

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

На правах рукописи
УДК 534.2 : 517.9

МОРОЗОВ Сергей Александрович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРОГИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ
ОБРАТНЫХ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ
АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ**

Специальность: 01.04.06 – акустика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре акустики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Валентин Андреевич БУРОВ

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Петр Георгиевич ГРИНЕВИЧ,
Институт Теоретической физики им. Л.Д.Ландау

кандидат физико-математических наук,
доцент Виталий Борисович ВОЛОШИНОВ,
физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова

Ведущая организация: Институт проблем управления
Российской Академии наук, г.Москва

Защита диссертации состоится “ 1 ” ноября 2007 г. в 16-00 часов на заседании Специализированного Совета Д.501.001.67 в МГУ им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, г. Москва, ГСП-2, Ленинские Горы, МГУ, физический факультет, Центральная физическая аудитория им. Р.В.Хохлова

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке физического факультета МГУ им М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан “ 28 ” сентября 2007 г.

Ученый секретарь
Специализированного Совета Д.501.001.67
кандидат физико-математических наук

А.Ф. КОРОЛЕВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление в современной математической физике и ее прикладных областях. Значительный интерес к акустическим обратным задачам рассеяния главным образом обусловлен необходимостью решения актуальных проблем медицинской диагностики, разработки акустических томографов, более безопасных, чем рентгеновские, и менее дорогостоящих, чем ЯМР-томографы. Кроме медицинских приложений, которым в последнее время посвящается все больший объем теоретических и экспериментальных исследований в различных областях науки и техники, актуальными являются обширные прикладные проблемы дефектоскопии, геоакустики и акустики океана.

В акустике под обратными задачами понимается восстановление источников звука или характеристик неоднородностей, рассеивающих первичное поле, на основе измерения первичного или рассеянного акустического поля. Исторически первые методы решения основывались на приближении однократного рассеяния (приближение Борна) и плавного изменения характеристик рассеяния (приближение Рытова). Однако предположения, используемые в этих приближениях, накладывают серьезные ограничения на область их применимости. Дальнейшие исследования, связанные с учетом эффектов многократного рассеяния, показали, что обратная задача рассеяния является некорректной и нелинейной относительно неизвестных функций. Один вариант решения обратных задач, учитывающий многократные рассеяния, – итерационный. Положительная черта итерационного подхода состоит в том, что в нем можно использовать самые разные данные (фрагментарные, неполные и т.п.). Однако имеется существенное ограничение: если сходимость итераций для сильных рассеивателей и может быть обеспечена, то с очень большими трудностями и ценой очень большого увеличения объема вычислений. Кроме того, в случае использования неполных данных, впоследствии возникает необходимость решения множества вспомогательных задач для каждого из положений источника или каждой из частот. Таким образом, размерность и сложность вычислений вспомогательных задач резко возрастает.

Другой вариант решения – это функциональные методы, берущие начало в квантовой теории и до сих пор не применявшиеся при решении акустических обратных задач. Между тем, функционально-аналитические методы решения обратных задач рассеяния в их квантовой постановке начали развиваться рядом авторов в 50-е годы. Основоположниками функциональных методов являются И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, М.Г.Крейн, В.А.Марченко, Л.Д.Фаддеев, Р.Ньютон, Ю.М.Березанский, а также Г.Мозес, Р.Проссер. В настоящее время функционально-аналитические методы еще находятся в стадии развития. Вопрос о возможности их применения в прикладных обратных задачах разных направлений пока всерьез не исследовался. Поэтому *актуальность темы*

представляемой работы заключается в детальном анализе функционально-аналитических методов с точки зрения возможности и границ их применения в прикладных обратных задачах рассеяния в приложении к медицине, дефектоскопии, океанологии. Так, модовое описание процессов в океане делает задачу либо строго двумерной, либо приводит к набору двумерных задач, которые в адиабатическом приближении не взаимосвязаны между собой. Технологические и дефектоскопические задачи также в ряде случаев могут быть сведены к двумерным. Для таких задач рассматриваемый в диссертационной работе двумерный алгоритм Новикова-Гриневича, строящийся на основе функционально-аналитических методов, является перспективным, хорошо реализуемым на современных вычислительных машинах.

В диссертационной работе ставятся следующие цели:

1. Определение условий единственности, степени устойчивости и границ применимости функциональных методов на базе алгоритмов Марченко-Ньютона-Роуза и Новикова-Гриневича.
2. Исследование возможностей алгоритмов в приложении к задачам восстановления тонкой структуры сложного рассеивателя на фоне крупных неоднородностей, включая неоднородности с одновременным присутствием рефракции и поглощения.
3. Оценка требований на систему съема данных, а также оптимизация численных схем для быстрого получения качественных акустических томограмм в медицинских целях.

Задачи диссертационной работы:

1. Сравнительный анализ функциональных методов решения обратных задач рассеяния, первоначально нацеленных на решение квантомеханических задач, применительно к решению задач акустической томографии.
2. Исследование алгоритма Марченко-Ньютона-Роуза (МНР) и его модификации для произвольного спектра облучающего поля применительно к обратным задачам акустического рассеяния.
3. Разработка численных схем алгоритма МНР во временной и частотной областях с использованием дополнительных уравнений связи.
4. Анализ результатов численного моделирования алгоритма МНР.
5. Модификация алгоритма МНР на основе обобщенных полей, введенных Л.Д. Фаддеевым, и использование аналитичности функций. Анализ взаимосвязи алгоритма МНР и алгоритма Новикова-Гриневича.
6. Анализ алгоритма Новикова-Гриневича и обсуждение его применимости к обратным задачам акустического рассеяния.
7. Проведение численного моделирования модифицированного алгоритма МНР и оценка его помехоустойчивости.

8. Сравнительное численное моделирование процесса восстановления рассеивателей различных типов с использованием алгоритма Новикова-Гриневича, анализ результатов, оценка вычислительных затрат.

Научная новизна работы

1. Впервые проведено детальное и систематическое исследование возможностей функциональных алгоритмов на примерах модельных задач, решаемых в акустических томографах различного назначения.
2. Проведен анализ и дана физическая интерпретация акустических данных рассеяния на неоднородностях исчезающе малых размеров (квазиточечных рассеивателей).
3. Получены положительные результаты по перспективности использования метода Новикова-Гриневича в задачах, где одновременно присутствуют крупные и мелкие рассеивающие неоднородности.
4. Получена оценка области применимости алгоритмов в практических задачах, которая оказалась на порядок больше, чем это следует из мажорантной оценки авторов алгоритма.
5. Разработан модифицированный алгоритм МНР, устранивший неединственность его первоначального варианта.
6. Впервые показана и продемонстрирована на примерах решения обратной задачи рассеяния однозначная связь между амплитудой и фазой поля, рассеянного классическим квазиточечным рассеивателем.

Достоверность представленных результатов диссертации подтверждается численным моделированием, а также соответствием полученных результатов теоретическим расчетам и данным решения прямой задачи, имитирующим экспериментально измеряемые величины.

Научная и практическая значимость работы:

1. Показана практическая возможность, а также практическая реализуемость и высокие прикладные качества функционально-аналитических методов, делающих их пригодными для применения в реальных акустических системах, в первую очередь, медицинского назначения.
2. Найденная в работе однозначная связь между амплитудой и фазой точечного рассеивателя позволяет по-новому поставить общий вопрос об аппаратной функции, как характеристике томографической системы, и контроле, с ее помощью, адекватности алгоритмических систем различного назначения.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Адаптация и анализ возможности применения квантовомеханических алгоритмов решения обратных задач рассеяния к прикладным задачам акустического томографирования различного типа.
2. Основным результатом проведенного рассмотрения – практическая перспективность и целесообразность использования этих алгоритмов, дающих строгое решение обратной задачи с учетом процессов перерассеяния.
3. Анализ адекватности решения обратных задач рассеяния в типовых и максимально сложных ситуациях восстановления мелких деталей рассеивателя на фоне крупных искажающих неоднородностей.
4. Наличие однозначной связи между амплитудой и фазой поля, рассеянного квазиточечной неоднородностью, как метод контроля качества решения и адекватности возможных алгоритмов томографирования, которые могут быть предложены в дальнейшем.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на X сессии Российского Акустического Общества (Москва, 2000); на 24-м (Santa Barbara, USA, 1998), 25-м (Bristol, UK, 2000) и 26-м (Windsor, Canada, 2002) Международных Симпозиумах «Acoustical Imaging»; на I Евразийском конгрессе по медицинской физике и инженерии “Медицинская физика – 2001” (Москва, 2001); на семинаре «Динамические обратные задачи» в Санкт-Петербургском отделении Математического института РАН им.Стеклова (2001); на научных семинарах кафедры акустики физического факультета МГУ.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 10 работах (из них 3 – в рецензируемых журналах), список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы, включающей 94 наименования. Общий объем работы составляет 198 страниц, включая 160 страниц текста и 40 рисунков.

Личный вклад автора заключается в участии в разработке программы исследования решения обратной задачи рассеяния на основе функционально-аналитических методов. Все работы по математическому моделированию и по анализу полученных теоретических и прикладных результатов проведены им лично.

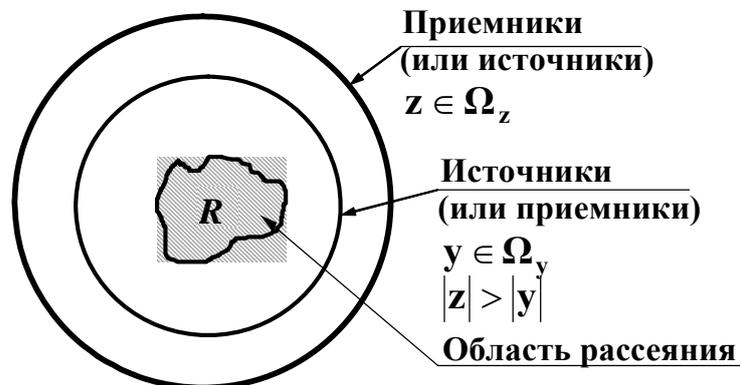
СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первой главе** (введении) дана общая характеристика работы, включая актуальность темы, изложение основных целей, задач, результатов диссертации, выносимых на защиту.

Вторая глава состоит из четырех разделов и посвящена теоретическому и численному анализу возможности практической реализации метода решения обратной задачи рассеяния путем восстановления поля внутри рассеивающей неоднородности.

В **разделе 2.1** проведено детальное исследование алгоритма Марченко-Ньютона-Роуза (МНР), первоначально предназначавшегося его авторами для решения обратной задачи квантово-механического рассеяния и обобщенного в диссертации применительно к обратным задачам акустического рассеяния. В основе метода лежит интегральное уравнение, связывающее значения внутреннего поля с экспериментальными данными рассеяния. Предполагалась возможность восстановления волнового поля внутри искомого рассеивателя из линейной системы уравнений без параллельного оценивания неизвестной функции рассеивателя.

Имеется ограниченная область R с неоднородной фазовой скоростью звука $c(\mathbf{r}) = \{ c(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in R; c_0, \mathbf{r} \notin R \}$:



Запаздывающая и опережающая функции Грина неоднородной среды (G^+ и G^-) подчиняются уравнениям Гельмгольца с δ -образной правой частью:

$$\Delta_{\mathbf{r}} G^+(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{y}) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})} G^+(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \Omega_y \quad (1)$$

$$\Delta_{\mathbf{r}} G^-(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})} G^-(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R. \quad (2)$$

Следствием соотношений (1) и (2) является уравнение МНР для полного поля в частотном представлении [1]:

$$G^-(\omega, \mathbf{y}, \mathbf{x}) - G^+(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \oint_{\Omega_z} d\sigma_z \left\{ \frac{\partial G^+(\omega, \mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial n_z} \cdot G^-(\omega, \mathbf{z}, \mathbf{x}) - G^+(\omega, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \cdot \frac{\partial G^-(\omega, \mathbf{z}, \mathbf{x})}{\partial n_z} \right\}.$$

Тогда во временном представлении для рассеянных полей $g^\pm \equiv G^\pm - G_0^\pm$ (G_0^\pm – падающее поле) при $\delta(t)$ -образном внешнем воздействии, формирующем зондирующий сигнал, это уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} & g^\mp(t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) - g^\pm(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \oint_{\Omega_z} d\sigma_z \left\{ \frac{\partial G^\pm(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial n_z} \cdot g^\mp(t - \tau, \mathbf{z}, \mathbf{x}) - G^\pm(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \cdot \frac{\partial g^\mp(t - \tau, \mathbf{z}, \mathbf{x})}{\partial n_z} \right\} = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \oint_{\Omega_z} d\sigma_z \left\{ \frac{\partial g^\pm(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial n_z} \cdot G_0^\mp(t - \tau, \mathbf{z}, \mathbf{x}) - g^\pm(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \cdot \frac{\partial G_0^\mp(t - \tau, \mathbf{z}, \mathbf{x})}{\partial n_z} \right\} \end{aligned}$$

Дополнительно используется причинная связь:

$$g^+(t, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0 \text{ при } \forall t < \tau^+ \equiv \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}{\max_{\mathbf{r}} c(\mathbf{r})}; \quad g^-(t, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0 \text{ при } \forall t > \tau^- \equiv \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}{\max_{\mathbf{r}} c(\mathbf{r})}.$$

В диссертации разработана модификация алгоритма МНР, допускающая любой спектр облучающего поля.

Раздел 2.2 посвящен обсуждению полученных впервые результатов численного моделирования алгоритма МНР, важное преимущество которого – *линейность* относительно неизвестных полей внутри рассеивателя. Проиллюстрировано, что даже во временном представлении решение обладает неединственностью: полученные оценки полей, отличные от заданных, также являются решениями (рис.1).

В разделе 2.3 исследуются причины неединственности решения и предпринимается попытка ее устранения путем использования дополнительных уравнений связи типа Липпмана-Швингера (которые нелокальны и неоднородны) при сохранении линейности решаемой задачи.

В разделе 2.4 подводятся итоги главы 2. В связи с неединственностью решения, алгоритм МНР не является самостоятельным методом восстановления акустических характеристик рассеивающих объектов. Он может служить в качестве составной части для повышения помехоустойчивости в других алгоритмах, обеспечивающих однозначное восстановление акустических характеристик. Для обеспечения единственности решения, в алгоритм МНР нужно добавить дополнительное ограничивающее условие, не вытекающее из анализа физических волновых процессов.

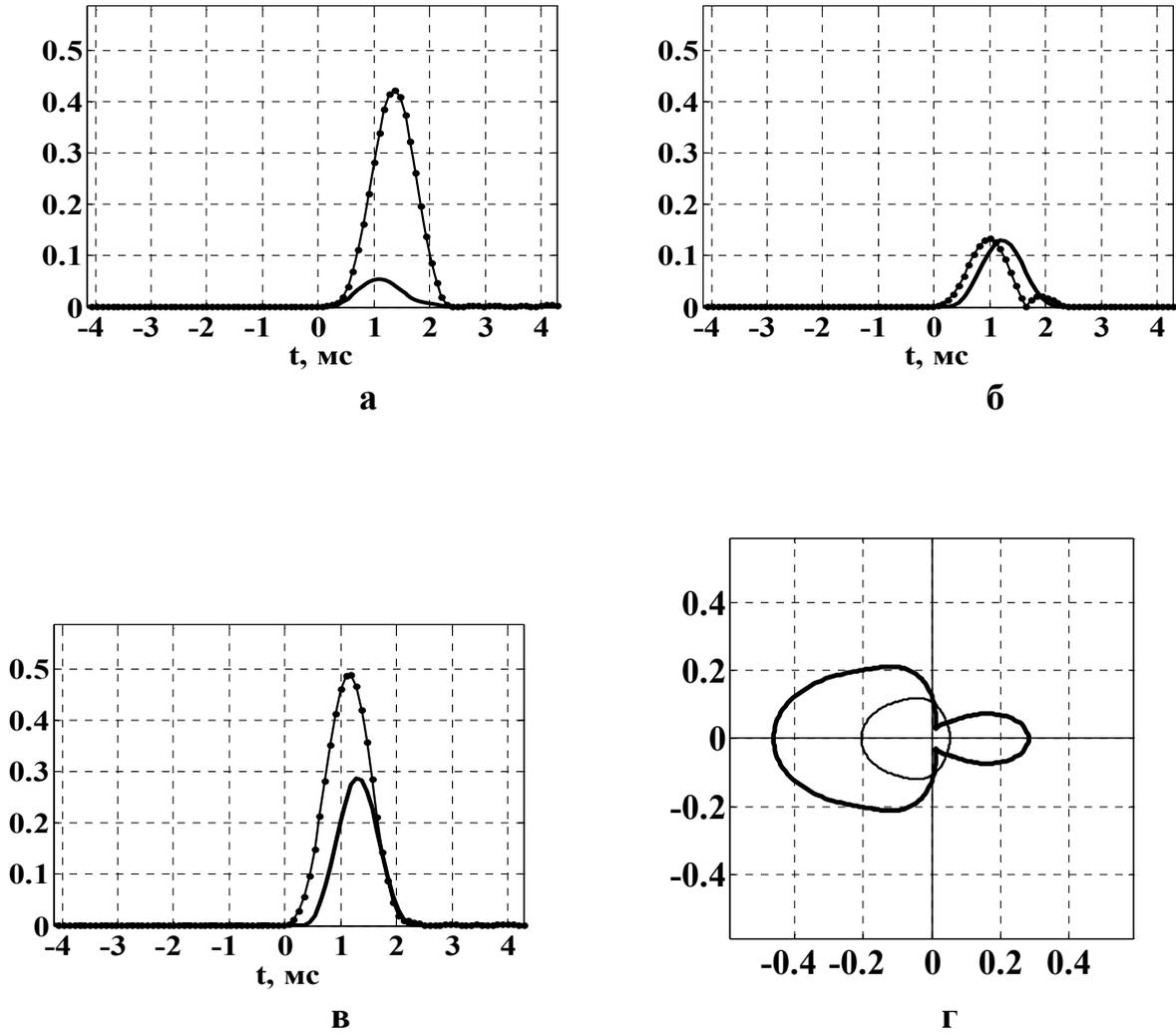


Рис.1. Абсолютные значения истинного рассеянного поля (сплошная линия) и восстановленного поля (линия с точками) для цилиндрического рассеивателя радиуса $0.75\lambda_0$ с относительной скоростью $c_1/c_0 = 1.1$. Точка восстановления $x_1 = (0.5\lambda_0, 0)$ находится внутри цилиндра; угловое положение излучателя составляет $\varphi_y = 0$ (а), $\pi/2$ (б), π (в). Абсолютные значения истинного поля (сплошная тонкая линия) и восстановленного поля (сплошная толстая линия) в зависимости от углового положения точки излучения (г).

Третья глава состоит из девяти разделов. Она посвящена анализу и модельной реализации строгих двумерных функционально-аналитических алгоритмов решения обратной задачи рассеяния: модифицированному алгоритму МНР и алгоритму Новикова-Гриневича [2–6].

В разделе 3.1 излагается формализм комплексных волновых векторов в применении к решению обратных задач рассеяния в монохроматическом режиме.

Скалярная обратная задача рассеяния предполагает восстановление скалярной функции рассеивателя $v(\mathbf{r}) = (k_0^2 - k^2(\mathbf{r})) - i2\omega\alpha(\mathbf{r}, \omega)/c(\mathbf{r})$, где $k_0 = \omega/c_0$ и c_0 – волновое число и фазовая скорость в однородной непоглощающей фоновой среде; $k(\mathbf{r}) = \omega/c(\mathbf{r})$ и $c(\mathbf{r})$ – в присутствии рассеивателя; $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ – амплитудный коэффициент поглощения. Временная зависимость далее полагается $\sim \exp(-i\omega t)$. Экспериментальными данными рассеяния является амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv f(\varphi, \varphi')$ плоских волн для всех направлений падения $\mathbf{k} = \{k_0, \varphi\}$ и рассеяния $\mathbf{l} = \{k_0, \varphi'\}$.

Ключевой момент функционально-аналитических методов – это формальное распространение волновых векторов в область комплексных значений путем введения мнимых частей \mathbf{k}_I и \mathbf{l}_I волновых векторов, удовлетворяющих условиям:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I, \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}_R + i\mathbf{l}_I, \quad \mathbf{k}_R \perp \mathbf{k}_I, \quad \mathbf{k}^2 = k_0^2; \quad \mathbf{k}_R, \mathbf{k}_I \in \mathbb{R}^n.$$

С физической точки зрения этот прием означает переход от плоских однородных волн к волнам неоднородным. В двумерной задаче существуют лишь две ортогональные ориентации ненулевой мнимой части волнового вектора относительно его действительной части (рис.2).

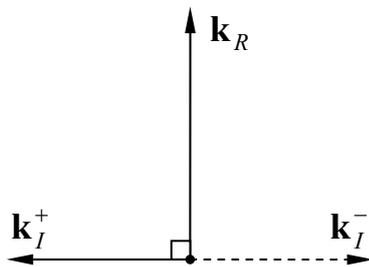


Рис.2. Левосторонняя и правосторонняя ортогональные ориентации вектора мнимой части относительно вектора действительной части (в двумерном случае).

Переход к комплексным волновым векторам предполагает обобщение функций, зависящих от волновых векторов, на случай комплексных аргументов. Так, обобщенное волновое поле $\psi = \psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ подчиняется уравнению:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + \mathbf{k}^2\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = v(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}); \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^n, \quad \mathbf{k}^2 = k_0^2.$$

При этом используется прием снятия несущей волны с падающего поля, что аналогично снятию несущей частоты при временной обработке: $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$. Поле $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ подчиняется уравнению типа

$$\text{Липпмана-Швингера:} \quad \mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = 1 + \int_{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^n} G_\mu(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{k}) \cdot \mu(\mathbf{r}', \mathbf{k}) \cdot v(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

где $G_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ – функция Грина, введенная Л.Д.Фаддеевым; n – размерность пространства. Классические значения $G_0^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R)$ функций Грина получаются как предельные значения при $|\mathbf{k}_I| \rightarrow 0$, если \mathbf{k}_R и \mathbf{k}_I либо сонаправлены ($\mathbf{k}_I \uparrow \uparrow \mathbf{k}_R$), либо направлены противоположно ($\mathbf{k}_I \uparrow \downarrow \mathbf{k}_R$).

В разделе 3.2 уравнения типа МНР рассматриваются в терминах обобщенных вторичных источников и данных рассеяния, а также исследуется роль соотношения Сохоцкого для обеспечения единственности решения модифицированного алгоритма МНР.

Процедура восстановления характеристик двумерного рассеивателя имеет несколько этапов:

Этап 1: расчет обобщенной амплитуды рассеяния $h^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv h^\pm(\varphi, \varphi')$ (при $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm \rightarrow 0$) из экспериментальных данных:

$$h^\pm(\varphi, \varphi') - \pi i \int_0^{2\pi} h^\pm(\varphi, \varphi'') \cdot \theta[\pm \sin(\varphi'' - \varphi)] \cdot f(\varphi'', \varphi') d\varphi'' = f(\varphi, \varphi'). \quad (3)$$

Уравнение (3), линейное относительно неизвестной функции h^\pm , учитывает перерассеяния волн на неоднородности среды, что придает нелинейный характер уравнению относительно экспериментальных данных $f(\varphi, \varphi')$.

Этап 2: из $h^\pm(\varphi, \varphi')$ вычисляется функция $\rho(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv \rho(\varphi, \varphi')$ – ядро в интегральном уравнении связи предельных значений $\psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ волновой функции $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, т.е. в ρ -соотношении (это модифицированное уравнение МНР):

$$\psi^+(\mathbf{r}, \varphi) - \psi^-(\mathbf{r}, \varphi) = \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') \cdot \psi^-(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi'. \quad (4)$$

Здесь

$$\rho(\varphi, \varphi') + \pi i \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi'') f_1(\varphi'', \varphi') \theta[\sin(\varphi' - \varphi'')] d\varphi'' = -\pi i f_1(\varphi, \varphi'), \quad (5)$$

где $f_1(\varphi, \varphi') = \theta[-\sin(\varphi' - \varphi)]h^+(\varphi, \varphi') - \theta[\sin(\varphi' - \varphi)]h^-(\varphi, \varphi')$.

В классическом случае роль ψ^\pm играют запаздывающая и опережающая волновые функции u^\pm : $u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - u^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = -2\pi i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n} f^+(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \delta(\mathbf{k}^2 - \mathbf{l}^2) u^-(\mathbf{r}, \mathbf{l}) d\mathbf{l}$.

Соотношение Сохоцкого ($\mathbf{k} = \{k_x, k_y\} \in \mathbb{C}^2$) характеризует связь между полем $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv \mu(\mathbf{r}, \varphi)$ и его предельными значениями μ^\pm :

$$\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\{\mu^+(\mathbf{r}, \varphi'') - \mu^-(\mathbf{r}, \varphi'')\} \exp(i\varphi'')}{\exp(i\varphi'') - \frac{k_x + ik_y}{k_0}} d\varphi'' \quad (6)$$

Тогда линейная система, состоящая из модифицированных уравнений МНР (4) и одного из уравнений Сохоцкого (6), рассматриваемого для $\mu \rightarrow \mu^\pm$ (при $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm \rightarrow 0$), обеспечивает единственность восстановления внутренних полей. Преимущества данного модифицированного алгоритма МНР таковы: а) сохраняется свойство линейности относительно неизвестных полей μ^\pm или их угловых гармоник; б) эта система не требует знания “нефизических” данных рассеяния; в) система однозначно разрешима, что обеспечивается неоднородностью уравнений Сохоцкого и тем обстоятельством, что уравнения Сохоцкого из всех возможных решений, удовлетворяющих уравнениям МНР, выделяют только те решения, которые обладают требуемым свойством аналитичности.

На заключительном этапе модифицированный алгоритм МНР предполагает восстановление функции рассеивателя из уравнения Липпмана-Швингера или уравнения Гельмгольца:

$$v(\mathbf{r}) = k_0^2 + \frac{\Delta \psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)}{\psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)}.$$

Более изящный путь – алгоритмическое объединение всех ракурсов поля при нахождении рассеивателя – реализуется в алгоритме Новикова-Гриневича, описанию и обсуждению характерных особенностей которого посвящен **раздел 3.3**. Этапы 1 и 2 этого алгоритма не изменяются.

Этап 3. Оцененные $\rho(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ позволяют найти значения разностного поля $K(\mathbf{r}, \varphi) \equiv \mu^+(\mathbf{r}, \varphi) - \mu^-(\mathbf{r}, \varphi)$:

$$K(\mathbf{r}, \varphi) = \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') \exp(ik_0 \{x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)\}) \times \left[1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(\mathbf{r}, \varphi'') \exp(i\varphi'') d\varphi''}{\exp(i\varphi'') - (1 + 0) \exp(i\varphi')} \right] d\varphi'. \quad (7)$$

Выражение (1+0) в (7) означает присутствие бесконечно малой положительной добавки к единице.

Этап 4. Поле $K(\mathbf{r}, \varphi)$ связано *линейно* с искомой функцией рассеивателя:

$$v(\mathbf{r}) = -\frac{k_0}{2\pi} \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^{2\pi} K(\mathbf{r}, \varphi) \exp(i\varphi) d\varphi ; \quad \mathbf{r} = \{x, y\}; \quad \mathbf{k} = \{k_0, \varphi\}. \quad (8)$$

Показывается, что “линеаризация” задачи достигается благодаря свойствам симметрии предельных значений обобщенных функций Грина-Фаддеева $G_\mu^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ относительно направления вектора $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, и интегрированию по всем углам падения плоской волны φ . Кроме того, пространственный спектр $T(\xi, \mathbf{k}) \equiv \int F^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(-i\xi\mathbf{k}) d\mathbf{r}$ классических вторичных источников $F^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv v(\mathbf{r}) \cdot u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ должен быть локализован внутри круга радиуса $2k_0$ (рис.3):

$$T(\xi, \mathbf{k}) = 0 \quad \text{при} \quad |\xi - \mathbf{k}| \geq 2k_0. \quad (9)$$

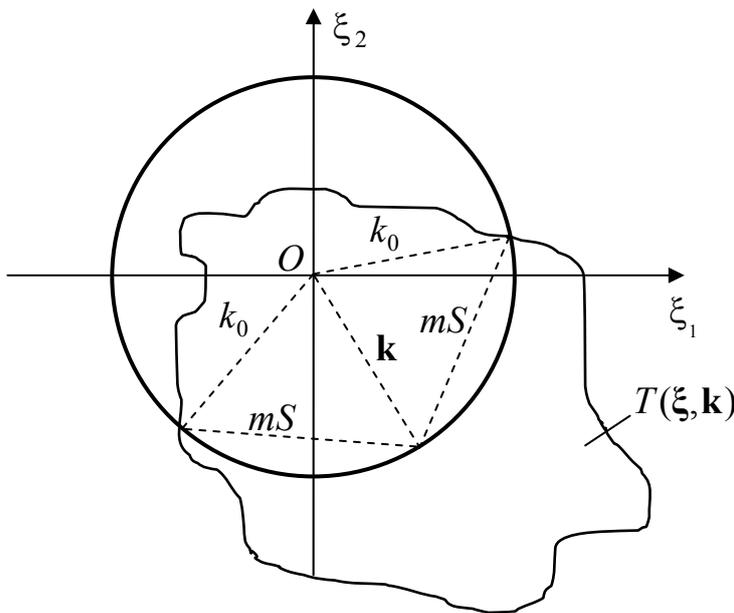


Рис.3. m -кратное расширение спектра T по сравнению со спектром \tilde{v} дает $T(\xi, \mathbf{k}) \approx 0$ при $|\xi - \mathbf{k}| \geq mS$, так как $\tilde{v}(\xi) \approx 0$ при $|\xi| \geq S$. Рассеяние назад не появляется, если $mS < 2k_0$.

Характерные особенности алгоритма Новикова-Гриневича:

1. Учитываются эффекты многократного рассеяния волн, однако алгоритм остается линейным относительно искомой функции рассеивателя.
2. Ограничение в виде отсутствия рассеяния назад – это требование на устойчивость решения двумерной монохроматической задачи рассеяния.

3. Для медицинских приложений диапазон приемлемых, с этой точки зрения, частот лежит в пределах от десятков кГц до нескольких МГц.
4. Функция рассеивателя может быть найдена в любой фиксированной точке пространства независимо от ее значений в остальных точках, что удобно для применения в практических приложениях. Это уникальное свойство алгоритма.
5. Существенная экономия вычислительных затрат по сравнению с традиционными итерационными методами. Для восстановления функции рассеивателя во всей области рассеяния требуется порядка N^4 операций, где N – количество направлений приема рассеянного поля для каждого из N направлений зондирования.

Возможно обобщение алгоритма на случай неоднородной фоновой среды.

Недостатки метода:

1. Не допускает простого обобщения на трехмерное пространство.
2. Прямое обобщение алгоритма на импульсный режим зондирования приводит к существенному возрастанию количества вычислительных операций.

В разделе 3.4 исследуется связь между амплитудой и фазой поля, рассеянного на точечной неоднородности. Это исследование связано с тем, что вопрос о виде аппаратной функции алгоритма Новикова-Гриневича более сложен в связи с нелинейностью процедуры обработки относительно экспериментальных данных. С другой стороны, анализ уравнений МНР привел к обнаружению однозначной взаимосвязи между силой точечного рассеивателя и фазой рассеянного на нем поля. Эта связь является строгим и чисто классическим аналогом результата, полученного Л.Д.Фаддеевым для δ -образных рассеивающих потенциалов в квантовой механике [7]. Ее существование подтверждено при численном анализе аппаратной функции алгоритма Новикова-Гриневича.

Пусть имеется рассеиватель с исчезающе малыми размерами: $v_\delta(\mathbf{r}) \sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_0)$. Тогда оказывается, что процессы перерассеяния на нем могут быть описаны в виде $v_\delta(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \beta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_0) u_0(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, где $u_0 \equiv u_0^\pm$ – классическое падающее поле, $u \equiv u^\pm$ – полное поле. Найдена связь между амплитудой $|\beta|$ и фазой ϕ коэффициента рассеяния $\beta \equiv |\beta| \exp(i\phi)$, имеющая в двумерном случае вид:

$$|\beta| = -4 \sin \phi, \quad \text{или} \quad |\beta|^2 + 4 \operatorname{Im}(\beta) = 0.$$

Справедливость этой связи подтверждена результатами численного моделирования (рис.4а). Проиллюстрировано также, что точечный рассеиватель обязательно создает эффекты перерассеяния собственного ближнего поля, и никогда не становится слабым рассеивателем (рис.4б). Одновременно выяснено, что потеря устойчивости решения в алгоритме Новикова-Гриневича наступает,

если обратная обусловленность системы (7), решаемой относительно внутреннего поля, ухудшается до $\cong 10^{-5}$ (рис.5).

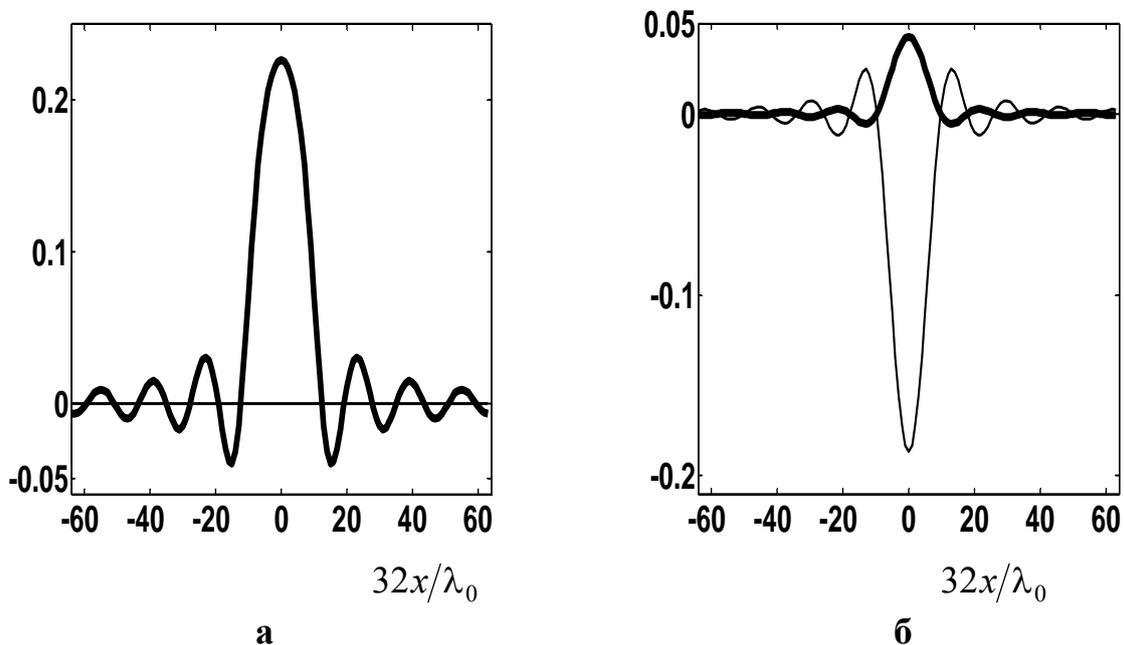


Рис.4. Сильный точечный рассеиватель ($|\beta| = 3.9$, $\phi = -77.16^\circ$): результат восстановления с учетом многократных рассеяний (а) и в приближении Борна (б).

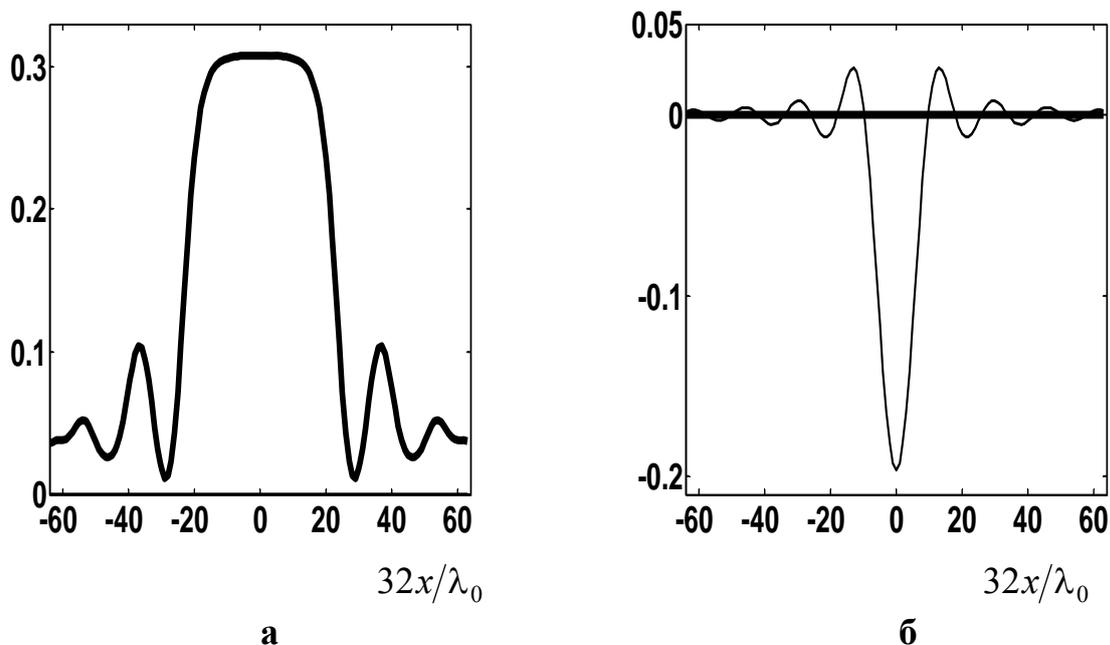


Рис.5. Сильный точечный рассеиватель ($|\beta| = 3.999999$, $\phi = -89.96^\circ$), иллюстрирующий границы работоспособности алгоритма Новикова-Гриневича: результат восстановления с учетом многократных рассеяний (а) и в приближении Борна (б).

В разделе 3.5 приводятся результаты численного восстановления рассеивателей и волновых полей алгоритмом Новикова-Гриневича и модифицированным алгоритмом МНР. Иллюстрируется эквивалентность конечной оценки рассеивателя, получаемой каждым из подходов при использовании всех ракурсов зондирования, и, одновременно, удобство последнего этапа алгоритма Новикова-Гриневича.

Моделирование процесса восстановления рассеивателей различных типов, обусловленных неоднородностями как фазовой скорости, так и поглощения, с помощью алгоритма Новикова-Гриневича осуществлено впервые (п.3.5.1). Численно подтверждены высокие точностные характеристики алгоритма. А именно, при отсутствии шумовых помех восстановленная функция рассеивателя практически совпадает с эталонной (рис.6), если объем дискретизованных данных рассеяния превышает минимально необходимый объем, а пространственный спектр вторичных источников практически не выходит за круг радиуса $2k_0$, т.е. выполняется условие (9). Показано, что

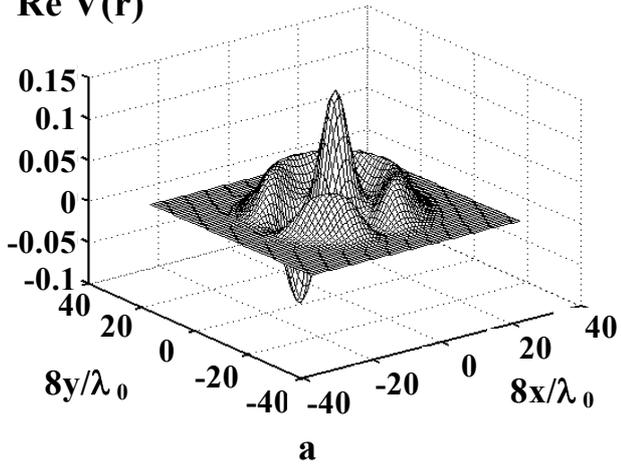
ограничение на норму данных рассеяния $\|f(\varphi, \varphi')\| \equiv \sqrt{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' |f(\varphi, \varphi')|^2} < \frac{1}{3\pi}$,

оговариваемое авторами алгоритма, носит сильно мажорантный характер. Реальные возможности алгоритма гораздо выше, а критическое значение $\|f\|$ по крайней мере на порядок больше.

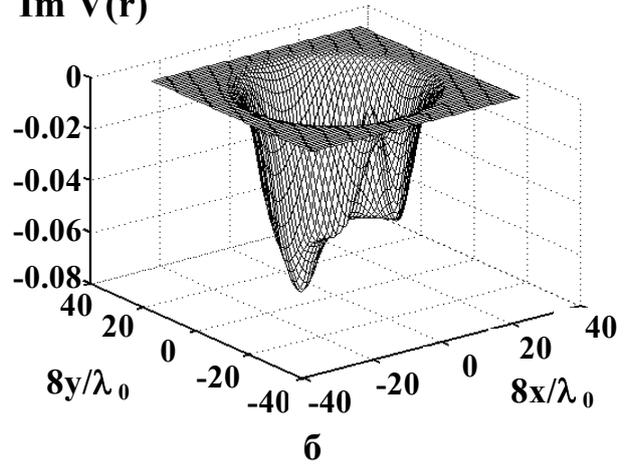
При восстановлении модифицированным алгоритмом МНР (п.3.5.2) проиллюстрировано, что линейная система, состоящая из модифицированных уравнений МНР и уравнений Сохоцкого, обеспечивает единственность восстановления внутренних полей (рис.7).

В разделе 3.6 на основе моделирования данных рассеяния для сильных рассеивателей из соотношения унитарности для T -матрицы проиллюстрировано, что постепенное увеличение силы рассеивателя проявляется в монотонном ухудшении обусловленности систем уравнений, приводящих к решению задачи, т.е. в повышении чувствительности решения к различного рода помехам. Помехи имеют двоякую природу. Во-первых, это шумы эксперимента, влияние которых может быть, в принципе, уменьшено как техническими средствами, так и избыточностью (типа многочастотности) данных рассеяния. Во-вторых, как показано **в разделе 3.7**, это составляющие рассеянных полей (данных рассеяния), порожденные высокочастотными компонентами в пространственных спектрах рассеивателя и его вторичных источников. В случае присутствия этих компонент, уменьшение их влияния на качество восстановления в рамках монохроматической задачи невозможно (рис.8). В итоге ошибки восстановления определяются общим уровнем помех обоих типов.

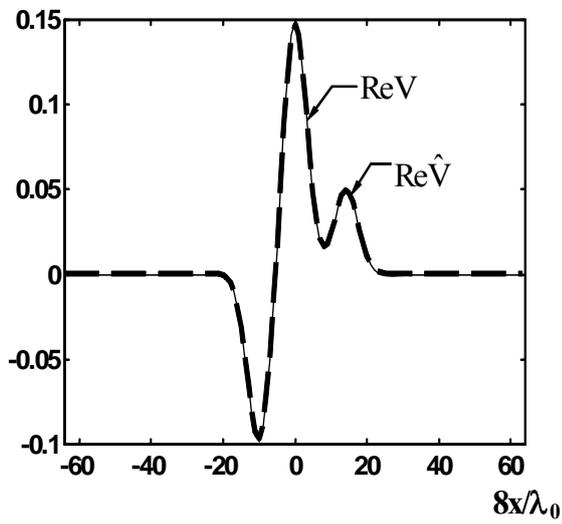
Re $V(r)$



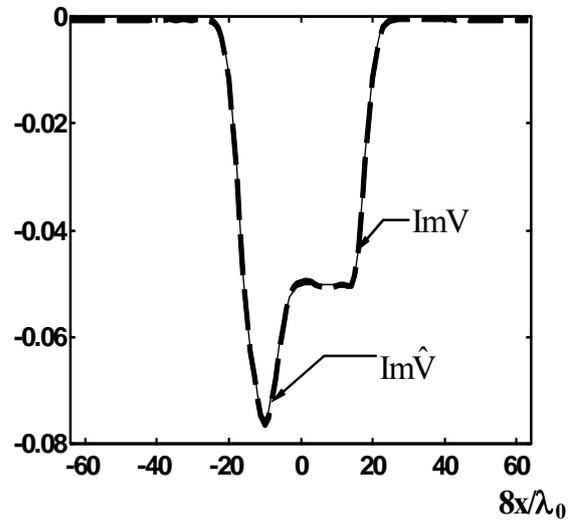
Im $V(r)$



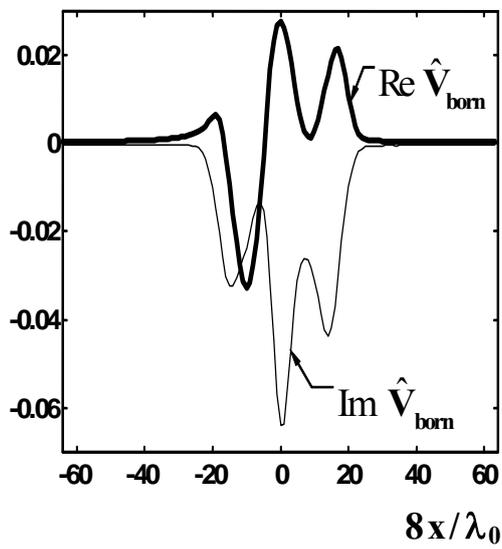
Re $\hat{V}(x, y=0)$



Im $\hat{V}(x, y=0)$



$\hat{V}_{\text{born}}(x, y=0)$



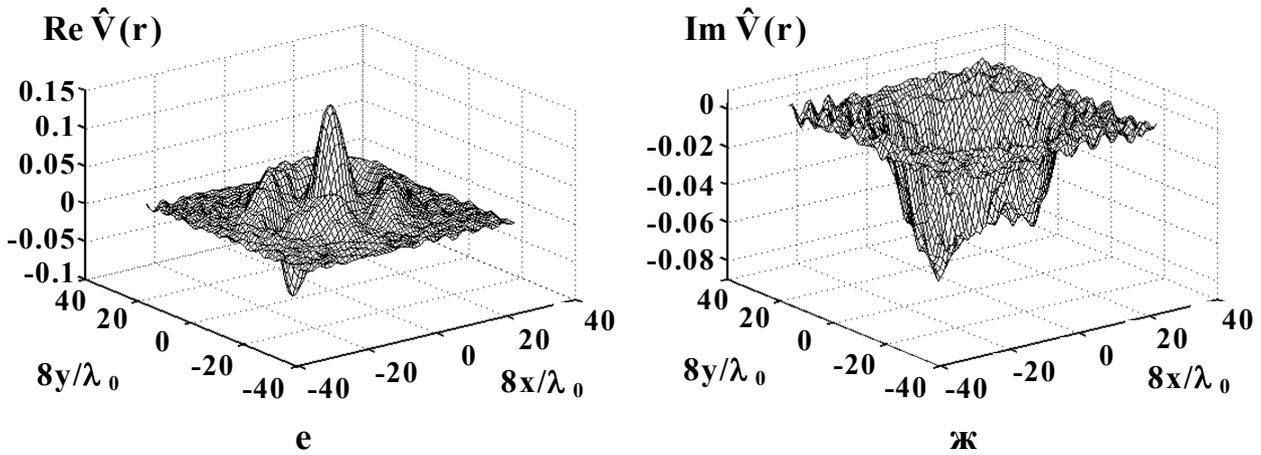


Рис.6. Несимметричный рефракционно-поглощающий рассеиватель (относительный контраст скорости $\Delta c/c_0$ изменяется в диапазоне от -0.073 до 0.15 ; максимальный дополнительный набег фазы $\Delta\psi \approx 0.35\pi$; максимальное амплитудное поглощение в рассеивателе – в 3.7 раза; норма данных рассеяния $\|f\| \approx 11/(3\pi)$):

- общий вид действительной (а) и мнимой (б) частей истинного рассеивателя;
- центральные сечения действительной (в) и мнимой (г) частей истинного рассеивателя v (тонкая линия) и рассеивателя \hat{v} , восстановленного с учетом многократных рассеяний при отсутствии шумовых помех (толстая пунктирная линия).;
- центральное сечение $y=0$ (д) рассеивателя, восстановленного в приближении Борна без шумовых помех;
- общий вид действительной (е) и мнимой (ж) частей рассеивателя, восстановленного по зашумленным данным со стандартным амплитудным шумовым отклонением $\sigma_{ns} = 0.01 f_{\max}$.

Относительная среднеквадратичная погрешность оценки в присутствии шума с $\sigma_{ns} = 0.01 f_{\max}$ составляет $\delta\mu \equiv \frac{\sqrt{\int_R |\nu(\mathbf{r}) - \hat{\nu}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}}{\sqrt{\int_R |\nu(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}} \approx 0.11$.

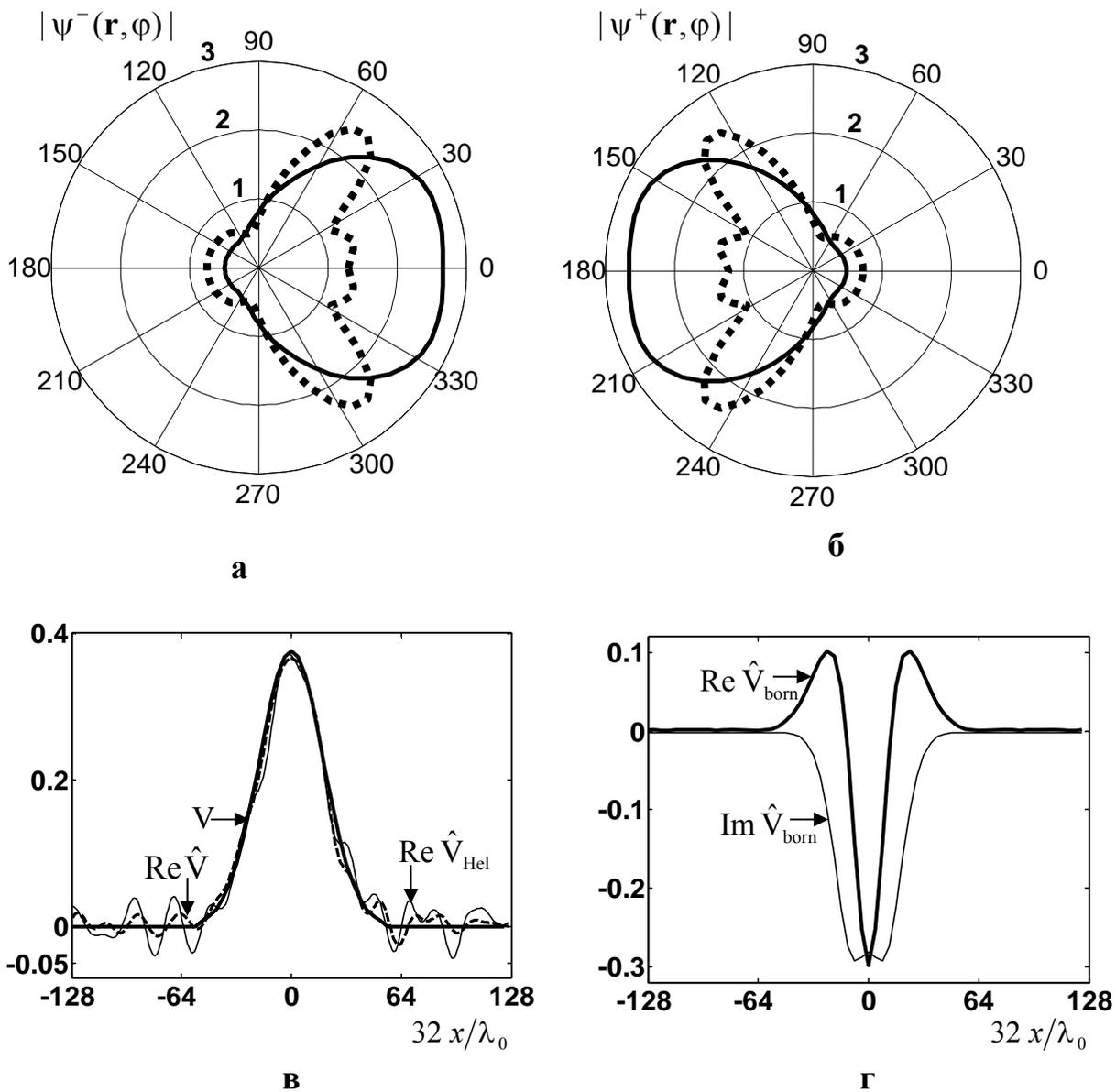


Рис.7. Восстановление рефракционного рассеивателя гауссовой формы (контраст скорости $\Delta c/c_0 = 0.6$; набег фазы $\Delta\psi \approx 1.23\pi$) модифицированным алгоритмом МНР:

- абсолютные значения полей $|\psi^-(\mathbf{r}, \varphi)|$ (а) и $|\psi^+(\mathbf{r}, \varphi)|$ (б) для точки $(x=0, y=\lambda_0)$ внутри рассеивателя (сплошная линия) и точки $(x=0, y=2.5\lambda_0)$ вне рассеивателя (пунктирная линия) в зависимости от угла φ падения зондирующей волны;
- центральные сечения (в) истинного рассеивателя (\hat{v} – толстая сплошная линия) и рассеивателя, восстановленного из уравнения Гельмгольца на основе $\psi^-(\mathbf{r}, \varphi)$ для направления $\varphi=0$ ($\text{Re } \hat{v}_{\text{Hel}}$ – тонкая сплошная линия) и при усреднении по всем ракурсам φ ($\text{Re } \hat{v}$ – пунктирная линия) в случае зашумленных данных (стандартное отклонение $\sigma_{\text{ns}} = 0.03f_{\text{max}}$);
- центральное сечение рассеивателя, восстановленного в приближении Борна (г).

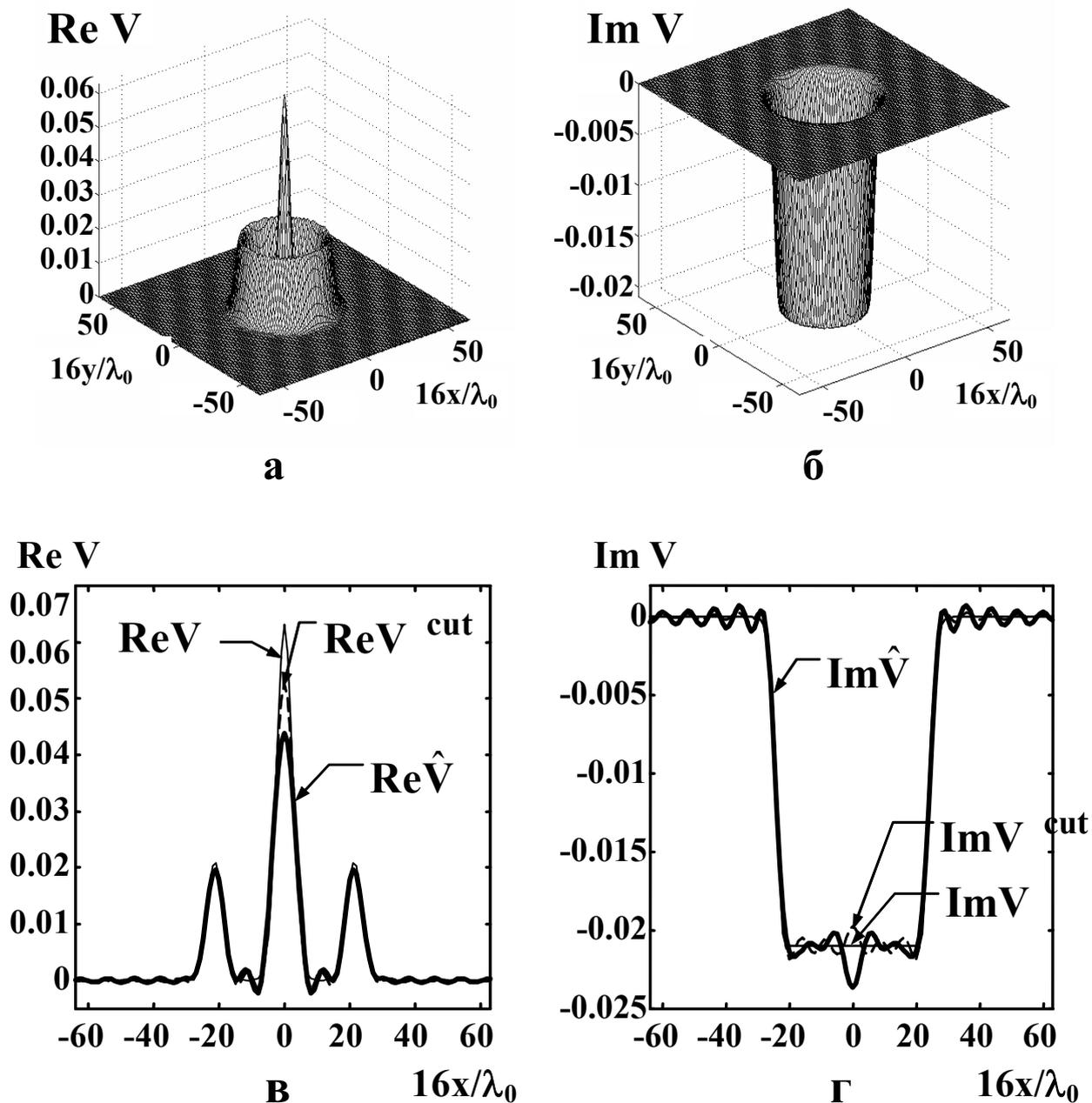


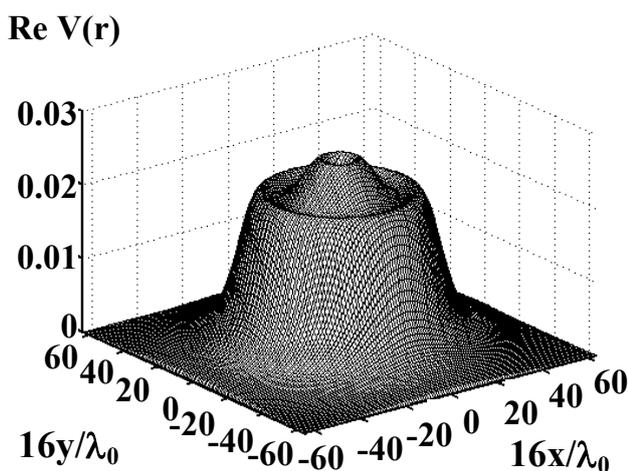
Рис.8. Рефракционно-поглощающий рассеиватель с высокочастотными пространственно-спектральными компонентами (дополнительный набег фазы $\Delta\psi \approx 0.27\pi$; амплитудное поглощение в рассеивателе – в 3.8 раз; норма данных $\|f\| \approx 9/3\pi$):

- общий вид действительной (а) и мнимой (б) части истинного рассеивателя;
- центральные сечения действительной (в) и мнимой (г) частей рассеивателя: истинный рассеиватель (v – тонкая сплошная линия) и его форма после ограничения полосы частот пространственного спектра рассеивателя кругом радиуса $2k_0$ ($v_{2k_0}^{\text{cut}}$ – тонкая пунктирная линия); рассеиватель, восстановленный при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний (\hat{v} – толстая линия).

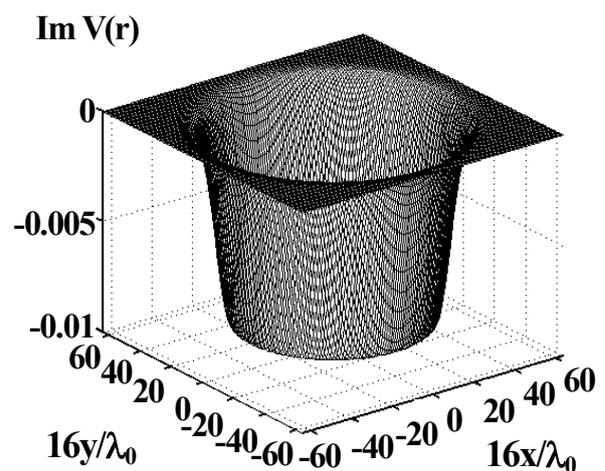
Целью **раздела 3.8** ставилось исследование возможностей применения алгоритма Новикова-Гриневича для целей медицинской диагностики. В данной прикладной области четко прослеживается наличие двух масштабов: крупная неоднородность (это различные органы или крупные области органов – жировая, железистая, мышечная ткань) и, одновременно, мелкая (“тонкая”) структура, являющаяся предметом обычного диагностического интереса. Проиллюстрировано, что алгоритм позволяет воспроизводить тонкую структуру рассеивателя (детали с линейным размером около одной трети длины волны) в присутствии неизвестных контрастных крупномасштабных неоднородностей, создающих сильное искажение внутреннего поля. Алгоритм обеспечивает качество разрешения тонкой структуры, не уступающее качеству восстановления этой же тонкой структуры в *борновском* приближении в *однородной* неискажающей фоновой среде (рис.9). Эта способность алгоритма весьма полезна и перспективна при решении проблемы медицинской ультразвуковой томографии высокого качества.

Полученные модельные результаты, перечисленные в **разделе 3.9**, говорят о перспективности практического применения алгоритма в системах акустического медицинского томографирования.

В заключении сформулированы основные положения и выводы диссертационной работы.



а



б

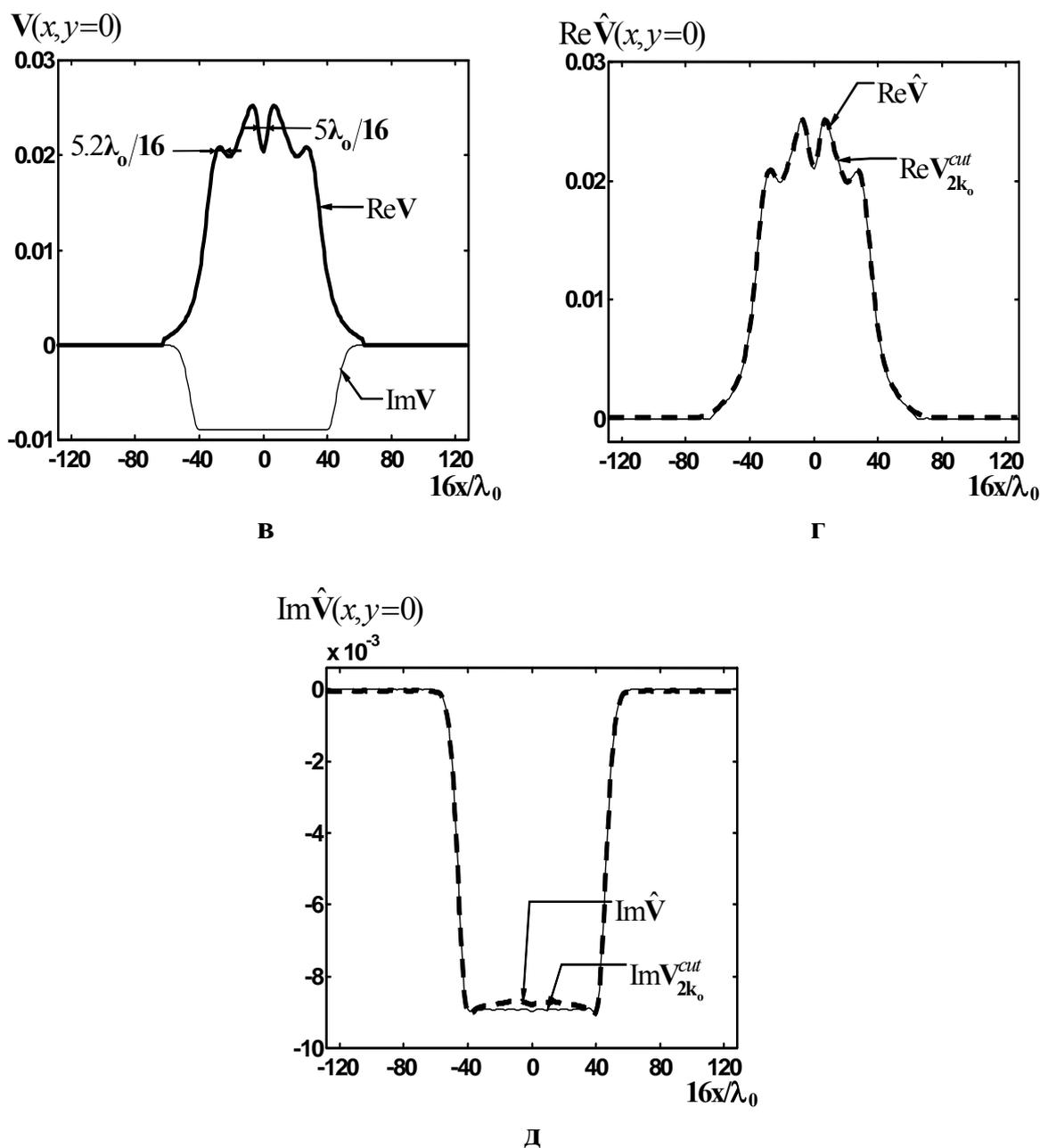


Рис.9. Крупномасштабный рефракционно-поглощающий рассеиватель средней силы (контраст скорости $\Delta c_1/c_0 = 0.1$, дополнительный набег фазы $\Delta\psi \approx 0.62\pi$, полуширина по уровню $1/e$ $d_1 = 2\lambda_0$; амплитудное поглощение в рассеивателе – в 3 раза; норма данных $\|f\| \approx 18/3\pi$) с тонкой структурой в виде центральной «впадины» (контраст скорости $\Delta c_2/c_0 = -0.02$, полуширина $d_2 = \lambda_0/4$) и внешней кольцевой «стенки» (контраст скорости $\Delta c_3/c_0 = 0.03$, полуширина $d_3 = \lambda_0/2$):
– общий вид действительной (а) и мнимой (б) частей истинного рассеивателя;
– центральное сечение этих частей (в);
– центральные сечения действительной (г) и мнимой (д) частей рассеивателя: форма истинного рассеивателя после ограничения полосы частот его пространственного спектра кругом радиуса $2k_0$ ($v_{2k_0}^{cut}$ – тонкая линия); рассеиватель, восстановленный при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний (\hat{v} – толстая пунктирная линия).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Проведенное детальное исследование алгоритма Марченко-Ньютона-Роуза применительно к обратным задачам акустического рассеяния показало, что внутреннее волновое поле восстанавливается этим алгоритмом неединственным образом. Тем не менее, данный алгоритм может служить, в качестве составной части, для повышения помехоустойчивости в алгоритмах реконструкции, обеспечивающих однозначное восстановление акустических характеристик.
2. Показано, что линейная система, состоящая из модифицированных уравнений Марченко-Ньютона-Роуза и уравнений Сохоцкого, обеспечивает единственность восстановления внутренних полей для не слишком сильных рассеивателей. Проиллюстрирована возможность восстановления рефракционно-поглощающих характеристик рассеивателей этим обобщенным алгоритмом.
3. Рассмотрен эквивалентный по результатам восстановления, но существенно более эффективный по своей структуре, алгоритм Новикова-Гриневича в применении к решению двумерных монохроматических задач акустического рассеяния, основанный на использовании обобщенных данных рассеяния и хорошо приспособленный к практической реализации на вычислительных системах. Впервые осуществлено численное моделирование процесса восстановления с помощью этого алгоритма рассеивателей различных типов, обусловленных неоднородностями как фазовой скорости, так и поглощения. Численно подтверждены высокие точностные характеристики алгоритма и его применимость для рассеивателей достаточно высокой силы.
4. Анализ уравнений Марченко-Ньютона-Роуза привел к обнаружению однозначной взаимосвязи между силой точечного рассеивателя и фазой рассеянного на нем поля. Эта связь является строгим и чисто классическим аналогом результата, полученного Л.Д.Фаддеевым для δ -образных рассеивающих потенциалов в квантовой механике. Ее существование подтверждено при численном анализе аппаратной функции алгоритма Новикова-Гриневича.
5. Установлена взаимосвязь между силой рассеивателя, с одной стороны, и единственностью и устойчивостью решения обратной задачи, с другой стороны. На численных примерах проиллюстрировано, что постепенное увеличение силы рассеивателя проявляется в повышении чувствительности решения к различного рода помехам, к которым относятся как шумы и ошибки эксперимента, так и составляющие рассеянных полей (данных рассеяния), порожденные высокочастотными компонентами в пространственных спектрах рассеивателя и его вторичных источников.
6. Проиллюстрировано, что алгоритм Новикова-Гриневича позволяет воспроизводить тонкую структуру рассеивателя (детали с линейным размером около одной трети длины волны) в присутствии неизвестных контрастных крупномасштабных неоднородностей, создающих сильное

искажение внутреннего поля. При этом качество разрешения тонкой структуры не уступает качеству восстановления этой же тонкой структуры в борновском приближении в однородной неискажающей фоновой среде.

7. Теоретические результаты позволяют утверждать, что исследованный алгоритм перспективен для практического его применения в системах акустического медицинского томографирования.

Список цитируемой литературы

1. Budreck D., Rose J.H. Three-dimensional inverse scattering in anisotropic elastic media // *Inverse Problems*, 1990, V.6, p.331-348.
2. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. II // Сб.: *Соврем. проблемы математики*. М.: ВИНТИ, 1974, Т.3, с.93-180.
3. Новиков Р.Г. Построение двумерного оператора Шредингера с данной амплитудой рассеяния при фиксированной энергии. // *Теор. и мат. физика*, 1986, т.66, № 2, с.234-240.
4. Гриневич П.Г., Манаков С.В. Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера, $\bar{\partial}$ -метод и нелинейные уравнения. // *Функцион. анализ и его прил.*, 1986, т.20, № 2, с.14-24.
5. Новиков Р.Г., Хенкин Г.М. $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния // *УМН*, 1987, Т.42, № 3(255), с.93-152.
6. Nachman A.I., Ablovitz M.J. Multidimensional inverse-scattering for first-order systems // *Studies in Applied Mathematics*, 1984, V.71, p.251-262.
7. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // *ДАН*. 1961. Т.137. N5. С.1011-1014.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

1. Burov V.A., Morozov S.A., Rumiantseva O.D., Sukhov E.G., Vecherin S.N., Zhucovets A.Yu. Exact solution of two-dimensional monochromatic inverse scattering problem and secondary sources space spectrum // *Acoustical Imaging*, Ed. H.Lee. New York: Kluwer Academic/Plenum Publisher. 2000. V.24. P.73-78.
2. Burov V.A., Morozov S.A., Rumiantseva O.D. Reconstruction of inner field by Marchenko-Newton-Rose method and solution of multi-dimensional inverse scattering problem // *Acoustical Imaging*, Ed. H.Lee. New York: Kluwer Academic/Plenum Publisher. 2000. V.24. P.101-106.
3. Bogatyrev A.V., Burov V.A., Morozov S.A., Rumyantseva O.D., Sukhov E.G. Numerical realization of algorithm for exact solution of two-dimensional monochromatic inverse problem of acoustical scattering // *Acoustical Imaging*, Ed. P.Wells and M.Halliwell. New York: Kluwer Academic/Plenum Publisher. 2000. V.25. P.65-70.
4. Богатырёв А.В., Вечерин С.Н., Морозов С.А. Восстановление двумерных рассеивателей средней силы в монохроматическом режиме с

- помощью алгоритма Гриневича-Новикова // Сб. трудов X сессии Российского акустического общества. Т.1. – М.: ГЕОС. 2000. С. 141-144.
5. Буров В.А., Морозов С.А. Связь между амплитудой и фазой сигнала, рассеянного “точечной” акустической неоднородностью // Акустич. журн. 2001, т.47, №6, с.751-756.
 6. Буров В.А., Морозов С.А., Румянцева О.Д., Сергеев С.Н. Акустическая томография мягких тканей // Медицинская физика. 2001, N11, ч.9. С.15-16.
 7. Буров В.А., Морозов С.А., Румянцева О.Д., Сергеев С.Н. Активная и пассивная медицинская акустическая томография сильно неоднородных сред // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. 2002, №3, с.5-13.
 8. Буров В.А., Морозов С.А., Румянцева О.Д., Сергеев С.Н. Медицинская акустическая томография сильно неоднородных сред // Медицинская физика. Сборник научных трудов. Под ред. Трухина В.И., Пирогова Ю.А., Кашкарова П.К., Сысоева Н.Н. М.: физич. ф-т МГУ. 2002. 240с. (С.35-48).
 9. Burov V.A., Morozov S.A., Rummyantseva O.D. Reconstruction of fine-scale structure of acoustical scatterer on large-scale contrast background // Acoustical Imaging. Ed. R.Maev. N.Y.: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002. V.26. P.231-238.
 10. Буров В.А., Гришина И.М., Лапшенкина О.И., Морозов С.А., Румянцева О.Д., Сухов Е.Г. Восстановление тонкой структуры акустического рассеивателя на фоне искажающего влияния его крупномасштабных составляющих // Акустич. журн. 2003, т.49, №6, с.738-750.