

УДК 517.958:531.32

ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТРАТИФИКАЦИИ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКЕ

А. Б. Альшин, П. А. Чубенко

(кафедра математики)

Рассмотрены внутренняя и внешняя начально-краевые задачи для уравнения $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) - u = 0$ в трехмерном случае. Задачи поставлены с граничным условием Дирихле на поверхности из класса Ляпунова. С помощью метода динамических потенциалов доказаны теоремы существования и единственности решения.

Введение

Математические модели различных переходных процессов в изотропных полупроводниках приводят к однотипным задачам для интегродифференциальных и дифференциальных уравнений, родственных эллиптическим [1]. В настоящей работе рассмотрены задачи для одного из таких уравнений, которое представляет собой результат модели, предложенной для теоретического описания явления, наблюдающегося при исследовании переходных процессов в некоторых кристаллических полупроводниках [2, 3]. Наблюдаемый эффект заключался в том, что в первоначально однородном полупроводнике, облученном лазером, после помещения его в постоянное электрическое поле конденсатора наблюдалось образование слоев объемного заряда чередующихся знаков. Причем со временем толщина слоев уменьшалась, а их количество и абсолютная величина плотности заряда в каждом слое увеличивались. Это явление было названо эффектом стратификации объемного заряда в полупроводнике.

Исходная система уравнений, описывающая переходные процессы в полупроводнике, имеет вид [4]

$$\Delta_3 \varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \rho^\sigma = \rho - e(n_0 - n), \quad \frac{\partial \rho^\sigma}{\partial t} = e \frac{n_0 - n}{\tau},$$

где ρ — плотность объемного заряда в кристалле; ρ^σ — плотность объемного заряда, связанного на примесных центрах полупроводника; n_0 — равновесная концентрация электронов; n — концентрация свободных электронов, связанная с потенциалом $\varphi(x, t)$ электрического поля законом Больцмана; τ — характерное время жизни свободных электронов; ε — диэлектрическая проницаемость полупроводника; T_e — температура свободных электронов.

Выписанная система уравнений при начальном условии $\rho^\sigma(x, 0) = 0$ в классе функций $\varphi(x, t) \in C([0, +\infty); C^{(2)}(\Omega))$, где Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, редуцируется к одному интегродифференциальному нелинейному

уравнению [5]

$$\Delta_3 \varphi(x, t) + \frac{4\pi e n_0}{\varepsilon} \left(f(\varphi)(x, t) + \frac{1}{\tau} \int_0^t f(\varphi)(x, s) ds \right) = 0,$$

в котором $f(\varphi) = 1 - \exp(e\varphi/kT_e)$.

В случае если на границе области Ω задано распределение потенциала электрического поля $a(x, t)$, приходим к следующему граничному условию:

$$\varphi_{x \in \partial \Omega} = a(x, t), \quad x \in \partial \Omega, \quad t \geq 0,$$

где $a(x, t) \in C(\partial \Omega \times [0, +\infty))$ — заданная функция. При дополнительном условии $|ea(x, t)|/kT_e < 1$ интегродифференциальное уравнение может быть линеаризовано. Если, кроме того, предположить, что $\varphi(x, t) \in C^{(1)}([0, +\infty); C^{(2)}(\Omega))$, то в данном расширенном классе гладкости линеаризованное уравнение эквивалентно уравнению в частных производных третьего порядка составного типа, имеющего (после перехода к безразмерным переменным) вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) - u = 0. \quad (1)$$

В силу физической модели начальные условия при этом должны удовлетворять задаче

$$\begin{cases} \Delta u_0 - u_0 = 0, & x \in \hat{\Omega}, \\ u_0 = a(x, 0), & x \in \partial \hat{\Omega}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\hat{\Omega}$ — область безразмерных переменных, соответствующая области Ω .

1. Существование решения

1.1. Случай нулевых начальных данных

Первая внутренняя начально-краевая задача для уравнения стратификации в области $D \subset \mathbb{R}^3$, ограниченной поверхностью Ляпунова S с нулевыми начальными условиями, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) - u = 0, & M \in D, \quad t \in (0, T], \\ u(P, t) = g(P, t), & P \in S, \quad t \in [0, T], \\ u(M, 0) = 0, & M \in D. \end{cases} \quad (3)$$

Функцию $g(P, t)$ будем считать непрерывной по P , непрерывно дифференцируемой по t и непрерывно примыкающей к нулевым начальным условиям, а $u(M, t)$ — принадлежащей классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}(D))$ и непрерывно примыкающей к начальным и граничным условиям.

Задачи, родственные (3), подробно рассмотрены в [6] (например, для случая ионно-звуковых волн в немагнитной плазме).

Решение задачи (3) ищется в виде динамического потенциала двойного слоя [7, 8]:

$$u(M, t) = \int_S \mu(Q, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} \frac{e^{-R_{MQ}}}{R_{MQ}} d\sigma_Q + \int_0^t \int_S \mu(Q, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} H(R_{MQ}, \tau) d\sigma_Q d\tau, \quad (4)$$

где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q}$ — производная по внутренней нормали к поверхности, а функция H задается в виде обратного преобразования Лапласа по формуле

$$H(R_{MQ}, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt{\frac{p+1}{p}} R_{MQ}}}{R_{MQ}} - \frac{e^{-R_{MQ}}}{R_{MQ}} \right) e^{p\tau} dp. \quad (5)$$

Имеют место следующие 3 леммы.

Лемма 1. Для функции $H(r, t)$ справедливо представление

$$H(r, t) = e^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{n-1}}{n!} [\chi(t)^*]^n \delta(t), \quad (6)$$

где $\chi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T])$.

Лемма 2. Если $\mu(P, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}(S))$, то динамический потенциал, задаваемый формулой (4), удовлетворяет уравнению (1) в $(\mathbb{R}^3 \setminus S) \times (0, \infty)$.

Лемма 3. Скачок на границе S потенциала (4) совпадает со скачком потенциала двойного слоя для уравнения Кирхгофа [9]:

$$\lim_{M \rightarrow P \in S} u(M, t) = u(P, t) + 2\pi\mu(P, t), \quad M \in D, \quad (7)$$

$$\lim_{M \rightarrow P \in S} u(M, t) = u(P, t) - 2\pi\mu(P, t), \quad M \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}. \quad (8)$$

Для доказательства леммы 1 достаточно воспользоваться разложением в ряд Тейлора функции $\exp\left(-\left(\sqrt{\frac{p+1}{p}} - 1\right)r\right)$ по r и учесть свойства преобразования Лапласа. Доказательство лемм 2 и 3 непосредственно вытекает из свойств функции $H(R_{MQ}, \tau)$, следующих из представления (6). Таким образом, исходная задача сводится к следующему интегральному уравнению для $\mu(P, t)$, где $P \in S$:

$$2\pi\mu(P, t) + \int_S \mu(Q, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} \frac{e^{-R_{PQ}}}{R_{PQ}} d\sigma_Q + \int_0^t \int_S \mu(Q, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} H(R_{PQ}, \tau) d\sigma_Q d\tau = g(P, t). \quad (9)$$

Уравнение (9) допускает запись в операторной форме:

$$B[\mu](t) + \int_0^t A[\mu](t, \tau) d\tau = g(t). \quad (10)$$

Функции $\mu(P, t)$ и $g(P, t)$ рассматриваются при каждом t как элементы пространства $\mathbb{C}(S)$, а операторы A и B задаются по формулам

$$B[\mu] = 2\pi\mu(P, t) + \int_S \mu(Q, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} \frac{e^{-R_{PQ}}}{R_{PQ}} d\sigma_Q, \\ A[\mu] = \int_S \mu(Q, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} H(R_{PQ}, \tau) d\sigma_Q.$$

Доказательство существования решения уравнения (10) проводится с помощью метода последовательных приближений [10]. Легко заметить, что оператор B совпадает с оператором интегрального уравнения, соответствующего внутренней задаче Дирихле для уравнения Кирхгофа [9],

$$2\pi\nu(P) + \int_S \nu(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} \frac{e^{-R_{PQ}}}{R_{PQ}} d\sigma_Q = f(P).$$

Согласно теории потенциала для эллиптических уравнений [9], последнее имеет единственное решение $\nu(P)$ при любой непрерывной $f(P)$ (выполняется первая часть альтернативы Фредгольма [10]), причем $\nu(P) \in \mathbb{C}(S)$. Следовательно, оператор $B: \mathbb{C}(S) \rightarrow \mathbb{C}(S)$ имеет ограниченный обратный по теореме Банаха об обратном операторе [11]. Перепишем уравнение (10) в виде

$$\mu = B^{-1} \left[- \int_0^t A\mu d\tau + g \right].$$

Пусть $\mu = \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \mu_{n-1})$, где $\mu_0 = B^{-1}g$, $\mu_n = B^{-1} \left(- \int_0^t A\mu_{n-1} d\tau + g \right)$. Легко показать, что имеет место оценка, аналогичная соответствующей оценке в теории уравнения Вольтерра 2-го рода [10]:

$$\|\mu_n - \mu_{n-1}\|_{\mathbb{C}(S)} \leq \frac{\|B^{-1}\|^{n+1} K^n \beta^n}{n!} t^n,$$

где $K = \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} H \right\|_{\mathbb{C}(S \times S)} \cdot \mathcal{S}$, $\beta = \max_{t \in [0, T]} \|g\|$, а \mathcal{S} — площадь поверхности S . Эта оценка доказывает

равномерную сходимость ряда для μ , а следовательно, существование и единственность решения интегрального уравнения (10). При этом оно будет принадлежать нужному классу гладкости (см. лемму 2). Непрерывная дифференцируемость функции $\mu(P, t)$ по временной переменной становится очевидной, если взять производные по t от обеих частей рекуррентного соотношения

$$\mu_{n+1} - \mu_n = -B^{-1} \int_0^t A[\mu_n - \mu_{n-1}] d\tau$$

и учесть, что $g(P, t) \in C^{(1)}([0, T]; C(S))$. Результатом изложенного является

Теорема 1. Если функция $g(P, t)$ непрерывна по P , непрерывно дифференцируема по t и $g(P, 0) = 0$, то существует классическое решение задачи (3) в области D , ограниченной поверхностью Ляпунова S .

Внешняя задача Дирихле с нулевыми начальными данными ставится так же, как и внутренняя, с заменой $D \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus D$. Единственное отличие — требование регулярности решения на бесконечности, которое в данном случае может быть поставлено в наиболее слабой форме — в виде условия ограниченности: $\exists R_0$ и $K: \forall M, R_{M0} > R_0, \forall t \in (0, T]:$

$$|u(M, t)| \leq K.$$

Доказательство существования решения внешней задачи практически дословно повторяет рассуждения, проведенные для внутренней задачи, лишь вместо формулы (7) нужно воспользоваться формулой (8), что приведет к появлению знака «-» перед $2\pi\mu(P, t)$ в уравнении (9). Выполнение требования регулярности решения на бесконечности можно проверить, опираясь на следующую лемму:

Лемма 4. Для функции $H(r, t)$ справедливо представление

$$H(r, t) = \frac{i}{\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu e^{i\mu r}}{(\mu^2 + 1)^2} e^{-t/(\mu^2 + 1)} d\mu. \quad (11)$$

Доказательство. В соответствии с леммой Жордана

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2 + \frac{p+1}{p}} d\mu &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2 + \frac{p+1}{p}}, i\sqrt{\frac{p+1}{p}} \right] = \\ &= \pi i e^{\sqrt{(p+1)/p} r}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2 + 1} d\mu &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2 + 1}, i \right] = \pi i e^{-r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt{(p+1)/p} r}}{r} - \frac{e^{-r}}{r} \right) e^{pt} dp &= \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi i} \left(\frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2 + \frac{p+1}{p}} - \frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2 + 1} \right) d\mu e^{pt} dp &= \\ = \frac{i}{\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu e^{i\mu r}}{(\mu^2 + 1)^2} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\frac{p+1}{\mu^2 + 1}} e^{pt} dp \right) d\mu. \end{aligned}$$

Вычисление внутреннего интеграла (преобразование Меллина) дает утверждение леммы.

Интеграл (11) удовлетворяет лемме Жордана в верхней полуплоскости. При замене контура интегрирования на $\{\mu: \mu = i + \varepsilon e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ несложно прийти к оценке

$$|H(r, t)| \leq C_1(\varepsilon) \frac{e^{-r(1-\varepsilon)}}{r} e^{C_2(\varepsilon)t}, \quad (12)$$

которая обеспечивает регулярность решения $u(M, t)$ на бесконечности (эта же оценка будет иметь место и для производных функции H по пространственным аргументам). Таким образом, имеет место

Теорема 2. Если функция $g(P, t)$ непрерывна по P , непрерывно дифференцируема по t и $g(P, 0) = 0$, то существует классическое регулярное на бесконечности решение задачи (3) в области $\mathbb{R}^3 \setminus D$, где D ограничена поверхностью Ляпунова S .

1.2. Случай ненулевых начальных данных

В п. 1.1 было отмечено, что в начальный момент времени функция u должна удовлетворять задаче (2), поэтому естественным образом возникает вопрос о существовании решения при ненулевых начальных условиях. Исходная система (для внутренней задачи) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) - u = 0, & M \in D, \quad t \in (0, T], \\ u(P, t) = g(P, t), & P \in S, \quad t \in [0, T], \\ u(M, 0) = u_0(M), & M \in D. \end{cases} \quad (13)$$

Функция $g(P, t)$ по-прежнему считается непрерывной по P , непрерывно дифференцируемой по t и непрерывно примыкающей к начальным условиям, $u_0(M) \in C^{(2)}(D)$. Пусть $u = \tilde{u} + u_0$. Тогда для \tilde{u} получаем задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \tilde{u} - \tilde{u}) - \tilde{u} = u_0(M), \\ \tilde{u}(P, t) = g(P, t) - u_0(P), \\ \tilde{u}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Решение неоднородного уравнения $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \tilde{u} - \tilde{u}) - \tilde{u} = u_0(M)$ может быть получено с помощью объемного потенциала — свертки фундаментального

решения $v(r, t)$ уравнения (1) и правой части — функции u_0 . Обозначим этот потенциал как u_1 :

$$u_1(M, t) = \int_0^t \int_D u_0(Q) v(R_{MQ}, \tau) dv_Q d\tau. \quad (14)$$

Лемма 5. Для фундаментального решения уравнения (1) справедливы следующие представления:

$$v(r, t) = -\frac{1}{4\pi r} + \Psi(r, t), \quad (15)$$

где $\Psi(r, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{n-1}}{n!} [I + \psi(t)^*]^n \mathbf{1}(t)$, а функция $\psi(t) \in C([0, T])$;

$$v(r, t) = \frac{1}{4\pi r} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2 + 1} e^{-t/(\mu^2+1)} d\mu. \quad (16)$$

Сформулированная лемма является аналогом лемм 1 и 4 и доказывается исходя из интегрального вида фундаментального решения, полученного при помощи методов, развитых для уравнений данного типа в [1] (в данном случае методика сводится к преобразованию Лапласа по t обеих частей уравнения (1) с $\delta(M, t)$ вместо нуля в правой части, построению фундаментального решения полученного уравнения, совпадающего по форме с уравнением Кирхгофа, и осуществлению обратного преобразования Лапласа):

$$v(r, t) = -\frac{1}{4\pi r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{p} e^{pt - \sqrt{(p+1)/p} r} dp. \quad (17)$$

В частности, вывод формулы (16) опирается на представление

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mu r} \mu}{\mu^2 + \frac{p+1}{p}} d\mu &= \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{i\mu r} \mu}{\mu^2 + \frac{p+1}{p}}, i\sqrt{\frac{p+1}{p}} \right] = \pi i e^{-\sqrt{(p+1)/p} r}, \end{aligned}$$

подставляемое в формулу (17).

Согласно теории обобщенных функций, для квадратично интегрируемых u_0 построенный потенциал удовлетворяет неоднородному уравнению в обобщенном смысле. Для непрерывно дифференцируемых правых частей потенциал (14) является классическим решением неоднородного уравнения. Последнее имеет место в силу того, что у потенциала существуют первая по временной и вторые по пространственным переменным производные. В существовании названных производных легко убедиться, воспользовавшись представлением (15) из леммы 5. Отметим также, что построенный потенциал в этом случае на границе области D принадлежит классу

$C^{(1)}([0, T]; C(S))$. Пусть теперь $\tilde{u} = u_1 + u_2$. Тогда u_2 должна удовлетворять задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u_2 - u_2) - u_2 = 0, \\ u_2(P, t) = g(P, t) - u_0(P) - u_1(P, t), \\ u_2|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Существование решения этой задачи следует из теоремы 1.

При рассмотрении внешней задачи следует наложить условие на $u_0(M)$, так как решение должно быть регулярным на бесконечности. Это условие можно задать, например, в следующем виде: $\exists R_0$ и $\varkappa > 0$: $\forall M, R_{M0} > R_0$:

$$|u_0(M)| \leq e^{-\varkappa R_{M0}}. \quad (18)$$

Такое требование выглядит слишком сильным, однако для функций, являющихся решением задачи (2), оно всегда выполняется, а выполнение условия регулярности становится после получения оценки, аналогичной (12) (вывод опирается на представление (16) из леммы 5), очевидным. Итак, доказана

Теорема 3. Если $u_0(M)$ непрерывно дифференцируема, а $g(P, t)$ непрерывна по P , непрерывно дифференцируема по t и $g(P, 0) = u_0(P)$, то существуют классические решения внутренней и внешней (при выполнении условия (18)) задач Дирихле для уравнения стратификации.

2. Единственность решения

В предыдущем пункте было показано, что классические решения внутренней и внешней начально-краевых задач Дирихле для уравнения стратификации существуют и представимы в виде суммы динамических потенциала двойного слоя и объемного потенциала. Докажем, что эти решения единственны.

Теорема 4. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для уравнения стратификации имеют не более одного классического решения.

Доказательство. Рассмотрим задачу (13), где под D будем теперь подразумевать как внутреннюю, так и внешнюю область. Пусть $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ являются решениями данной задачи и $w = u^{(2)} - u^{(1)}$. Тогда w удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta w - w) - w = 0, \\ w(P, t) = 0, \\ w(M, 0) = 0, \end{cases}$$

которая при $w \in C^{(1)}([0, T]; C^{(2)}(D))$ допускает запись в эквивалентном виде

$$\begin{cases} \Delta w - w = \int_0^t w d\tau, \\ w|_S = 0. \end{cases}$$

Формально решение последней задачи выписывается с помощью функции Грина $G(M, Q)$ (функции влияния точечного источника) задачи Дирихле для уравнения Кирхгофа с однородными граничными условиями

$$\omega(M, t) = \int_D G(M, Q) \int_0^t \omega(Q, \tau) d\tau dv_Q,$$

из которого следует оценка (в силу положительности G)

$$|\omega(M, t)| \leq \max_{M \in D} \int_D G(M, Q) dv_Q \int_0^t \max_{Q \in D} |\omega(Q, \tau)| d\tau. \quad (19)$$

Поскольку $\omega(M, t)$ непрерывна по всем аргументам и регулярна на бесконечности (в случае внешней задачи), можно утверждать, что $|\omega| \leq W < \infty$. Заметим, что функция $G(M, Q)$ интегрируема по Q как для внутренней, так и для внешней задачи и величина интеграла ограничена при $M \in D$. Таким образом, справедлива оценка

$$|\omega| \leq K \int_0^t W d\tau = WKt, \quad K = \max_{M \in D} \int_D G(M, Q) dv_Q.$$

Подставляя последний результат в правую часть формулы (19), получим $|\omega| \leq W \frac{K^2 t^2}{2}$. Повторяя операцию n раз, получим оценку $|\omega| \leq W \frac{K^n t^n}{n!}$, где n произвольно. Такой оценке может удовлетворять

только $\omega \equiv 0$, что доказывает единственность решения исходной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-00122, 05-01-00144) и президентской программы поддержки молодых кандидатов наук (МК-1513.2005.9).

Литература

1. Плетнер Ю.Д. // ЖВМ и МФ. 1992. **32**, № 12. С. 1885.
2. Астратов В.Н., Ильинский А.В., Киселев В.А. // Физика твердого тела. 1984. **26**, № 9. С. 2843.
3. Фурман А.С. // Физика твердого тела. 1986. **28**, № 7. С. 2083.
4. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 8. С. 1237.
5. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. // ЖВМ и МФ. 1999. **39**, № 6. С. 1006.
6. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. М., 1998.
7. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи нестационарной теории внутренних волн. М., 1990.
8. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М., 1986.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977.
10. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М., 2002.
11. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию
04.10.06