей, выделяющихся во внешней цепи при разных сопротивлениях нагрузки R_1 и R_2, можно записать в виде $N = \frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 R_2}{(R_2 + r)^2}$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС источника. Отсюда следует, что $r = \sqrt{R_1 R_2}$, а выделяющаяся мощность равна $N = \frac{\mathcal{E}^2}{\left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right)^2}$. **Ответ:** $N = \frac{\mathcal{E}^2}{\left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right)^2} = 4$ Вт.

17.IV. Оптика

17.IV.1. Задача. Стеклянная призма, поперечное сечение которой представляет собой равносторонний треугольник, плотно заделана в отверстие в вертикальной стенке аквариума (см. рисунок). На боковую грань призмы пускают световой луч так, что внутри призмы он распространяется параллельно ее основанию. Первоначально пустой аквариум заполняют водой. На какой угол ϑ повернется при этом луч, идущий в аквариуме? Показатель преломления призмы $n_{пр} = 1{,}41$, показатель преломления воды $n_в = 1{,}33$. Ответ приведите в градусах, округлив до целых.

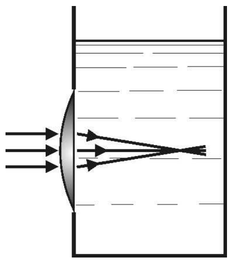


17.IV.1. Решение. Ход лучей изображен на рисунке. Штриховой линией справа от призмы показан луч, выходящий из призмы в воздух, а сплошной линией – тот же луч, выходящий из призмы в воду. По закону преломления имеем: на границе «стекло – воздух» $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{пр}$, а на границе «стекло – вода» $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta} = \frac{n_{пр}}{n_в}$. Отсюда



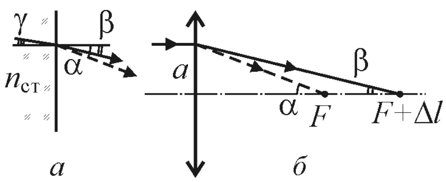
$\alpha = \arcsin(n_{\text{пр}} \sin\beta)$, $\alpha_1 = \arcsin\left(\dfrac{n_{\text{пр}}}{n_{\text{в}}} \sin\beta\right)$, причем $\beta = 30°$ и $\sin\beta = \dfrac{1}{2}$. Искомый угол, на который повернется луч, $\vartheta = \alpha - \alpha_1$. **Ответ:** $\vartheta = \arcsin\left(\dfrac{n_{\text{пр}}}{2}\right) - \arcsin\left(\dfrac{n_{\text{пр}}}{2n_{\text{в}}}\right) \approx 13°$.

17.IV.2. Задача. В отверстие в вертикальной стенке аквариума плотно заделана



тонкая плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см (см. рисунок). На выпуклую поверхность линзы падает параллельно ее главной оптической оси узкий пучок света, который фокусируется внутри первоначально пустого аквариума. Если аквариум заполнить некоторой жидкостью, то точка, в которой фокусируются лучи, сместится на расстояние $\Delta l = 4$ см. Определите показатель преломления жидкости n. Углы падения и преломления лучей считайте малыми. Учтите, что для малых значений арумента x, заданного в радианах, справедлтвы приближенные формулы $\sin x \approx \text{tg}\, x \approx x$.

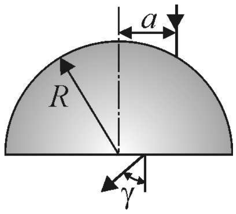
17.IV.2. Решение. На рисунке *а* показан ход лучей, преломляющихся на плоской



поверхности, ограничивающей линзу. Пусть один из лучей, идущих в толще линзы, падает на эту поверхность под углом γ. Тогда в случае выхода луча из линзы в воздух (штриховая линия на рисунке *а*) по закону преломления имеем $n_{\text{ст}} \sin\gamma = \sin\alpha$, а в случае выхода луча из линзы в жидкость (сплошная линия на рисунке *а*) имеем $n_{\text{ст}} \sin\gamma = n \sin\beta$. Здесь $n_{\text{ст}}$ – показатель преломления стекла. Из этих равенств получаем, что $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Ход лучей, покинувших линзу, изображен на рисунке *б*. Видно, что $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{F}$, $\text{tg}\,\beta = \dfrac{a}{F + \Delta l}$. Поскольку падающий на линзу пучок света по условию является узким, то $\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$. Следовательно, справедливы приближенные равенства $\alpha \approx \dfrac{a}{F}$, $\beta \approx \dfrac{a}{F + \Delta l}$, $\dfrac{\alpha}{\beta} \approx n$. Отсюда находим, что $n = 1 + \dfrac{\Delta l}{F}$.

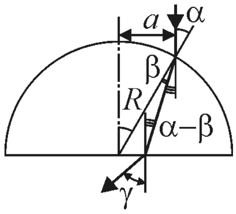
Ответ: $n = 1 + \dfrac{\Delta l}{F} = 1{,}2$.

17.IV.3. Задача. На сферическую поверхность прозрачного полушара радиуса



$R = 10$ см с показателем преломления $n = 1{,}5$ падает луч света, параллельный оси, перпендикулярной основанию полушара и проходящей через его центр (см. рисунок). Точка падения луча находится на расстоянии a = 1 см от этой оси. Какой угол γ образует луч, вышедший из полушара, с нормалью к его основанию? При расчетах учтите, что $a \ll R$, а для малых значений аргумента x, заданного в радианах, справедливо приближенное равенство $\sin x \approx x$.

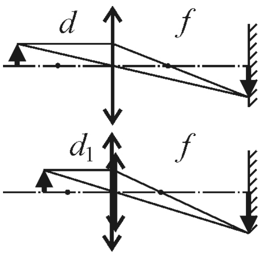
17.IV.3. Решение. Ход луча изображен на рисунке, где α − угол падения луча на сферическую поверхность полушара, а β − угол преломления на этой поверхности. По



закону преломления $\sin\beta = \frac{1}{n}\sin\alpha$, или приближенно $\beta \approx \frac{\alpha}{n}$. Поскольку $\alpha \approx \frac{a}{R}$, то $\beta \approx \frac{a}{nR}$. Из рисунка видно, что угол падения луча на плоскую поверхность полушара равен $\alpha - \beta \approx \frac{a}{R}\cdot\frac{n-1}{n}$. Поэтому по закону преломления на этой поверхности $\gamma \approx n(\alpha-\beta)$. Следовательно, искомый угол $\gamma \approx \frac{a}{R}(n-1)$. **Ответ:** $\gamma \approx \frac{a}{R}(n-1) = 0{,}05$ рад.

17.IV.4. Задача. На расстоянии $f = 15$ м от объектива проекционного аппарата расположен экран с размерами 2×3 м. На экране получено четкое изображение диапозитива, имеющего размеры 24×36 мм. При этом изображение занимает половину площади экрана. Рассчитайте оптическую силу D тонкой линзы, которую следует вплотную приставить к объективу проекционного аппарата, не меняя его положения, чтобы четкое изображение точно уложилось в размеры экрана. Объектив проекционного аппарата считайте тонкой линзой. Ответ приведите в диоптриях, округлив до одного знака после запятой

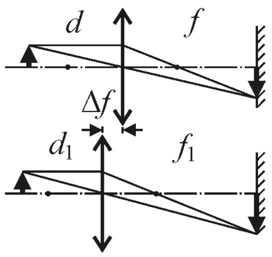
17.IV.4. Решение. По условию взаимное расположение объектива и экрана не



изменяется, а формирование резкого изображения на экране достигается в результате изменения расстояния от диапозитива до объектива (см. рисунок). Как известно, линейное увеличение Г, даваемое линзой, может быть рассчитано по формуле $\Gamma = \frac{f}{d}$, где d – расстояние от диапозитива до линзы (объектива), а f – расстояние от линзы до экрана, которое не изменяется. Из формулы тонкой линзы следует, что оптическая сила линзы $D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f}(\Gamma+1)$. При сдвинутых вплотную тонких линзах их оптические силы складываются. Обозначив через D_0 оптическую силу объектива диапроектора, а через D – оптическую силу добавочной линзы, имеем: $D_0 = \frac{1}{f}(\Gamma_0+1)$, $D + D_0 = \frac{1}{f}(\Gamma+1)$, откуда $D = \frac{1}{f}(\Gamma-\Gamma_0)$. Учитывая, что конечное увеличение $\Gamma = \frac{2000}{24} = \frac{3000}{36} \approx 83{,}3$, а начальное $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$, находим, что $D \approx 1{,}6$ дптр.

Ответ: $D = \frac{1}{f}(\Gamma-\Gamma_0) \approx 1{,}6$ дптр, где $\Gamma = \frac{2000}{24} \approx 83{,}3$; $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$.

17.IV.5. Задача. На расстоянии $f = 10$ м от объектива проекционного аппарата расположен экран с размерами 2×3 м. На экране получено четкое изображение диапозитива, имеющего размеры 24×36 мм. При этом изображение занимает половину площади экрана. На какое расстояние Δf следует переместить проекционный аппарат, чтобы чёткое изображение заняло всю площадь экрана? Объектив проекционного аппарата считайте тонкой линзой.



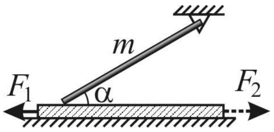
IV.5. Решение. Линейное увеличение, даваемое линзой, $\Gamma = \dfrac{f}{d}$, откуда $d = \dfrac{\Gamma}{f}$. Здесь d – расстояние от диапозитива до линзы, а f – расстояние от линзы до экрана. Из формулы тонкой линзы оптическая сила линзы $D = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{f}(\Gamma + 1)$. По условию, оптическая сила остается неизменной, но изменяется расстояние между линзой и экраном. Поэтому $\dfrac{1}{f_1}(\Gamma_1 + 1) = \dfrac{1}{f_2}(\Gamma_2 + 1)$. Диапроектор следует удалить от экрана на расстояние $\Delta f = f_2 - f_1 = f_1 \cdot \dfrac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_1 + 1}$. Конечное увеличение равно $\Gamma_2 = \dfrac{2000}{24} = \dfrac{3000}{32} = 83{,}3$, начальное увеличение $\Gamma_1 = \dfrac{\Gamma_2}{\sqrt{2}} = 58{,}8$.

Ответ: $\Delta f = f_1 \cdot \dfrac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_1 + 1} \approx 4$ м, где $\Gamma_2 = \dfrac{2000}{24} \approx 83{,}3$; $\Gamma_1 = \dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$.

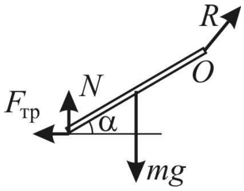
2018 год

18.I. Механика

18.I.1. Задача. Тяжелый однородный тонкий стержень, одним концом шарнирно прикрепленный к неподвижной опоре, другим концом опирается на доску, лежащую на гладком горизонтальном столе, причем угол между доской и стержнем $\alpha = 30^{\circ}$ (см. рисунок). Если к доске приложить горизонтальную силу, по модулю равную $F_1 = 1$ Н и направленную вдоль доски влево, она будет двигаться в ту же сторону с постоянной скоростью. С какой по модулю силой F_2 можно привести доску в равномерное движение в противоположном направлении? Коэффициент трения между стержнем и доской $\mu = 0{,}3$. Трением доски о поверхность стола можно пренебречь.



18.I.1. Решение. При движении доски влево на стержень действуют силы, модули и направления которых указаны на рисунке, где N − модуль нормальной составляющей силы реакции доски, $F_{тр} = \mu N$ − модуль силы трения скольжения, mg − модуль силы тяжести (m − масса стержня), R − модуль силы реакции шарнира. Пусть l − длина стержня. Уравнение моментов, записанное относительно оси, проходящей через точку подвеса стержня (точку O), имеет вид: $mg\dfrac{l}{2}\cos\alpha = Nl\cos\alpha + \mu Nl\sin\alpha$. Отсюда $N = \dfrac{mg}{2(1+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}$. Поскольку доска движется влево равномерно, то $F_1 = F_{тр} = \mu N = \dfrac{\mu mg}{2(1+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}$. При движении доски вправо сила трения изменит направление на противоположное. Рассуждая аналогично, находим, что $F_2 = \dfrac{\mu mg}{2(1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}$. По условию задачи $\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}3\cdot\mathrm{tg}\,30^{\circ} \approx 0{,}17 < 1$, поэтому $F_2 = F_1\dfrac{1+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. **Ответ:** $F_2 = F_1\dfrac{1+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha} \approx 1{,}42$ Н.



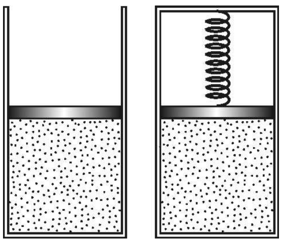
18.I.2. Задача. Трасса для соревнований по бобслею имеет перепад высот от старта до финиша $h = 107$ м. На стартовом горизонтальном участке («полоса разгона») спортсмены разогнали боб до скорости $v_0 = 6$ м/с, с которой пересекли линию старта. В конце спуска по ледяному жёлобу сразу после финиша спортсмены используют специальное тормозное устройство для гашения скорости боба на горизонтальной поверхности. Тормозной путь боба составил при этом $s = 42$ м. Считая, что коэффициент трения увеличивается на этом участке пропорционально расстоянию x от линии финиша: $\mu(x) = \alpha\cdot x$ ($\alpha = 0{,}1$ м$^{-1}$), определите, какая часть η всей механической энергии боба была потеряна за счёт сил трения на участке трассы от конца полосы разгона до финиша. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

18.I.2. Решение. Работа силы трения на этапе торможения боба равна $A_{\text{тр}} = -\frac{1}{2}\alpha s^2 mg$. Поэтому, по закону сохранения и превращения механической энергии $\left(\frac{mv_0^2}{2} + mgh\right)(1-\eta) - \frac{1}{2}\alpha s^2 mg = 0$. Отсюда находим, что $\eta = 1 - \frac{\alpha \cdot s^2 g}{v_0^2 + 2gh} = 0{,}2$.

Ответ: $\eta = 1 - \frac{\alpha \cdot s^2 g}{v_0^2 + 2gh} = 0{,}2$, или 20%.

18.II. Молекулярная физика и термодинамика

18.II.1. Задача. В двух достаточно высоких цилиндрических сосудах, расположенных вертикально, содержится по одному молю идеального одноатомного газа при одной и той же температуре. В левом сосуде, открытом сверху, газ сжат тяжелым поршнем и атмосферным давлением. В правом, герметично закрытом сосуде, газ находится под невесомым тонким поршнем, который удерживается в равновесии пружиной, помещенной между поршнем и крышкой сосуда. При этом длина недеформированной пружины равна высоте сосуда. В пространстве над поршнем создан вакуум. Оба сосуда нагревают до одной и той же конечной температуры. Найдите отношение n работы, совершенной газом в левом сосуде, к работе, совершенной газом в правом сосуде. Трением при перемещении поршней можно пренебречь.



18.II.1. Решение. Нагревание газа в левом сосуде происходит при постоянном давлении. Совершаемая газом в этом процессе работа $A_{\text{лев}} = \nu R\Delta T$. Здесь ν – количество газа, R – универсальная газовая постоянная, ΔT – приращение температуры газа. Поскольку сжатие пружины x в правом сосуде совпадает с высотой поршня над дном сосуда, то давление газа в правом сосуде $p = kx/S$ пропорционально его объему ($p \sim V$). При этом прямая, изображающая график процесса на pV–диаграмме, проходит через начало координат. Если обозначить через p_0, V_0 и T_0 начальные, а через p, V и T – конечные давление, объем и температуру газа, то $\frac{p}{V} = \frac{p_0}{V_0}$, и работа газа $A_{\text{прав}} = \frac{1}{2}(p - p_0)(V - V_0) = \frac{1}{2}(pV - p_0V_0) = \frac{1}{2}\nu R(T - T_0) = \frac{1}{2}\nu R\Delta T$. Таким образом, бóльшую работу при нагревании совершит газ в левом сосуде. Отношение работ, совершенных газами, $n = \frac{A_{\text{лев}}}{A_{\text{прав}}} = 2$. **Ответ:** $n = 2$.

18.II.2. Задача. Плотность влажного воздуха при температуре $t_0 = 27\ ^\circ\text{C}$ и давлении $p_0 = 10^5$ Па равна $\rho = 1{,}15$ кг/м^3. Чему равна относительная влажность φ этого воздуха, если плотность насыщенного водяного пара при температуре t_0 равна $\rho_0 = 25{,}8$ г/м^3? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), молярная масса сухого воздуха $M_1 = 29$ г/моль, молярная масса воды $M_2 = 18$ г/моль. Ответ приведите в процентах, округлив до целых.

18.II.2. Решение. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона плотность идеального газа $\rho_{\text{иг}}$ выражается через его давление p, молярную массу M и абсолютную температуру T по формуле $\rho_{\text{иг}} = \dfrac{pM}{RT}$. По закону Дальтона давление влажного воздуха p_0 равно сумме парциальных давлений сухого воздуха $p_{\text{св}}$ и водяного пара $p_{\text{п}}$. Поэтому плотность влажного воздуха может быть записана в виде $\rho = \dfrac{p_{\text{св}}M_1 + p_{\text{п}}M_2}{RT} = \dfrac{(p_0 - p_{\text{п}})M_1 + p_{\text{п}}M_2}{RT}$. Из последнего выражения находим, что $p_{\text{п}} = \dfrac{p_0M_1 - \rho RT}{M_1 - M_2}$. Учитывая, что относительная влажность воздуха по определению равна $\varphi = \dfrac{p_{\text{п}}}{p_{\text{н}}}$, а давление насыщенного пара $p_{\text{н}} = \dfrac{\rho_0 RT}{M_2}$, получаем, что $\varphi = \dfrac{(p_0M_1 - \rho RT)M_2}{(M_1 - M_2)\rho_0 RT}$. **Ответ:** $\varphi = \dfrac{(p_0M_1 - \rho RT)M_2}{(M_1 - M_2)\rho_0 RT} \cdot 100\% \approx 84\%$.

18.III. Электродинамика

18.III.1. Задача. Плоский конденсатор ёмкостью $C = 400$ пФ присоединён к источнику постоянного напряжения $U = 2$ кВ. Не отключая конденсатор от источника, его пластины медленно раздвинули так, что расстояние между ними увеличилось в $n = 4$ раза. Определите работу $A_{\text{мех}}$, совершенную силами, раздвигавшими пластины конденсатора.

18.III.1. Решение. До начала раздвигания пластин энергия конденсатора была равна $W_{\text{н}} = \dfrac{CU^2}{2}$. После раздвигания пластин ёмкость конденсатора уменьшилась в n раз, а его энергия стала равной $W_{\text{к}} = \dfrac{CU^2}{2n}$. При этом через источник протёк заряд $\Delta q = \left(\dfrac{1}{n} - 1\right)CU$. Следовательно, работа сторонних сил источника за время раздвигания пластин равна $A_{\text{ист}} = U\Delta q = \left(\dfrac{1}{n} - 1\right)CU^2$. Согласно закону изменения энергии справедливо равенство $W_{\text{н}} + A_{\text{мех}} + A_{\text{ист}} = W_{\text{к}}$. Отсюда $A_{\text{мех}} = W_{\text{к}} - W_{\text{н}} - A_{\text{ист}}$. Окончательно получаем, что $A_{\text{мех}} = \dfrac{CU^2}{2}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.

Ответ: $A_{\text{мех}} = \dfrac{CU^2}{2}\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = 0{,}6$ мДж.

18.III.2. Задача. Разность потенциалов между обкладками конденсатора ёмкостью C_1 = 1 мкФ равна V_1 = 20 В. Второй конденсатор ёмкостью C_2 = 3 мкФ заряжен до разности потенциалов между обкладками V_2 = 10 В. Разноименно заряженные пластины этих конденсаторов соединили проводниками. Определите, во сколько раз k при этом изменилась общая энергия конденсаторов.

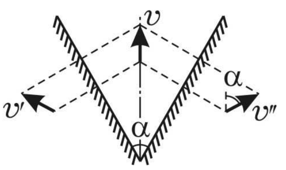
18.III.2. Решение. Начальная энергия двух заряженных конденсаторов $W_0 = \frac{C_1V_1^2}{2} + \frac{C_2V_2^2}{2}$. После соединения разноименно заряженных обкладок суммарный заряд на них станет $q = |C_2V_2 - C_1V_1|$. Поскольку конденсаторы соединили параллельно, их полная энергия после перезарядки будет $W_1 = \frac{q^2}{2(C_1 + C_2)}$. Искомое отношение энергий $k = \frac{W_1}{W_0} = \frac{(C_2V_2 - C_1V_1)^2}{(C_1 + C_2)(C_1V_1^2 + C_2V_2^2)}$.

Ответ: $k = \frac{(C_2V_2 - C_1V_1)^2}{(C_1 + C_2)(C_1V_1^2 + C_2V_2^2)} = \frac{1}{28}$.

18.IV. Оптика

18.IV.1. Задача. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha = 60°$. Вдоль биссектрисы этого угла равномерно движется светящаяся точка со скоростью v = 2 см/с. Через какой промежуток времени Δt расстояние между первыми изображениями точки в зеркалах изменится на величину $\Delta x = 12$ см?

18.IV.1. Решение. Скорость движущейся точки отражается в плоском зеркале так же, как любой объект. Поэтому скорости изображений точек в зеркалах имеют одинаковую величину, а их направления образуют угол $2\alpha = 120°$ (см. рисунок). Как легко видеть на том же рисунке, скорость взаимного сближения (или удаления) изображений $U = 2v\sin\alpha$. Из законов кинематики равномерного прямолинейного движения следует, что $\Delta t = \frac{\Delta x}{U}$. Таким образом, $\Delta t = \frac{\Delta x}{2v\sin\alpha}$.



Ответ: $\Delta t = \frac{\Delta x}{2v\sin\alpha} \approx 3{,}5$ с.

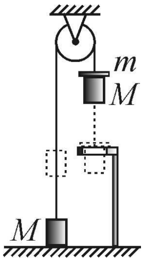
18.IV.2. Задача. На горизонтальном дне широкого сосуда лежит достаточно большое плоское зеркало. В сосуд наливают жидкость с показателем преломления n = 1,5, и кладут на верхнюю поверхность жидкости непрозрачный экран, закрывающий ее поверхность полностью. В центре экрана находится маленькое круглое отверстие, освещаемое рассеянным светом. Какова площадь S освещенной области на нижней стороне экрана, если толщина слоя жидкости равна h = 10 см? Ответ приведите в квадратных сантиметрах, округлив до целых.

18.IV.2. Решение. Наибольший угол преломления на поверхности жидкости будет у лучей света, падающих по касательной к поверхности. Поэтому в толще жидкости образуется расходящийся конус лучей света, ограниченный предельным углом, для которого $\sin\alpha = \frac{1}{n}$. При отражении от зеркала на дне угол раствора конуса не изменяется, поэтому радиус освещенной области на нижней поверхности экрана равен $R = 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}}$. **Ответ:** $S = \frac{4\pi h^2}{n^2 - 1} \approx 1005$ см^2.

2019 год

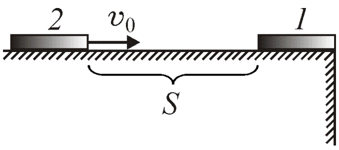
19.I. Механика

19.I.1. Задача. Два одинаковых груза массами M = 1 кг каждый соединены между собой легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через невесомый блок, причем правый груз находится выше левого. На правый груз осторожно положили перегрузок в виде диска с прорезью, выступающего за края груза, после чего система грузов пришла в движение. Переместившись вниз на некоторое расстояние, правый груз встретил ограничитель в виде горизонтально закрепленного кольца, сквозь которое груз прошел беспрепятственно, а перегрузок был удержан кольцом. На какую величину ΔT изменится сила натяжения нити после прохождения правым грузом кольца ограничителя, если масса перегрузка $m = 250$ г? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



19.I.1. Решение. Уравнения движения грузов на начальном этапе имеют вид: $Ma = T - Mg$ (для левого груза), $(M+m)a = (M+m)g - T$ (для правого груза с перегрузком). Отсюда натяжение нити при ускоренном движении системы $T_1 = \dfrac{2M(M+m)}{2M+m}g$. При равномерном движении системы, когда перегрузок удален с правого груза, натяжение нити равно $T_2 = Mg$. Искомая величина $\Delta T = T_2 - T_1 = -\dfrac{Mmg}{2M+m}$. **Ответ:** $\Delta T = -\dfrac{Mmg}{2M+m} \approx -1{,}11$ Н.

19.I.2. Задача. На краю стола лежит шайба *1* радиуса R = 10 см. Такая же шайба *2* находится на расстоянии S = 15 см от первой шайбы (см. рисунок). Какую минимальную скорость v_0 надо ударом сообщить второй шайбе в направлении первой, чтобы та упала со стола? Коэффициент трения шайб о поверхность стола равен μ = 0,2. Соударение шайб считайте центральным и абсолютно упругим. Центры шайб расположены на одном перпендикуляре к краю стола. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.



19.I.2. Решение. Скорость налетающей шайбы непосредственно перед ударом можно определить из закона сохранения энергии, а именно $\dfrac{mv_0^2}{2} - \mu mgS = \dfrac{mv_1^2}{2}$. Здесь учтено, что работа силы трения скольжения μmg до удара отрицательна. Из законов сохранения импульса и механической энергии при абсолютно упругом центральном ударе одинаковых шайб следует, что шайбы «обмениваются скоростями». Таким образом, v_1 будет начальной скоростью движения шайбы, лежавшей на краю стола. Эта шайба упадёт, если после удара сместится на расстояние R. Поэтому v_1 должна быть больше значения, которое можно найти из равенства $\dfrac{mv_1^2}{2} - \mu mgR = 0$. Используя записанные уравнения, приходим к выводу, что искомая скорость должна удовлетворять неравеству $v \geq \sqrt{2\mu g(S+R)}$.

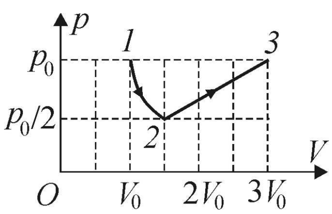
Ответ: $v_{\min} = \sqrt{2\mu g(S+R)}$ = 1 м/с.

19.II. Молекулярная физика и термодинамика

19.II.1. Задача. В два одинаковых цилиндрических сообщающихся сосуда, герметично закрытых крышками, налита жидкость плотностью $\rho = 10^3$ кг/м^3. Сверху над жидкостью находится идеальный газ. Расстояние между уровнем жидкости и крышками сосудов равно $h = 50$ см. В начальном состоянии температура и давление газа в обоих сосудах были одинаковыми и соответственно равными $T_0 = 300$ К и $p_0 = 10^3$ Па. Определите, до какой температуры T надо нагреть газ в правом сосуде, чтобы в левом сосуде жидкость поднялась на высоту $\Delta h = 1$ см, если температуру газа в левом сосуде поддерживать равной T_0. Давлением паров жидкости, тепловым расширением жидкости и сосудов можно пренебречь. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

19.II.1. Решение. После того, как в правом сосуде из-за нагревания газа его объём увеличится, жидкость в правом сосуде опустится на Δh и (с учётом одинаковых площадей сосудов) на столько же поднимется в левом сосуде. Разность давлений газа в этих сосудах станет равной $p_2 - p_1 = 2\rho g\Delta h$. Поскольку температура в левом сосуде остаётся постоянной, то согласно закону Бойля-Мариотта, $p_0 h = p_1(h-\Delta h)$, откуда $p_1 = \dfrac{p_0 h}{h-\Delta h}$. Для правого сосуда, используя объединенный газовый закон, получим, что $\dfrac{p_0 h}{T_0} = \dfrac{p_2(h+\Delta h)}{T}$, откуда $p_2 = \dfrac{p_0 hT}{(h+\Delta h)T_0}$. Следовательно, справедливо равенство $\dfrac{p_0 hT}{(h+\Delta h)T_0} - \dfrac{p_0 h}{h-\Delta h} = 2\rho g\Delta h$. Отсюда находим, что $T = T_0\dfrac{(h+\Delta h)}{p_0 h}\left(2\rho g\Delta h + \dfrac{p_0 h}{h-\Delta h}\right)$.

Ответ: $T = T_0\dfrac{(h+\Delta h)}{p_0 h}\left(2\rho g\Delta h + \dfrac{p_0 h}{h-\Delta h}\right) \approx 373$ К.



19.II.2. Задача. Над некоторым количеством идеального одноатомного газа осуществляют процесс, представленный на графике, где участок *1 – 2* – адиабатное расширение. Найдите отношение η работы, совершенной газом, к количеству теплоты, полученному газом от нагревателя.

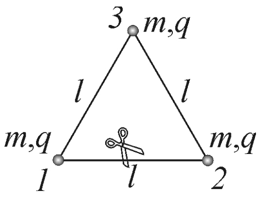
19.II.2. Решение. Работа A газа равна сумме работ $A_{12} + A_{23}$. На этапе адиабатного расширения ($Q = 0$) работа равна $A_{12} = -\Delta U_{12} = -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{p_0}{2}\cdot\dfrac{3}{2}V_0 - p_0V_0\right) = \dfrac{3}{8}p_0V_0$. На втором этапе работа вычисляется как площадь под графиком зависимости $p(V)$, т.е. $A_{23} = \dfrac{1}{2}\left(p_0 + \dfrac{p_0}{2}\right)\cdot\dfrac{3}{2}V_0 = \dfrac{9}{8}p_0V_0$. Таким образом, полная работа газа равна $A = \dfrac{3}{2}p_0V_0$. Теплоту газ получает только на этапе увеличения давления. Она равна сумме приращения внутренней энергии и работы, совершенной газом, т.е.

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2}\left(p_0 \cdot 3V_0 - \frac{p_0}{2} \cdot \frac{3}{2} V_0 \right) + \frac{9}{8} p_0 V_0 = \frac{9}{2} p_0 V_0 .$$

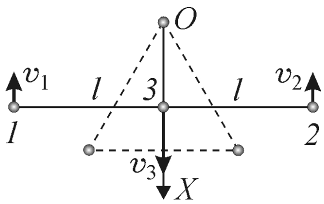
Искомое отношение равно $\eta = \frac{3 p_0 V_0 / 2}{9 p_0 V_0 / 2} = \frac{1}{3}$. **Ответ:** $\eta = \frac{1}{3}$.

19.III. Электродинамика

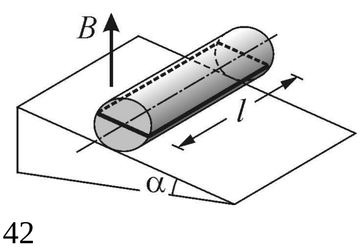
19.III.1. Задача. Три одинаковых маленьких шарика массой m = 10 г каждый, несущие заряды $q = 10^{-8}$ Кл, связаны тремя непроводящими нитями длиной l = 5 см каждая и располагаются на гладком непроводящем горизонтальном столе, образуя правильный треугольник (см. рисунок). Нить, соединяющую шарики *1* и *2*, перерезают и шарики приходят в движение. Пренебрегая поляризацией поверхности стола, найдите максимальную скорость υ_3 шарика *3*. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



19.III.1. Решение. Поскольку силы взаимодействия между шариками являются внутренними и консервативными, в системе из трех шариков сохраняется импульс и полная механическая энергия. В проекции на ось *OX* закон сохранения импульса дает равенство $m\upsilon_3 - m\upsilon_1 - m\upsilon_2 = 0$. Так как массы шариков одинаковы, из закона сохранения импульса и из соображений симметрии следует, что $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \frac{\upsilon_3}{2}$. Используя формулу для потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии x друг от друга, а именно, $W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 x}$, находим потенциальную энергию системы в начальном состоянии. Она равна $W_{\text{нач}} = W_{12} + W_{13} + W_{23} = 3\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}$. Здесь W_{ij} − энергия отталкивания i-го и j-го зарядов. Потенциальная энергия системы будет минимальной, когда заряды удалятся на максимальное расстояние, т.е. будут располагаться на одной прямой. Следовательно, конечная потенциальная энергия равна $W_{\text{кон}} = W_{13} + W_{23} + W'_{12} = 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2l} = \frac{5q^2}{4\pi\varepsilon_0 2l}$. По закону сохранения механической энергии $\frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} = \frac{m\upsilon_3^2}{2} + \frac{2m(\upsilon_3/2)^2}{2} + \frac{5q^2}{4\pi\varepsilon_0 2l}$. Отсюда $\upsilon_3 = \frac{q}{\sqrt{6\pi m\varepsilon_0 l}}$.

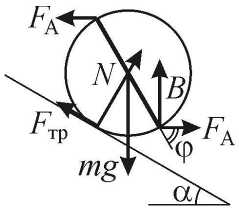


Ответ: $\upsilon_3 = \frac{q}{\sqrt{6\pi m\varepsilon_0 l}} \approx 3{,}5$ см/с.



19.III.2. Задача. Деревянный цилиндр массой m = 25 г и длиной l = 10 см лежит на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, так, что ось цилиндра горизонтальна. Цилиндр плотно (без зазора) охватывает закрепленная на нем тонкая прямоугольная проволочная рамка, плоскость которой проходит через ось цилиндра. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл, вектор которой направлен вертикально. Какой минимальный ток I_{min} нужно пропустить по рамке, чтобы цилиндр не скатывался по наклонной плоскости? Трение между цилиндром и наклонной плоскостью достаточно велико для того, чтобы цилиндр не скользил. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.

19.III.2. Решение. Цилиндр находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых показаны на рисунке, где mg − модуль силы тяжести, N − модуль нормальной составляющей силы реакции наклонной плоскости, $F_{тр}$ − модуль силы трения покоя, F_A − модуль силы Ампера. Записывая уравнение моментов относительно оси цилиндра, имеем: $2F_A R\sin\varphi = F_{тр}R$, где R − радиус цилиндра, φ − угол, который плоскость рамки образует с горизонтом. Из условия равновесия цилиндра следует, что $F_{тр} = mg\sin\alpha$. По закону Ампера $F_A = IBl$. Учитывая эти соотношения, находим ток $I = \dfrac{mg\sin\alpha}{2Bl\sin\varphi}$. Минимальное значение найденный ток принимает при $\sin\varphi = 1$, т.е. при $\varphi = 90°$.

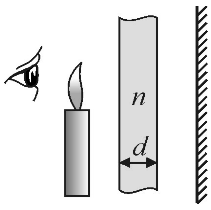


Ответ: $I_{min} = \dfrac{mg\sin\alpha}{2Bl} = 0{,}625$ А.

19.IV. Оптика

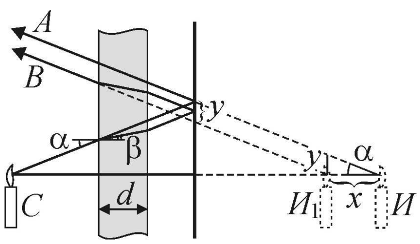
19.IV.1. Задача. Предмет высотой h = 2 см расположен на расстоянии a = 20 см от плосковыпуклой тонкой линзы с фокусным расстоянием F = 16 см перпендикулярно её главной оптической оси. Выпуклая поверхность линзы обращена к предмету. Определите высоту H изображения предмета, даваемого этой линзой после того, как её плоскую поверхность посеребрят.

19.IV.1. Решение. Посеребрённую линзу можно рассматривать как систему двух плосковыпуклых линз, прижатых плоскими поверхностями вплотную друг к другу. Оптическая сила такой системы $D = \dfrac{2}{F}$, а ее фокусное расстояние $F_1 = \dfrac{F}{2}$. Согласно формуле тонкой линзы $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F_1} = \dfrac{2}{F}$, где b – расстояние от линзы до изображения предмета. Следовательно, $b = \dfrac{aF}{2a - F}$. Поскольку $\dfrac{H}{h} = \dfrac{b}{a}$, то искомая высота изображения предмета равна $H = \dfrac{Fh}{2a - F}$. **Ответ:** $H = \dfrac{Fh}{2a - F} \approx 13$ мм.



19.IV.2. Задача. Перед плоским зеркалом, расположенным вертикально, стоит горящая свеча, изображение пламени которой рассматривают, направив взгляд по нормали к поверхности зеркала. На какое расстояние x сместится изображение пламени, если между свечой и зеркалом поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку, параллельную зеркалу? Толщина пластинки d = 1,2 см, показатель преломления стекла n = 1,5. Углы падения света на пластинку и преломления в ней считайте малыми. Учтите, что для малых значений аргумента α, заданного в радианах, справедливо приближенное равенство $\sin\alpha \approx \alpha$.

19.IV.2. Решение. Ход одного из лучей, дающих изображения *И* и $И_1$ пламени свечи *C*, показан на рисунке. Буквой *A* отмечен луч, распространяющийся в отсутствие пластинки, буквой *B* − при наличии пластинки. Пусть α − угол падения луча на пластинку, а β − угол преломления в ней. Учитывая малость углов α и β, запишем закон преломления в виде $\alpha \approx n\beta$. Из рисунка видно, что наличие пластинки приводит к смешению вертикально вниз отраженного от зеркала луча *B* на расстояние $y \approx 2(\alpha - \beta)d \approx 2\alpha d\dfrac{n-1}{n}$. Поскольку $\dfrac{y}{x} \approx \alpha$, то искомая величина $x = \dfrac{y}{\alpha} = 2d\dfrac{n-1}{n}$. **Ответ:** $x = 2d\dfrac{n-1}{n} = 0{,}8$ см.



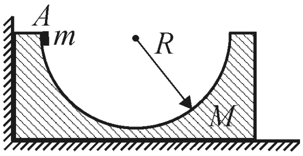
В 2020 – 2024 годах в связи с риском распространения коронавирусной инфекции дополнительное вступительное испытание по физике в МГУ и его Севастопольском филиале проводилось в дистанционном формате на портале https://exam.distant.msu.ru/.

Руководство МГУ приняло решение сократить как объем заданий для ДВИ, так и время их выполнения. В итоге типовое задание по физике в этом году охватывало три основных раздела программы для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику и 3) электродинамику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось три астрономических часа. Ниже приводятся задания дополнительго вступительного испытания.

2020 год

20.I. Механика

20.I.1. Задача. На гладкой горизонтальной поверхности вплотную к вертикальной стенке стоит брусок массой $M = 0{,}8$ кг, в котором сделано гладкое углубление полусферической формы радиусом $R = 0{,}2$ м (см. рисунок). Из точки A из состояния покоя начинает соскальзывать маленькая шайба массой $m = 0{,}2$ кг. Найдите максимальную высоту h относительно нижней точки полусферы, на которую поднимется шайба при ее последующем движении.



I.1. Решение. При скольжении шайбы по левой стороне сферической поверхности брусок будет удерживаться на месте стенкой и останется в покое. По закону сохранения механической энергии шайба в нижней точке сферической поверхности приобретет скорость $v_0 = \sqrt{2gR}$, направленную горизонтально. При дальнейшем движении шайбы и бруска будет сохраняться проекция импульса на горизонтальную ось и механическая энергия. Поскольку в момент достижения шайбой максимальной высоты относительная скорость шайбы и бруска обратятся в нуль, то по законам сохранения импульса и механической энергии имеем: $mv_0 = (m+M)v$, $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)v^2}{2} + mgh$, где v – скорости бруска и шайбы в этот момент. Исключая из записанных выражений v, находим, что $h = \frac{M}{m+M}\cdot\frac{v_0^2}{2g} = \frac{MR}{m+M}$.

Ответ: $h = \frac{MR}{m+M} = 0{,}16$ м.

20.I.2. Задача. На гладкой наклонной плоскости, лежат два бруска массами m = 100 г и $m_1 = 3m$. Нижний брусок прикреплён к одному из концов лёгкой пружины, другой конец которой приделан к неподвижной опоре (см. рисунок). Определите максимальное расстояние $x_{\max}$, на которое можно сместить бруски вниз по наклонной плоскости, для того чтобы после того, как их отпустят из состояния покоя, в процессе движения верхний брусок не отрывался от нижнего. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол

$\alpha = 30°$. Жёсткость пружины $k = 200$ Н/м. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

20.I.2. Решение. Если верхний брусок не будет в процессе движения отрываться от нижнего, то бруски будут совершать гармонические колебания с круговой частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+m_1}}$, а уравнение движения верхнего кубика в проекции на ось, параллельную наклонной плоскости, будет иметь вид: $m_1 a = m_1 g \sin\alpha - N$, где N - сила реакции со стороны нижнего бруска. Верхний брусок оторвётся от нижнего при $N = 0$. Поэтому максимальное ускорение, которое может иметь этот брусок, $a_{\max} = g\sin\alpha$. Поскольку максимальное ускорение тела, совершающего гармонические колебания с амплитудой $x_{\max}$, равно $a_{\max} = \omega^2 x_{\max}$, то $x_{\max} = \dfrac{(m+m_1)g\sin\alpha}{k}$.

Ответ: $x_{\max} = \dfrac{(m+m_1)g\sin\alpha}{k}$ =1 см.

20.II. Молекулярная физика и термодинамика

20.II.1. Задача. В вертикальном цилиндрическом сосуде под легким подвижным поршнем находится некоторое количество одноатомного идеального газа. В положении равновесия поршень удерживается в сосуде атмосферным давлением. При этом расстояние от поршня до дна сосуда равно $h_0 = 1$ м. Поддерживая температуру газа постоянной, сверху на поршень медленно насыпают песок массой $m = 1$ кг. Найдите количество теплоты Q, которое необходимо сообщить газу, чтобы вернуть поршень в первоначальное положение. Трение поршня о стенки сосуда считайте пренебрежимо малым, ускорение свободного примите равным $g = 10$ м/с^2.

20.II.1. Решение. Из условия равновесия поршня следует, что давление газа в сосуде равно p_0 в начальном состоянии, и $p_1 = p_0 + \dfrac{mg}{S}$, когда на поршень насыпали песок. Здесь p_0 – атмосферное давление, S – площадь поршня. По закону Бойля-Мариотта имеем: $p_0 V_0 = p_1 V_1$, где $V_0 = h_0 S$, $V_1 = (h_0 - \Delta h)S$. Отсюда находим, что под действием веса песка поршень переместится вниз на расстояние $\Delta h = \dfrac{mgh_0}{Sp_0 + mg}$. Для того, чтобы вернуть поршень в исходное положение, газ должен совершить работу $A = p_1 \Delta V = \left(p_0 + \dfrac{mg}{S}\right)\Delta h S = mgh_0$. Сообщенное при этом количество теплоты равно $Q = \Delta U + A = \dfrac{3}{2} p_1 \Delta V + p_1 \Delta V = \dfrac{5}{2} A$. **Ответ:** $Q = \dfrac{5}{2} mgh_0 = 25$ Дж.

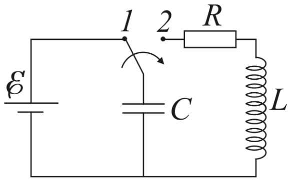
20.II.2. Задача. В сосуде находится воздух с относительной влажностью $\varphi = 80\%$ при температуре $T = 373$ К. Объём сосуда $V = 10$ л. Воздух в сосуде изотермически сжимают, уменьшая его объём в два раза. Найдите массу m сконденсировавшейся при этом воды. Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8{,}3$ Дж/(К·моль), а нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Молярная масса воды $M = 18$ г/моль. Объёмом сконденсировавшейся воды можно пренебречь.

Решение. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона, записанного для водяного пара в сосуде, а именно $\varphi_1 p_{нп} V = \frac{m_1}{M} RT$, первоначальная масса пара равна $m_1 = \frac{\varphi_1 p_{нп} MV}{RT}$. Здесь $\varphi_1 = \frac{\varphi}{100\%}$, $p_{нп}$ – парциальное давление насыщенного водяного пара, равное при 100 °C нормальному атмосферному давлению p_0. При уменьшении объема сосуда вдвое пар в сосуде становится насыщенным и его масса будет $m_2 = \frac{p_{нп} MV}{2RT}$. Масса сконденсировавшейся воды $m = m_1 - m_2 = \frac{p_0 MV}{RT}\left(\frac{\varphi}{100\%} - \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $m = \frac{p_0 MV}{RT}\left(\frac{\varphi}{100\%} - \frac{1}{2}\right) \approx 1{,}7$ г.

20.III. Электродинамика

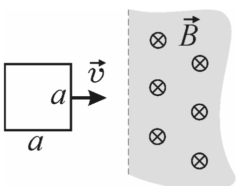
20.III.1. Задача. В электрической схеме, представленной на рисунке, конденсатор



электроёмкостью $C = 1$ мкФ сначала заряжается от источника с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В. Затем ключ переводят в положение *2*. Какое количество теплоты Q_L выделится за всё время возникших затухающих колебаний на катушке, если она изготовлена из медной проволоки длиной $l = 10$ м и сечением $S = 1$ мм^2. Сопротивление резистора $R = 1{,}7$ Ом. Удельное сопротивление меди примите равным $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

20.III.1. Решение. Энергия заряженного конденсатора, равна $W_0 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$. В процессе колебаний сила тока, протекающего по резистору и по катушке, одинакова в каждый момент времени. Поэтому отношение количества теплоты, выделяющейся на этих участках цепи за всё время протекания процесса пропорционально отношению их омических сопротивлений: $\frac{Q_R}{Q_L} = \frac{R}{R_L}$, где $R_L = \rho\frac{l}{S}$ – омическое сопротивление катушки. Вся энергия W_0 заряженного конденсатора перейдёт в теплоту $Q = Q_R + Q_L = \left(1 + \frac{R}{R_L}\right) \cdot Q_L$. На долю катушки придётся $Q_L = \frac{R_L}{R + R_L} W_0$. В итоге получаем $Q_L = \frac{\rho l}{RS + \rho l} \cdot \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$. **Ответ:** $Q_L = \frac{\rho l}{RS + \rho l} \cdot \frac{C\mathcal{E}^2}{2} \approx 4{,}55$ мкДж.

20.III.2. Задача. Квадратную проволочную рамку двигают с постоянной



скоростью, перпендикулярной одной из сторон рамки. В некоторый момент времени рамка входит в область, занимаемую однородным магнитным полем, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки, причем ее скорость перпендикулярна прямой, ограничивающей область магнитного поля. Какое количество теплоты Q выделится в рамке за время, в течение которого она полностью окажется в магнитном поле? Сторона рамки $a = 10$ см, сопротивление рамки $R = 1$ Ом, модуль скорости рамки $v = 1$ м/с, магнитная индукция $B = 1$ Тл.

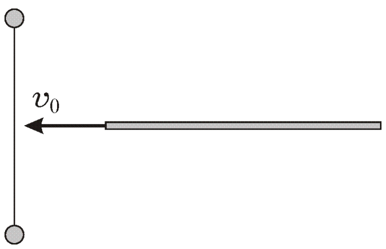
20.III.2. Решение. Во время вхождения рамки в область, занимаемую магнитным полем, в ее стороне, параллельной границе магнитного поля, возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = Bva$, в результате чего по рамке начинает течь индукционный ток $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bva}{R}$. По закону Джоуля−Ленца количество теплоты, выделившееся в рамке за время τ ее вхождения в магнитное поле, равно $Q = I^2 R\tau$. По истечении этого времени рамка полностью окажется в магнитном поле и индукционный ток прекратится. Поскольку $\tau = \frac{a}{v}$, из записанных выражений следует, что $Q = \frac{B^2 va^3}{R}$.

Ответ: $Q = \frac{B^2 va^3}{R} = 1$ мДж.

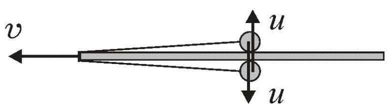
2021 год

21.I. Механика

21.I.1. Задача. На гладкой горизонтальной поверхности лежат две одинаковые шайбы, связанные лёгкой нерастяжимой слегка натянутой нитью. Тонкий брусок, масса которого в $k = 2$ раза превышает массу каждой из шайб, движется поступательно со скоростью $v_0 = 2$ м/с перпендикулярно нити и ударяет точно в ее середину (см. рисунок). Считая размер шайб пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити, определите модуль u скорости каждой шайбы относительно бруска в момент удара шайб о брусок.

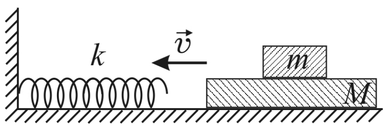


21.I.1. Решение. Поскольку по условию размеры шайб малы по сравнению с длиной нити, можно считать, что в момент удара шайб о брусок их относительные скорости направлены перпендикулярно бруску и равны по модулю u. Скорости шайб в направлении движения бруска в момент их удара о брусок равны скорости бруска v. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление движения бруска и закон сохранения механической энергии, считая, что кинетическая энергия вращения шайб пренебрежимо мала. Имеем: $kmv_0 = kmv + 2mv$, $\frac{kmv_0^2}{2} = \frac{kmv^2}{2} + 2\frac{m\left(v^2 + u^2\right)}{2}$. Из этих уравнений следуют равенства $v = \frac{kv_0}{k+2}$, $kv_0^2 = (k+2)v^2 + 2u^2$. Исключая отсюда v, получаем, что $u = v_0\sqrt{\frac{k}{k+2}}$.

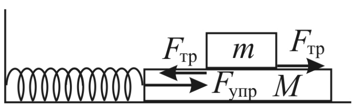


Ответ: $u = v_0\sqrt{\frac{k}{k+2}} \approx 1{,}4$ м/с.

21.I.2. Задача. По гладкой горизонтальной плоскости со скоростью $v = 1$ м/с скользит доска массой $M = 20$ кг, на которой лежит брусок. Доска вступает в соприкосновение с горизонтально расположенной лёгкой пружиной жёсткостью $k = 100$ Н/м, один конец которой прикреплён к стене (см. рисунок). Коэффициент трения между бруском и доской равен $\mu = 0{,}2$. Центры масс бруска и доски лежат в одной вертикальной плоскости с осью пружины. Скорость доски параллельна оси пружины. При какой массе бруска m он не сдвинется с доски в дальнейшем? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Считайте, что пружина при взаимодействии с доской сжимается не полностью.



21.I.2. Решение. После касания пружины доской пружина начнёт сжиматься. При этом на доску в горизонтальном направлении будут действовать сила упругости со стороны пружины и сила трения со стороны бруска, а на брусок сила трения о доску (см. рисунок). Если брусок не скользит по доске, то ускорения этих тел одинаковы. По второму закону Ньютона $Ma = F_{\text{упр}} - F_{\text{тр}}$ и $ma = F_{\text{тр}}$, причём $F_{\text{тр}} = F_{\max} = \mu N = \mu mg$.



Поэтому максимально допустимое ускорение доски с бруском равно $a_{\max} = \mu g$. Движение доски вместе с бруском до момента полного сжатия пружины описывается уравнением гармонических колебаний на первой четверти периода. Из этого уравнения следует, что амплитудное значение ускорения доски с бруском равно $a_0 = v\omega$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ – круговая частота свободных колебаний системы. Условие задачи будет выполнено, если $a_0 \le a_{\max}$. Следовательно, $m \ge \dfrac{kv^2}{(\mu g)^2} - M$.

Ответ: $m \ge \dfrac{kv^2}{(\mu g)^2} - M = 5$ кг.

21.II. Молекулярная физика и термодинамика

21.II.1. Задача. В сосуде объемом $V = 3$ л находится насыщенный водяной пар при температуре $t = 100\,°\text{C}$. До какого объема V_1 нужно сжать пар при постоянной температуре, чтобы в сосуде образовалась вода массой $m = 1$ г? Нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Молярная масса воды $M = 18$ г/моль. Ответ приведите в литрах.

21.II.1. Решение. Поскольку при температуре $t = 100\,°\text{C}$ давление насыщенного водяного пара равно нормальному атмосферному давлению p_0, из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что масса пара в исходном состоянии $m_0 = \dfrac{p_0 MV}{RT} \approx 1{,}74$ г. Масса пара, оставшегося после сжатия, $m_1 = m_0 - m = 0{,}74$ г. Объем, занимаемый паром массой m_1 при температуре $t = 100\,°\text{C}$, равен $V_1 = V - \dfrac{mRT}{p_0 M}$.

Ответ: $V_1 = V - \dfrac{mRT}{p_0 M} \approx 1{,}28$ л.

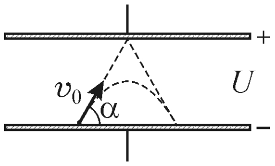
21.II.2. Задача. В закрытом с обоих концов и откачанном цилиндрическом сосуде объемом $V = 2$ л может свободно перемещаться невесомый тонкий поршень. В сосуд с одной стороны от поршня ввели $m_1 = 2$ г воды, а с другой стороны $m_2 = 1$ г азота. Какую часть x объёма цилиндра будет занимать азот при температуре $t = 100$ °C в обеих частях цилиндра? Молярные массы воды и азота равны соответственно $M_1 = 18$ г/моль и $M_2 = 28$ г/моль. Нормальное атмосферное давление примите равным $p_0 = 10^5$ Па. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Ответ приведите в процентах.

21.II.2. Решение. При температуре 100 °C давление насыщенных паров воды равно нормальному атмосферному давлению p_0. Из уравнения Менделеева−Клапейрона $p_0 V = \dfrac{m_1}{M_1} RT$, где $T = t + 273$, следует, что объем, который занимал бы водяной пар, образовавшийся из данного количества воды, при давлении p_0 равен

$V = \dfrac{m_1}{M_1 p_0} RT \approx 3{,}4$ л. Поэтому воды пары будут насыщенными, даже если будут занимать весь объём цилиндра. Следовательно, в обеих частях цилиндра установится давление p_0. Объём, занимаемый азотом, при этом равен $V_2 = \dfrac{m_2}{M_2 p_0} RT$. Отсюда $x = \dfrac{V_2}{V} = \dfrac{m_2 RT}{M_2 p_0 V}$. **Ответ:** $x = \dfrac{m_2 R(t+273)}{M_2 p_0 V} \cdot 100\% \approx 55\%$.

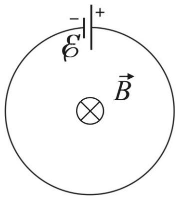
21.III. Электродинамика

21.III.1. Задача. Между пластинами плоского конденсатора, помещенного в вакуум, создано однородное электрическое поле. Из некоторой точки с поверхности отрицательно заряженной пластины с одной и той же скоростью v_0 = 10 м/с и под одним и тем же углом α = 60º к пластине вылетают два маленьких шарика, один из которых не заряжен, а второй несет положительный заряд $q = 10^{-7}$ Кл. Незаряженный шарик возвращается к первой пластине после упругого удара о противоположную пластину. Заряженный шарик возвращается к первой пластине, не достигнув противоположной пластины. Какова масса m заряженного шарика, если известно, что оба шарика вернулись на первую пластину в одной и той же точке? Разность потенциалов между пластинами конденсатора U = 750 В. Действием силы тяжести можно пренебречь. Считайте, что при ударе о пластину конденсатора незаряженный шарик заряда не приобретает.



21.III.1. Решение. Под действием постоянного электрического поля заряженный шарик летит по параболической траектории, а траектория незаряженного шарика представляет собой два прямолинейных отрезка равной длины. В направлении, параллельном пластинам, оба шарика летят с одинаковыми постоянными скоростями. Поскольку по условию шарики возвращаются в одну и ту же точку первой пластины, они затрачивают на движение одно и то же время. Обозначив через d расстояние между пластинами, находим, что время движения незаряженного шарика от одной пластины до другой, $t_0 = \dfrac{d}{v_{0y}}$, где $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Такое же время заряженный шарик движется от момента вылета до достижения вершины параболы. Модуль ускорения заряженного шарика $a = \dfrac{v_{0y}}{t_0} = \dfrac{v_{0y}^2}{d}$, а его перемещение в направлении, перпендикулярном пластинам, за время t_0 составляет $y_{\max} = v_{0y} t_0 - \dfrac{a t_0^2}{2} = \dfrac{d}{2}$. Таким образом, заряженный шарик в направлении, перпендикулярном пластинам, долетает ровно до середины конденсатора. При этом он проходит разность потенциалов $\Delta\varphi = \dfrac{U}{2}$. Из закона сохранения механической энергии для заряженного шарика имеем $\dfrac{m v_0^2 \sin^2\alpha}{2} = \dfrac{qU}{2}$. Отсюда $m = \dfrac{qU}{v_0^2 \sin^2\alpha}$. **Ответ:** $m = \dfrac{qU}{v_0^2 \sin^2\alpha} = 1$ мг.

21.III.2. Задача. Плоский контур с источником постоянного тока находится во внешнем однородном магнитном поле, вектор магнитной индукции которого $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости контура (см. рисунок). На сколько процентов n по отношению к первоначальному значению изменится мощность, выделяющаяся в контуре, после того, как магнитная индукция начнет уменьшаться со скоростью k = 0,01 Тл/с? Площадь контура S = 0,1 м^2, ЭДС источника $\mathcal{E}$ = 10 мВ. Ответ округлите до целых.



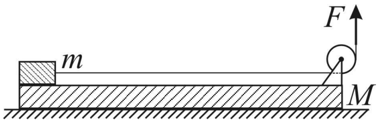
21.III.2. Решение. Пусть R – полное сопротивление контура, включающее в себя внутреннее сопротивление источника. Тогда выделяющаяся в контуре мощность при неизменном магнитном поле равна $N_1 = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}$. Когда магнитное поле начнет убывать, в контуре возникнет ЭДС индукции, по модулю равная $|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = S\left|\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\right| = kS$. Согласно правилу Ленца, индукционный ток направлен по часовой стрелке, следовательно, ЭДС индукции складывается с ЭДС источника. Мощность, выделяющаяся в контуре, станет равной $N_2 = \dfrac{(\mathcal{E} + kS)^2}{R}$. Искомая величина $n = \dfrac{N_2 - N_1}{N_1} \cdot 100\% = \dfrac{2Sk\mathcal{E} + (Sk)^2}{\mathcal{E}^2} \cdot 100\%$.

Ответ: $n = \dfrac{2Sk\mathcal{E} + (Sk)^2}{\mathcal{E}^2} \cdot 100\% = 21\%$. Мощность увеличится.

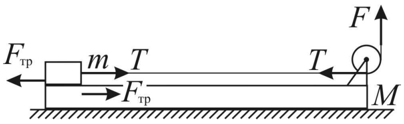
2022 год

22.I. Механика

22.I.1. Задача. На гладком горизонтальном столе лежит доска, на одном из краёв которой находится небольшой брусок, а на другом – небольшой блок. К бруску прикреплена невесомая нерастяжимая гладкая нить, перекинутая через блок. Нить начинают тянуть вертикально вверх с силой $F = 50$ Н. Чему равна длина доски L, если брусок доезжает до блока за время $t = 0{,}5$ с. Масса доски равна $M = 10$ кг, бруска $m = 5$ кг, коэффициент трения между бруском и доской равен $\mu = 0{,}6$. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

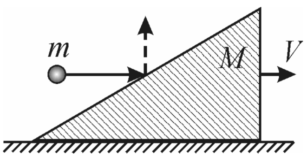


22.I.1. Решение. Так как нить гладкая невесомая, сила натяжения нити одинакова во всех её точках и равна по модулю силе F. Силы, действующие на доску и брусок, указаны на рисунке. В проекции на горизонтальное направление второй закон Ньютона для бруска и доски $ma_1 = T - \mu mg$, $Ma_2 = T - \mu mg$, где a_1 и a_2 – ускорения бруска и доски относительно инерциальной системы отсчета, связанной со столом. Ускорение бруска относительно доски равно $a = a_1 - a_2$, поэтому $L = \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{(M+m)(F-\mu mg)t^2}{2Mm}$.



Ответ: $L = \dfrac{(M+m)(F-\mu mg)t^2}{2Mm} = 0{,}85$ м.

22.I.2. Задача. Гладкий клин массой $M = 1$ кг покоится на горизонтальном столе. В наклонную поверхность клина попадает маленький шарик массой $m = 100$ г, летящий горизонтально, и после абсолютно упругого удара о поверхность клина отскакивает вертикально вверх. На какую высоту h поднимется шарик относительно точки удара, если после удара клин приобретает скорость $V = 1$ м/с? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



22.I.2. Решение. По закону сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление имеем $mv = MV$, где v − модуль скорости шарика перед ударом. Из закона сохранения механической энергии следует равенство $\dfrac{mv^2}{2} = mgh + \dfrac{MV^2}{2}$. Решая записанную систему уравнений, находим, что $h = \dfrac{MV^2}{2mg}\left(\dfrac{M}{m} - 1\right)$.

Ответ: $h = \dfrac{MV^2}{2mg}\left(\dfrac{M}{m} - 1\right) = 4{,}5$ м.

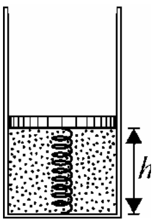
22.II. Молекулярная физика и термодинамика

22.II.1. Задача. Сосуд с газом, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с длиной l = 1 м, двигают горизонтально с ускорением a = 10 м/с^2, направленным вдоль длинной стороны. Найдите разность плотностей газа $\Delta\rho$ вблизи задней и передней стенок сосуда. Плотность газа в неподвижном сосуде ρ_0 = 1,3 кг/м^3, его молярная масса μ = 0,029 кг/моль, температура T = 273 К. Универсальную газовую постоянную примите равной R = 8,3 Дж/(моль·К). Силой тяжести, действующей на молекулы газа, можно пренебречь.

22.II.1. Решение. Обозначим силу, действующую на газ со стороны задней стенки, через F_1, а со стороны передней стенки – через F_2. По второму закону Ньютона $ma = F_1 - F_2$, где m – масса всего газа. С другой стороны, $F_1 = p_1 S$, $F_2 = p_2 S$, где $p_{1,2}$ – давления газа у задней и передней стенок сосуда, S – площадь поперечного сечения сосуда. Выражая плотность газа через давление из уравнения Менделеева–Клапейрона, и учитывая, что $S = \frac{V}{l}$, а $V = \frac{m}{\rho_0}$, получаем, что $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 = \frac{\mu}{RT}\rho_0 a l$.

Ответ: $\Delta\rho = \frac{\mu}{RT}\rho_0 a l \approx 1{,}7\cdot 10^{-4}$ кг/м^3.

22.II.2. Задача. Невесомый поршень соединен с дном цилиндрического сосуда



пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. В сосуде под поршнем находится идеальный одноатомный газ, а над поршнем – вакуум. В начальном состоянии расстояние между поршнем и дном сосуда составляет $h = 0{,}2$ м. Найдите количество теплоты ΔQ, которое нужно сообщить газу, чтобы расстояние между поршнем и дном сосуда удвоилось. Считайте, что пружина не деформирована при $h = 0$.

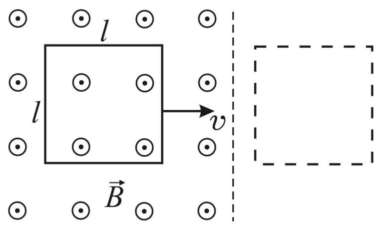
22.II.2. Решение. В соответствии с первым законом термодинамики $\Delta Q = \Delta U + A$, где $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0)$ – изменение внутренней энергии газа, $A = \frac{k}{2}(4h^2 - h^2)$ – работа газа, равная изменению потенциальной энергии упругой деформации пружины. Из уравнения Менделеева−Клапейрона, записанного для начального и конечного состояний газа, находим, что $p_0 V_0 = \frac{kh}{S} hS = kh^2 = \nu R T_0$, $pV = \frac{k2h}{S} 2hS = 4kh^2 = \nu RT$. Следовательно, $\Delta U = \frac{9}{2}kh^2$. Учитывая, что $A = \frac{3}{2}kh^2$, получаем, что $\Delta Q = 6kh^2$.

Ответ: $\Delta Q = 6kh^2 = 24$ Дж.

22.III. Электродинамика

22.III.1. Задача. Отрицательно заряженная частица массой $m = 9\cdot 10^{-30}$ кг вращается по круговой орбите радиуса $r = 5\cdot 10^{-11}$ м вокруг неподвижной положительно заряженной частицы, несущей такой же по модулю заряд. Найдите период обращения частицы T, если известно, что полная механическая энергия частицы равна $E = -2\cdot 10^{-18}$ Дж.

22.III.1. Решение. Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения частицы по круговой орбите имеет вид $\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$, где v − скорость частицы, q − ее заряд, ε_0 − электрическая постоянная. Кинетическая энергия частицы $E_к = \frac{mv^2}{2}$, а ее потенциальная энергия $E_п = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r}$. Используя уравнение движения частицы, $E_п$ можно записать как $E_п = -mv^2$. Полная механическая энергия частицы $E = E_к + E_п = -\frac{mv^2}{2}$. Поскольку период обращения частицы $T = \frac{2\pi r}{v}$, то $E = -\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$ и $T = 2\pi r\sqrt{-\frac{m}{2E}}$. **Ответ:** $T = 2\pi r\sqrt{-\frac{m}{2E}} \approx 4{,}7\cdot 10^{-16}$ с.



22.III.2. Задача. Квадратная проволочная рамка со стороной $l = 30$ см помещена в однородное магнитное поле, линии индукции которого направлены перпендикулярно плоскости рамки. Модуль вектора магнитной индукции равен $B = 1$ Тл, поле имеет резко очерченную границу, параллельную стороне рамки (см. рисунок). Каково сопротивление рамки R, если при её выдвигании с постоянной скоростью $v = 5$ м/с из области с магнитным полем в ней выделяется количество теплоты, равное $Q = 90$ мДж?

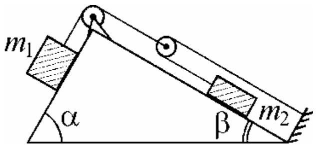
22.III.2. Решение. При выдвигании рамки из области магнитного поля модуль изменения потока вектора индукции через поверхность, ограниченную рамкой, за время Δt равен $\Delta\Phi = Blv\Delta t$. Соответственно, в рамке возникает ЭДС электромагнитной индукции, по модулю равная $\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv$. Данная ЭДС будет действовать, пока рамка проходит границу области с магнитным полем, то есть в течение времени $\tau = \frac{l}{v}$. По закону Джоуля-Ленца количество теплоты, выделяемое проводником с током $Q = \frac{\mathcal{E}^2\tau}{R}$. Комбинируя три последних равенства, получим, что $R = \frac{B^2l^3v}{Q}$.

Ответ: $R = \frac{B^2l^3v}{Q} =$ 1,5 Ом.

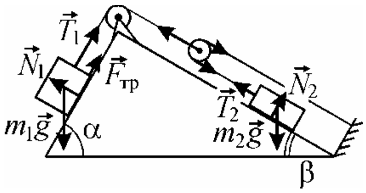
2023 год

23.I. Механика

23.I.1. Задача. На гранях закрепленной призмы находятся два тела массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг, соединенные друг с другом и неподвижной опорой невесомыми и нерастяжимыми нитями через систему невесомых блоков (см. рисунок). При этом ускорение левого тела направлено вдоль наклонной плоскости вниз, а правого тела – вдоль наклонной плоскости вверх. Правая грань призмы гладкая, левая − шероховатая с коэффициентом трения $\mu = 0,6$. Определите модуль ускорения левого груза a_1. Углы при основании призмы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



23.I.1. Решение. Тела движутся под действием сил, изображенных на рисунке, где $m_{1,2}\vec{g}$ − силы тяжести, $\vec{N}_{1,2}$ − нормальные составляющие сил реакции призмы, $\vec{T}_{1,2}$ − силы натяжения нитей, $\vec{F}_{\text{тр}}$ − сила трения скольжения. По второму закону Ньютона имеем: $m_1 a_1 = m_1 g \sin\alpha - T_1 - \mu m_1 g \cos\alpha$ (для левого груза), $m_2 a_2 = T_2 - m_2 g \sin\beta$ (для правого груза). Кроме того, справедливы равенства $a_2 = 2a_1$, $T_1 = 2T_2$. Решая записанную систему уравнений, находим, что $a_1 = \dfrac{m_1 \sin\alpha - 2m_2 \sin\beta - \mu m_1 \cos\alpha}{m_1 + 4m_2} g$.



Ответ: $a_1 = \dfrac{m_1 \sin\alpha - 2m_2 \sin\beta - \mu m_1 \cos\alpha}{m_1 + 4m_2} g \approx 0,22$ м/с^2.

23.I.2. Задача. Два маленьких упругих шарика одинаковой массой подвешены на невесомых нерастяжимых нитях, прикреплённых к массивным штативам так, что шарики соприкасаются при вертикальном положении нитей, а прямая, соединяющая их центры, горизонтальна. Длины нитей отличаются в два раза. Нити отклонили в одной плоскости в разные стороны до горизонтального положения, а затем шарики отпустили без толчка с такой задержкой во времени, что они столкнулись в нижней точке их траекторий. Определите отношение n модуля натяжения длинной нити сразу после столкновения шариков к модулю натяжения этой нити непосредственно перед столкновением.

23.I.2. Решение. Согласно закону сохранения механической энергии модуль скорости шарика на нити длиной L непосредственно перед столкновением равен $u_1 = \sqrt{2gL}$, а модуль скорости шарика на нити длиной $2L$ равен $u_2 = 2\sqrt{gL}$. Здесь g – модуль ускорения свободного падения. При этом скорости направлены горизонтально и взаимно противоположно. Согласно законам сохранения импульса и механической энергии, при абсолютно упругом центральном соударении шарики равной массы «обмениваются» скоростями. Уравнение движения шарика на длинной нити в нижней точке траектории имеет вид $\dfrac{mu^2}{2L} = T - mg$, где u модуль скорости шарика, а T – модуль силы натяжения нити в этот момент. Поэтому, непосредственно перед столкновением шариков модуль натяжения длинной нити $T' = \dfrac{mu_2^2}{2L} + mg = 3mg$, а сразу после столкновения $T'' = \dfrac{mu_1^2}{2L} + mg = 2mg$. Следовательно, искомое отношение $n = \dfrac{T''}{T'} = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: $n = \dfrac{2}{3}$.

23.II. Молекулярная физика и термодинамика

23.II.1. Задача. С одноатомным идеальным газом проводят процесс, в котором внутренняя энергия газа пропорциональна квадрату объёма, который он занимает. Каково изменение ΔU внутренней энергии газа в таком процессе, если газу сообщили количество теплоты Q = 20 Дж?

23.II.1. Решение. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа $U = \dfrac{3}{2}\nu RT$. По условию $U = \alpha V^2$, где α – некоторый постоянный коэффициент. В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона $\nu RT = pV$, поэтому в данном процессе $p \sim V$. Работу, совершённую газом, можно найти, вычислив площадь под графиком зависимости p от V. Площадь трапеции равна $A = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) =$ $= \dfrac{1}{2}(p_1V_2 - p_1V_1 + p_2V_2 - p_2V_1)$. Поскольку $p \sim V$, то $p_1V_2 = p_2V_1$ и $A = \dfrac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \dfrac{1}{2}\nu R\Delta T$. Изменение внутренней энергии $\Delta U = \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T$. Согласно первому закону термодинамики: $Q = \Delta U + A$. В данном процессе $Q = \Delta U + \dfrac{\Delta U}{3} = \dfrac{4}{3}\Delta U$. Отсюда $\Delta U = \dfrac{3}{4}Q$. **Ответ:** $\Delta U = \dfrac{3}{4}Q = 15$ Дж.

23.II.2. Задача. В гладком вертикальном цилиндре под невесомым поршнем находится влажный воздух. Давление в цилиндре равно $p_0 = 1$ атм, а температура $t = 100$°C. Объём цилиндра изотермически уменьшили в $n = 4$ раза. Определите давление в цилиндре после сжатия, если в начальном состоянии плотность сухого воздуха в $k = 3$ раза превышает плотность водяного пара. Молярная масса сухого воздуха равна μ = 29 г/моль, воды – $\mu_в$ = 18 г/моль.

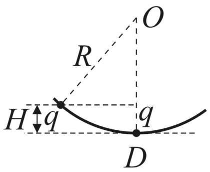
23.II.2. Решение. По закону Дальтона начальное давление влажного воздуха равно сумме давлений сухого воздуха и водяных паров:

$p_0 = p + p_\text{в} = \dfrac{\rho RT}{\mu} + \dfrac{\rho_\text{в} RT}{\mu_\text{в}} = \dfrac{\rho_\text{в} RT}{\mu\mu_\text{в}}(k\mu_\text{в} + \mu)$, где T – температура влажного воздуха, ρ – плотность сухого воздуха, $\rho_\text{в}$ – плотность водяных паров. Отсюда плотность водяных паров равна $\rho_\text{в} = \dfrac{p_0\mu\mu_\text{в}}{RT(k\mu_\text{в} + \mu)}$, а его парциальное давление $p_\text{в} = \dfrac{p_0\mu}{k\mu_\text{в} + \mu}$. Давление сухого воздуха в начальном состоянии равно $p = \dfrac{k\rho_\text{в} RT}{\mu} = \dfrac{kp_0\mu_\text{в}}{k\mu_\text{в} + \mu}$.Так как масса сухого воздуха не изменяется, то после сжатия давление сухого воздуха возрастет в n раз: $p' = \dfrac{nkp_0\mu_\text{в}}{k\mu_\text{в} + \mu}$. Давление пара после сжатия также должно возрасти в n раз, но, если получится, что его давление окажется больше, чем давление насыщенного пара при этой температуре, то $p'_\text{в} = p_\text{нп} = p_0$ (p_0 – давление насыщенного пара при температуре 100°C): $p'_в = \dfrac{np_0\mu}{k\mu_в + \mu} = \dfrac{4\cdot 29}{3\cdot 18 + 29}p_0 \approx 1{,}4p_0 > p_0$. Значит $p'_\text{в} = p_\text{нп} = p_0$. Окончательно получаем выражение для давления в цилиндре после сжатия: $p'_0 = \dfrac{nkp_0\mu_в}{k\mu_в + \mu} + p_0 = p_0\left(\dfrac{nk\mu_в}{k\mu_в + \mu} + 1\right) \approx 3{,}6p_0 = 3{,}6\,\text{атм}.$

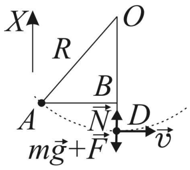
Ответ: $p'_0 = p_0\left(\dfrac{nk\mu_в}{k\mu_в + \mu} + 1\right) \approx 3{,}6\,\text{атм}.$

23.III. Электродинамика

23.III.1. Задача. По тонкому гладкому непроводящему стержню начинает скользить из состояния покоя заряженная бусинка массой m и положительным зарядом q. Стержень имеет форму дуги окружности радиусом R и расположен в вертикальной плоскости. Начальное положение бусинки находится на высоте $H = R/5$ относительно нижней точки стержня D. На этой же высоте над точкой D расположен неподвижный положительный заряд q. Найдите силу P, с которой бусинка действует на стержень в точке D, пренебрегая эффектами, связанными с появлением поляризационных зарядов.



23.III.1. Решение. Согласно закону изменения полной механической энергии: $\dfrac{mv^2}{2} - mgH = q(\varphi_A - \varphi_D)$, где φ_A и φ_D – потенциалы, создаваемые неподвижным зарядом q в точках A и D. Из геометрических соображений следует, что ΔABO – прямоугольный треугольник со сторонами $AO = 5H$, $OB = 4H$, $BA = 3H$, поэтому $\varphi_A = \dfrac{kq}{3H}$, $\varphi_D = \dfrac{kq}{H}$,



тогда $v^2 = 2gH - \dfrac{4kq^2}{3mH}$. Здесь $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Согласно второму закону Ньютона, записанному в проекции на ось X в точке D: $ma = N - mg - F_к$, $a = \frac{\upsilon^2}{R}$, $F_к = \frac{kq^2}{H^2}$. Здесь N – сила реакции стержня, a – проекция ускорения бусинки на ось X, υ – скорость бусинки в точке D, $F_к$ – сила Кулона, действующая на бусинку со стороны заряда q, Из этой системы, получаем выражение для N, а именно $N = \frac{7}{5}mg + \frac{11}{15}\cdot\frac{kq^2}{H^2}$. По третьему закону Ньютона, сила, действующая на стержень со стороны бусинки, равна по модулю силе реакции стержня: $P = N$. **Ответ:** $P = \frac{7}{5}mg + \frac{11}{15}\cdot\frac{kq^2}{H^2}$.

23.III.2. Задача. Из однородной проволоки сделали замкнутый контур в форме квадрата со стороной $a = 1$ м и расположили его горизонтально. После этого стали растягивать контур за две диагонально расположенные вершины до тех пор, пока он не превратился в ромб с острым углом $\alpha = 60°$. Найдите среднюю силу тока I, который протекал в контуре в процессе его деформации, если обе вершины контура двигали относительно неподвижного центра квадрата с постоянными скоростями, по модулю равными $\upsilon = 1$ м/с. Сопротивление проволоки $R = 1$ Ом, а модуль вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли $B = 50$ мкТл.

23.III.2. Решение. Согласно закону электромагнитной индукции ЭДС индукции, возникающая при деформации контура, $\mathcal{E} = -\frac{B\Delta S}{\Delta t}$, где ΔS − изменение площади контура за время Δt. Индукционный ток в контуре равен $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R}$. За время Δt в контуре протекает заряд $\Delta q = I\Delta t = \frac{B|\Delta S|}{R}$. Из записанных выражений следует, что за время деформации контура в нем протекает полный заряд $q = \frac{B(S_0 - S_1)}{R}$, где $S_0 = a^2$ − начальная площадь, а $S_1 = a^2 \sin\alpha$ − конечная площадь, ограниченная контуром. Таким образом, $q = \frac{Ba^2(1-\sin\alpha)}{R}$. Средняя сила тока в контуре равна отношению заряда q, протекшего в контуре, к промежутку времени τ, за который произошла деформация контура. Поскольку $\tau = \frac{a[\cos(\alpha/2) - \sqrt{2}/2]}{\upsilon}$, окончательно получаем, что $I = \frac{B\upsilon a(1-\sin\alpha)}{R[\cos(\alpha/2) - \sqrt{2}/2]}$. **Ответ:** $I = \frac{B\upsilon a(1-\sin\alpha)}{R[\cos(\alpha/2) - \sqrt{2}/2]} \approx 156$ мкА.

2024 год

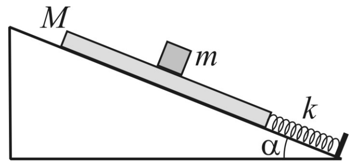
24.I. Механика

24.I.1. Задача. Шайба, скользившая по гладкой горизонтальной поверхности, попадает на шероховатую наклонную плоскость, которая составляет угол α = 30° с горизонтом. Шайба проходит вверх по наклонной плоскости расстояние l = 12 м за время τ = 2 с, после чего останавливается и соскальзывает вниз. Определите скорость шайбы V_1 после того как она снова окажется на горизонтальной поверхности. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до целых.

24.I.1.Решение. При движении шайбы по наклонной плоскости на неё действует сила трения скольжения равная $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, где μ – коэффициент трения шайбы о наклонную плоскость. Эта сила совершает работу $A_{\text{тр}} = -\mu mgl\cos\alpha$ как при движении шайбы вверх, так и при движении шайбы вниз. Учитывая это, запишем закон изменения полной механической энергии для этих двух этапов движения: $\frac{mv_0^2}{2} - \mu mgl\cos\alpha = mgl\sin\alpha$, $mgl\sin\alpha - \mu mgl\cos\alpha = \frac{mv_1^2}{2}$. Здесь v_0 – начальная скорость шайбы на наклонной плоскости. Отсюда получим скорость шайбы после того, как она снова окажется на горизонтальной поверхности $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 4\mu gl\cos\alpha}$. Для того, чтобы найти v_0 и μ рассмотрим отдельно движение шайбы вверх по наклонной плоскости. Направим ось OX вдоль наклонной плоскости вверх, а начало координат совместим с границей между горизонтальной поверхностью и наклонной плоскостью. Координата x и скорость тела v зависят от времени по законам $x(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ и $v(t) = v_0 - at$ соответственно. В момент времени τ (момент остановки шайбы) можем записать, что $x(\tau) = v_0\tau - \frac{a\tau^2}{2} = l$; $v(\tau) = v_0 - a\tau = 0$. Решая эту систему уравнений, найдем начальную скорость шайбы $v_0 = \frac{2l}{\tau}$ и ускорение, с которым она двигалась $a = \frac{2l}{\tau^2}$. С другой стороны, используя второй закон Ньютона в проекции на ось OX, а именно $-ma = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$, получим, что $a = g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha$. Приравнивая два выражения для ускорения a, найдем коэффициент трения $\mu = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{2l}{g\tau^2} - \sin\alpha\right)$.Подставляя результаты для v_0 и μ в выражение для скорости v_1, получим окончательно $v_1 = 2\sqrt{gl\sin\alpha - \frac{l^2}{\tau^2}}$.

Ответ: $v_1 = 2\sqrt{gl\sin\alpha - \frac{l^2}{\tau^2}} = 4\sqrt{6}$ м/с ≈ 10 м/с.

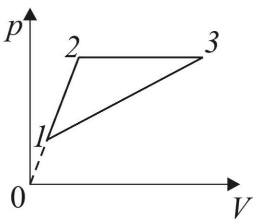
24.I.2. Задача. Гладкая наклонная плоскость образует угол α = 30° с горизонтом. На плоскости лежит доска массой M = 800 г, нижний конец которой упирается торцом в лёгкую пружину жесткостью $k = 10$ Н/м, закреплённую у основания наклонной плоскости (см. рисунок). На доске находится кубик массой $m = 200$ г. Доску плавно смещают вниз вдоль наклонной плоскости, сжимая пружину, и отпускают с нулевой начальной скоростью. Найдите максимальное смещение доски, при котором кубик не будет скользить по доске во время возникших в системе колебаний. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Коэффициент трения между доской и кубиком $\mu = 0{,}75$.



24.I.2. Решение. Направим ось OX системы координат, связанной с наклонной плоскостью, вниз вдоль наклонной плоскости. Начало системы координат свяжем с координатой нижнего края доски в положении равновесия. Положение равновесия характеризуется начальным сжатием пружины x_p, т.е. $(M+m)g\sin\alpha = kx_p$. По условию доску с кубиком смещают вниз вдоль наклонной плоскости, сжимая пружину, и отпускают с нулевой скоростью. Если после этого доска с кубиком совершает колебания, при которых кубик не скользит по доске, то эти колебания будут гармоническими, т.к. доска и кубик будут двигаться как одно целое. Уравнение движения доски с кубиком в проекции на ось OX имеет вид $(M+m)\ddot{x} = (M+m)g\sin\alpha - k(x_p + x)$. Используя соотношение для x_p, это уравнение можно переписать в виде: $(M+m)\ddot{x} + kx = 0$. Из последнего уравнения следует, что доска с кубиком совершает гармонические колебания с круговой частотой $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$. Во время колебаний между доской и кубиком действует сила трения $F_{\text{тр}}$. Кубик движется в соответствии с уравнением $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}(t)$. Сила трения в этом уравнении является возвращающей силой. Она зависит от времени и меняет знак при изменении направления движения доски. Максимальное значение сила трения принимает в крайнем нижнем положении доски $|F_{\text{тр}}^{\max}| = mg\sin\alpha + m|\ddot{x}_{\max}|$. Здесь $|\ddot{x}_{\max}|$ – максимальное ускорение доски с кубиком, равное $|\ddot{x}_{\max}| = \omega_0^2 A$, где A – искомое максимальное смещение доски (амплитуда колебаний). В то же время, сила трения между кубиком и доской, если кубик не скользит по доске, не превышает значения силы трения скольжения в условиях данной задачи, т.е. при $|F_{\text{тр}}^{\max}| \le \mu mg\cos\alpha$. Таким образом, должно выполняться следующее неравенство: $mg\sin\alpha + m\omega_0^2 A \le \mu mg\cos\alpha$. Это неравенство даёт возможность найти максимальное смещение доски, при котором кубик не будет скользить по доске во время возникших в системе колебаний. Имеем $\dfrac{k}{m+M}A \le g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$. Таким образом, максимальное смещение доски, при котором колебания доски с кубиком будут гармоническими, равно $A = \dfrac{(m+M)g}{k}(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$. **Ответ:** $A = \dfrac{(m+M)g}{k}(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \approx 0{,}15$ м.

24.II. Молекулярная физика и термодинамика

24.II.1. Задача. Идеальный одноатомный газ, взятый в количестве $\nu = 1$ моль, используется в качестве рабочего тела в цикле тепловой машины, pV–диаграмма



которого изображена на рисунке. В процессе *1 – 2* объём газа возрастает в $n = 2$ раза, а в процессе *2 – 3* объём дополнительно возрастает ещё в $k = 3$ раза. Найдите коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины, работающей по указанному циклу.

24.II.1. Решение. По условию задачи $V_2 = nV_1$, а $V_3 = kV_2 = nkV_1$. Используя уравнение процесса *1 – 2*, получим, что $p_2 = np_1$, а так как $pV = \nu RT$, то $T_2 = n^2T_1$. Аналогично, используя уравнение процесса *2 – 3*, получим, что $T_3 = kT_2 = n^2kT_1$. КПД цикла тепловой машины вычисляется по формуле: $\eta = \dfrac{A}{Q^+}$, где A – работа, совершённая газом за цикл, а Q^+ – полученное газом за цикл количество теплоты. Для изображённого на рисунке цикла, используя полученные выше соотношения между давлениями, объёмами и температурами узловых точек цикла, имеем: $A = \dfrac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_2) = \dfrac{1}{2}p_1V_1n(n-1)(k-1)$, $Q^+ = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + A_{12} + Q_{23}$. Здесь изменение внутренней энергии газа на участке *1 – 2* равно $\Delta U_{12} = C_V(T_2 - T_1) = \dfrac{3}{2}\nu RT_1(n^2 - 1)$, работа газа на участке *1 – 2* $A_{12} = \dfrac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) = \dfrac{1}{2}p_1V_1(n^2 - 1)$, количество теплоты, полученное газом на участке *2 – 3* $Q_{23} = C_p(T_3 - T_2) = \dfrac{5}{2}\nu RT_1n^2(k-1)$. Подставляя найденные выражения в формулу для Q^+, получим, что $Q^+ = 2\nu RT_1(n^2 - 1) + \dfrac{5}{2}\nu RT_1n^2(k-1)$. Окончательно, $\eta = \dfrac{n(n-1)(k-1)}{4(n^2-1) + 5n^2(k-1)}$. **Ответ:** $\eta = \dfrac{n(n-1)(k-1)}{4(n^2-1) + 5n^2(k-1)} = \dfrac{1}{13} \approx 0{,}077$.

24.II.2. Задача. С одноатомным идеальным газом проводят процесс, в котором внутренняя энергия газа пропорциональна квадрату объёма, который он занимает. Каково изменение ΔU внутренней энергии газа в таком процессе, если газу сообщили количество теплоты Q = 20 Дж?

24.II.2. Решение. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа $U = \dfrac{3}{2}\nu RT$. По условию $U = \alpha V^2$, где α – некоторый постоянный коэффициент. В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT$, поэтому в данном процессе $p \sim V$. Работу, совершённую газом, можно найти, вычислив площадь под графиком зависимости p от V. Площадь трапеции равна $A = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) =$ $= \dfrac{1}{2}(p_1V_2 - p_1V_1 + p_2V_2 - p_2V_1)$. Поскольку $p \sim V$, то $p_1V_2 = p_2V_1$ и

$A = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{1}{2}\nu R\Delta T$. Изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$. Согласно первому закону термодинамики, $Q = \Delta U + A$. В данном процессе $Q = \Delta U + \frac{\Delta U}{3} = \frac{4}{3}\Delta U$. Отсюда $\Delta U = \frac{3}{4}Q$. **Ответ:** $\Delta U = \frac{3}{4}Q = 15$ Дж.

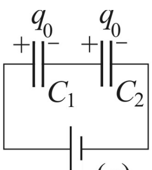
24.III. Электродинамика

24.III.1. Задача. Три одинаковые заряженные частицы в некоторый момент времени оказываются в вершинах равностороннего треугольника со стороной l = 28 см и летят с одинаковыми по модулю скоростями к центру этого треугольника. При уменьшении расстояния между соседними частицами в два раза, скорости также уменьшились в два раза. До какого наименьшего расстояния сблизятся частицы? Ответ дайте в сантиметрах, округлив до целых.

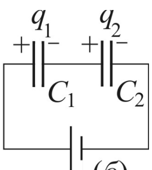
24.III.1. Решение. Запишем закон сохранения полной энергии системы из трёх заряженных частиц для начального положения частиц и после уменьшения расстояний между соседними частицами вдвое: $3\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} + 3\cdot\frac{mV_0^2}{2} = 3\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(l/2)} + 3\cdot\frac{m(V_0/2)^2}{2}$. Аналогично, для начального и конечного положений частиц, учитывая что при наименьшем расстоянии скорость частиц обратится в ноль: $3\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} + 3\cdot\frac{mV_0^2}{2} = 3\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}$. Из первого равенства получим, что $\frac{mV_0^2}{2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}$. Подставив во второе равенство, находим, что $r_{\min} = \frac{3}{7}l$. **Ответ:** $r_{\min} = \frac{3}{7}l = 12$ см.

24.III.2. Задача. Два незаряженных конденсатора с ёмкостями C_1 = 1 мкФ и C_2 = 3 мкФ подключают последовательно к источнику с напряжением U = 10 В. После зарядки конденсаторов конденсатор C_1 отключают от схемы и, не разряжая его, вновь подключают к схеме, перевернув на 180^0. Определите заряд конденсатора C_2 через большой промежуток времени после переключения.

24.III.2. Решение. После подключения последовательно соединенных незаряженных конденсаторов к источнику заряды конденсаторов установятся одинаковыми и равными $q_0 = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U$, где U – ЭДС источника. После переключения конденсатора C_1 заряды конденсаторов установятся равными q_1 и q_2, для которых справедливы уравнения $-q_1 + q_2 = 2q_0$ и $\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = U$. Отсюда находим, что $q_2 = \frac{C_1C_2(C_1+3C_2)}{(C_1+C_2)^2}U$.



(*а*)



(*б*)

Ответ: $q_2 = \frac{C_1C_2(C_1+3C_2)}{(C_1+C_2)^2}U \approx 19$мкКл.

Учебное издание

ФИЗИКА. ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
2015–2024 годов

Оригинал-макет: *Чесноков С.С.*

Подписано в печать XX.XX.25 г. Формат 60x90 1/16
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 4,0 п.л.
Тираж XXX экз. Заказ № XXXX.

Физический факультет МГУ
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова

Напечатано с готового оригинал-макета
в отделе оперативной печати физического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова
119991, ГСП-1, Москва,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2

ПОСТУПАЙ

ПРАВИЛЬНО

БАЗИС

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

КОНТАКТЫ

ТЕЛЕФОН +7 (495) 939-12-41

ПОЧТА welcome.ff@org.msu.ru

САЙТЫ phys.msu.ru open.phys.msu.ru vk.com/open.phys t.me/open_ff