на правах рукописи

Тлячев Тимур Вячеславович

Метод канонических преобразований в теории сжатых состояний

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре квантовой статистики и теории поля Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Чеботарев Александр Михайлович**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты: **Манько Владимир Иванович**
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник
Физического института им. П.Н.Лебедева Российской академии наук

Башаров Асхат Масхудович
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
НИЦ "Курчатовский институт"

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический Институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита диссертации состоится "____" ____________ 2014 года в "______" часов на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, физический факультет МГУ, СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте www.phys.msu.ru.

Автореферат разослан "____" ____________ 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.002.10,
доктор физико-математических наук,
профессор П.А. Поляков

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Исследования неклассических состояний света связаны с развитием теории квантовой информации, методов квантовой криптографии и квантовой оптики, изучением новых возможностей генерации неклассического света.

Одним из центральных объектов квантовой теории информации являются гауссовы состояния, к которым относятся сжатые состояния. Важным свойством гауссовых и, в частности, сжатых состояний является то, что их можно получить экспериментально в нелинейных оптических параметрических процессах. Эти состояния обладают рядом полезных свойств, в частности, минимизируют соотношение неопределенности Гейзенберга, а также могут являться естественным источником сцепленных (перепутанных) состояний, необходимых для процессов квантовой криптографии и квантовых коммуникаций.

Методы, используемые в диссертации для этих целей, основаны на теории канонических преобразований, позволившей нам выразить в алгебраических терминах решение задачи о нормальной факторизации сжатий, вычисление композиции сжатий и скалярного произведения сжатий и определить индекс сжатого состояния, аналогичный индексу Маслова. В диссертации также рассматриваются два примера обобщенных сжатых состояний, интерес к которым связан с их возможной практической реализацией в апериодических нелинейных фотонных кристаллах.

Использование теории многофотонных коррелированных состояний электромагнитного поля важно в практическом плане. В частности, в оптических системах осуществлены квантовые коммуникационные схемы по передаче секретного кода и квантовому телепортированию фотонных состояний, открывающие новые перспективы в технологиях передачи информации, а также созданы квантовые генераторы случайных чисел, применяющиеся в криптографии.

Известно, что помимо информационных процессов сжатые состояния позволяют увеличивать чувствительность некоторых квантовых измерительных приборов. Примером такого рода приборов является квантовый интерферометр гравитационных волн (например, LIGO и его модификации).

Сжатые состояния играют важную роль не только в процессах, связанных с квантовой оптикой или квантовой теорией информации, но и в таких разделах физики, как физика конденсированного состояния вещества и астрофизика. В связи с этим, изучение свойств сжатых состояний также представляет значительный практический интерес.

Цель диссертационной работы

Целью диссертационной работы является описание динамики и анализа свойств многомодовых сжатых состояний с использованием в качестве математического аппарата метода канонических преобразований для конечного числа взаимодействующих бозе-частиц между собой, а также анализ многомодовых связанных квантово-оптических параметрических взаимодействий: вычисление явного вида волновой функции в представлении взаимодействия, ковариационных матриц и анализ энтропийно-информационных характеристик.

Научная новизна диссертационной работы

В диссертационной работе построено корректное нормально упорядоченное разложение оператора эволюции многочастичной квадратичной бозе-системы с использованием матриц канонических преобразований в аналитическом виде. Уточнены алгебраические выражения амплитуды и фазы нормальной факторизации для случаев вырожденной и невырожденной матрицы, задающей каноническое преобразование. Для этих целей введено понятие индекса нормальной формы сжатого состояния (аналог индекса Маслова) и исправлены неточности в формуле Березина для скалярного множителя в формуле нормальной факторизации.

На основе полученных формул найдены алгебраические выражения для скалярного произведения сжатых состояний и нормального символа сжатия. Указан класс задач, точно решаемых для произвольного числа мод.

В приближении поля классической накачки, опирающейся на теорию канонических преобразований, проведен анализ нелинейных оптических параметрических процессов, происходящих в апериодическом нелинейном фотонном кристалле. Вычислен явный вид волновых функций в случае генерации трех и четырех мод в кристалле. Найдены энтропийные и информационные характеристики оптических параметрических процессов и на их основе проведен анализ сцепленности (перепутанности) состояний, генерируемых в этих процессах.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы

Теоретическая и практическая ценность диссертации определяется тем, что развитая теория позволяет корректным образом связать различные представления обобщенных многомерных сжатых состояний, вычислять частичный след и композиции сжатых состояний, средние значения наблюдаемых, их дисперсии и, как следствие, ковариационные матрицы в терминах матриц канонических преобразований. Данный подход численно устойчив и удобен для описания многочастотных нелинейных оптических взаимодействий, происходящих в поле классической накачки.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы являются обоснованными и достоверными, так как получены с помощью строгих методов теоретической и математической физики и в частных случаях воспроизводят результаты, полученные ранее другими авторами. Содержание различных разделов диссертационной работы представлялось в виде докладов и тезисов на следующих ведущих отечественных и международных конференциях по тематике исследования:

1. Вторая международная конференция "Математическая физика и ее приложения" (Самара, 2010)

2. Научная конференция "Ломоносовские чтения"(Москва, 2011)

3. The 19th Central European Workshop on Quantum Optics (CEWQO-2012) (Sinaia, Romania, 2012)

4. Восьмой семинар памяти Д.Н. Клышко (Москва, 2013)

5. The 20th Central European Workshop on Quantum Optics (CEWQO-2013) (Stockholm, Sweden, 2013)

6. 13th International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations (Nuremberg, Germany, 2013)

7. ICONO/LAT (Moscow, Russia 2013)

8. 34th International Conference on Quantum Probability and Related Topics (Moscow, Russia, 2013)

9. The 21th Central European Workshop on Quantum Optics (CEWQO-2014) (Brussels, Belgium, 2014)

Публикации

В диссертации приведены результаты, полученные непосредственно автором или при его активном участии. Результаты диссертации опубликованы в 11 работах, в том числе в 5 статьях в научных журналах из списка ВАК.

Структура и объем диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы. Объем диссертации 103 страницы, включая 5 рисунков. Список литературы состоит из 117 наименований.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи работы, а также излагается краткое содержание работы.

В первой главе метод канонических преобразований иллюстрируется на примере многомодовых сжатий и сжатых состояний

$$\begin{aligned} U_t = S_{A,t} = e^{-\frac{t}{2}((a^\dagger, Aa^\dagger)-(a,\overline{A}a))}, \quad | \, g, A \, \rangle \overset{\text{def}}{=} T_g S_A | \, 0 \, \rangle, \\ S_A \overset{\text{def}}{=} S_{A,1}, \quad T_g \overset{\text{def}}{=} e^{(a^\dagger, g)-(a,\overline{g})}. \end{aligned} \tag{1}$$

Основными результатами первой главы являются утверждение леммы 2 в разделе 1.4, а также диагонализация сжатий с помощью факторизации Таkаги в разделе 1.9.

С этой целью в разделе 1.1 приводятся формулы канонических преобразованиях операторов рождения-уничтожения $a_t = S_{A,t}\, a\, S^*_{A,t}$ и $a^\dagger_t = S_{A,t}\, a^\dagger\, S^*_{A,t}$ в терминах полярного разложения симметричной матрицы A:

$$\begin{pmatrix} a_t \\ a^\dagger_t \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} e^{Gt} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_A(t) & \Psi_A(t) \\ \overline{\Psi}_A(t) & \overline{\Phi}_A(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & A \\ \overline{A} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где матричные коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) \overset{\text{def}}{=} U_A \cosh|A|t\, U^*_A, \quad \Psi_A(t) \overset{\text{def}}{=} U_A \sinh|A|t, \\ \overline{\Phi}_A(t) = \cosh|A|t, \quad \overline{\Psi}_A(t) = \sinh|A|t\, U^*_A, \end{aligned}$$

в этом случае:

$$\Phi_A(t) = \Phi^*_A(t) = \Phi_A(-t) \geq I, \quad \Psi_A(t) = \Psi^T_A(t) = -\Psi_A(-t). \tag{3}$$

В разделе 1.2 проверено свойство симплектичности канонических преобразований

$$\begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \overline{\Psi}_t & \overline{\Phi}_t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \overline{\Psi}_t & \overline{\Phi}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

и вычислена композиция сжатий. Показано, что композиция операторов сжатий не является в общем случае сжатием в смысле, определенном формулой (1).

В разделе 1.3 вычислены ковариационные матрицы квадратурных компонент $\widehat{x}$ и $\widehat{p}$ в сжатых состояниях, через матрицы канонических преобразований.

В разделе 1.4 получены формула нормального упорядочивания оператора сжатия и его нормальный символ, которые сформулированы и доказаны в виде следующей леммы:

Лемма

1. *Оператор сжатия может быть приведен к нормально упорядоченной форме*

$$S_A(t) = e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger, R_t a^\dagger)} e^{(a^\dagger, C_t a)} e^{\frac{1}{2}(a, \overline{R}_t a)} e^{s_t} = e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger, R_t a^\dagger)} :e^{(a^\dagger, (e^{C_t}-I)a)}: e^{\frac{1}{2}(a, \overline{R}_t a)} e^{s_t}. \tag{5}$$

Матрицы, входящие в разложение (5), *выражаются через матрицы канонических преобразований по формулам*

$$R_t = U_A \mathrm{th}\,|A|t = \Phi_A^{-1}\Psi_A = R_t^T, \quad |R_t| < I, \quad C_t = \ln \Phi_A^{-1} = C_t^*, \tag{6}$$

а скалярная функция s_t определяется по формуле

$$s_t = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\ln\cosh|A|t = \mathrm{Tr}\,\ln\Phi_A^{-\frac{1}{2}} = -\sum_k \ln\sqrt{\cosh\lambda_k t},$$

где $\{\lambda_k^2\}$ – спектр матрицы $A^*A > 0$, $\{\cosh\lambda_k t\}$ – спектр матрицы Φ_A, скобки $: \, :$ устанавливают нормальный порядок операторов рождения-уничтожения (операторы рождения действуют после операторов уничтожения).

2. *Для сжатий вида* (1) *C_t, $\dot{C}_t$, C_s, $\dot{C}_s$ коммутируют при любых $t, s \in \mathbb{R}$.*

3. *Нормальный символ оператора сжатия равен*

$$\mathrm{Symb}\, S_A(\overline{\xi}, \chi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\langle \xi \,|S_A|\, \chi\rangle}{\langle \xi \,|\, \chi\rangle} = \frac{1}{\sqrt{\det\Phi_A}}\, e^{-\frac{1}{2}(\overline{\xi}, R_t\,\overline{\xi}) + (\overline{\xi}, (\Phi_A^{-1}-I)\chi) + \frac{1}{2}(\chi, \overline{R}_t\,\chi)}, \tag{7}$$

где состояния $|\xi\rangle = T_\xi|0\rangle$, $|\chi\rangle = T_\chi|0\rangle$ – произвольные когерентные состояния, а в выражении $\sqrt{\det\Phi_A}$ – берется положительная ветвь корня, т.к. $\Phi_A \geq I$ для сжатий (1).

В качестве следствия этих формул в терминах матриц канонических преобразований независимым образом от общеизвестного метода Вея-Нормана[1]

[1] см., например, Shumaker, B. L. New formalism for two-photon quantum optics. II. Mathematical foundation and compact notation / B. L. Shumaker, C. M. Caves // Phys. Rev. A – 1985. – V. 31. – P. 3093-3111.

вычислена нормально упорядоченная форма оператора двухмодового сжатия. В квантовой оптике этот оператор описывает невырожденное параметрическое преобразование частоты вниз и играет важную роль в задачах генерации сцепленных состояний.

Следующие два раздела посвящены различным формам и нормировке сжатых состояний, а также о координатному и импульсному представлениям сжатого состояния $|\,g,A\,\rangle$

$$
\begin{aligned}
\psi_{g,A}(x) &= \frac{e^{\frac{|x|^2}{2}-\left(x-\frac{f_t}{\sqrt{2}},(I-R_t)^{-1}(x-\frac{f_t}{\sqrt{2}})\right)-\frac{1}{2}(\overline{g},f_t)}}{\pi^{n/4}\sqrt{\det\left(\Phi_A-\Psi_A\right)}}\,,\\
\widetilde{\psi}_{g,A}(x) &= \frac{e^{\frac{|p|^2}{2}-\left(p+\frac{if_t}{\sqrt{2}},(I+R_t)^{-1}(p+\frac{if_t}{\sqrt{2}})\right)-\frac{1}{2}(\overline{g},f_t)}}{\pi^{n/4}\sqrt{\det(\Phi_A+\Psi_A)}},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $f_t=g+R_t\overline{g}$ и ветвь корня в знаменателе выбирается в правой полуплоскости, так как $\Phi_A\geqslant I$ и $|\Psi_A|\leqslant\Phi_A$.

Формулы (8), в частности, позволяют вычислить скалярное произведение двух сжатых состояний

$$
\langle\, q,B\,|\,g,A\,\rangle=\frac{\sqrt[4]{\det(I-|Q|^2)(I-|R|^2)}}{\sqrt{\det(I-\overline{Q}R)}}\,e^{i\mathrm{Im}\,(\overline{q},g)+\frac{1}{2}\left((h,\Omega_{Q,R}^{-1}h)-S_R\right)},\tag{9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
R=U_A\mathrm{th}\,|A|t=\Phi_A^{-1}\Psi_A,\quad f=g+R\overline{g},\quad Q=U_B\mathrm{th}\,|B|t=\Phi_B^{-1}\Psi_B,\\
p=q+Q\overline{q},\quad \Omega_{Q,R}=(I-\overline{Q})^{-1}+(I-R)^{-1}-I=\Omega_{Q,R}^T.
\end{aligned}
$$

В заключение главы описана процедура построения ортонормированных систем сжатых состояний с помощью формулы скалярного произведения (9). В разделе 1.9 приведена процедура диагонализации многомодовых сжатий, основанная на факторизация Такаги симметричных матриц:

$$
A=U_A\Lambda U_A^T,\quad U_A=U(U^*\overline{V})^{\frac{1}{2}},
$$

где $\Lambda\geq 0$—диагональная матрица, а U и V унитарные матрицы такие , что

$$
A=U\Lambda V^*
$$

— разложение матрицы A по сингулярным числам (т. н. *singular value decomposition* или *SVD*). Показано, что если известна факторизация Такаги симметричной матрицы A, то многомодовый оператор сжатия унитарно эквивалентен суперпозиции коммутирующих сжатий:

$$
e^{-i(a^\dagger,La)}e^{\frac{1}{2}(a,\overline{A}a)+(\overline{h},a)-\frac{1}{2}(a^\dagger,Aa^\dagger)-(h,a^\dagger)}e^{i(a^\dagger,La)}=\prod_{n=1}^{N}e^{\frac{1}{2}(a_n^2-(a_n^\dagger)^2)\Lambda_n+\overline{\mu}_na_n-a_n^\dagger\mu_n},\tag{10}
$$

где

$$U_A = e^{iL}, \quad \mu = e^{-iL}h.$$

Во второй главе рассматриваются многомодовые гамильтонианы вида

$$\mathcal{H} = \frac{\imath}{2}(a^\dagger, Aa^\dagger) + (a^\dagger, Ba) - \frac{\imath}{2}(a, \overline{A}a) + \imath(a^\dagger, h) - \imath(a, \overline{h}). \tag{11}$$

Канонические преобразования в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered}
G \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -iB & A \\ \overline{A} & i\overline{B} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_t \\ a_t^\dagger \end{pmatrix} = U_t \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} U_t^{-1} = e^{Gt} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} + \frac{e^{Gt} - I}{G} \begin{pmatrix} h \\ \overline{h} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \overline{\Psi}_t & \overline{\Phi}_t \end{pmatrix} = e^{Gt}, \quad \begin{pmatrix} h_t \\ \overline{h}_t \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} \Phi_\tau & \Psi_\tau \\ \overline{\Psi}_\tau & \overline{\Phi}_\tau \end{pmatrix} d\tau \begin{pmatrix} h \\ \overline{h} \end{pmatrix} = \frac{e^{Gt} - I}{G} \begin{pmatrix} h \\ \overline{h} \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{12}$$

В лемме 4 доказана формула нормального упорядоченного разложения оператора $U_t = e^{\imath\mathcal{H}t}$ выражается через Φ_t, Ψ_t, h_t и $\overline{h}_t$:

$$U_t = e^{s_t} e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger, R_t a^\dagger) - (a^\dagger, g_t)} : e^{(a^\dagger, (e^{C_t} - I)a)} : e^{\frac{1}{2}(a, \overline{\rho}_t a) + (a, \overline{f}_t)}, \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered}
\Psi_t = e^{-C_t} R_t, \quad \Phi_t = e^{-C_t}, \quad R_t = \Phi_t^{-1}\Psi_t = R_t{}^T, \\
\rho_t = e^{-C_t} R_t e^{\overline{C}_t} = \Psi_t \overline{\Phi}_t{}^{-1} = \rho_t{}^T, \quad g_t = \Phi_t^{-1} h_t, \ \overline{f}_t = \overline{h}_t - \overline{\rho}_t h_t.
\end{gathered}$$

Скалярная функция s_t, определяющая нормировку и фазу, вычислена тремя разными способами. Первый способ – дифференцирование нормальной упорядоченной формы $e^{\imath\mathcal{H}t}$ и вывод матричных уравнений Риккати для матриц R_t, C_t, $\overline{\rho}_t$:

$$\begin{gathered}
\dot{\overline{\rho}}_t = \overline{A} + \imath\overline{\rho}_t B + \imath\overline{B}\overline{\rho}_t - \overline{\rho}_t A \overline{\rho}_t, \quad e^{-C_t} \dot{R}_t e^{-C_t^T} = A, \\
\dot{\overline{f}}_t = (\imath\overline{B} - \overline{\rho}_t A)\overline{f}_t + \overline{h} - \overline{\rho}_t h, \quad -h = A\overline{f}_t - e^{-C_t}\dot{g}_t, \\
s_t = -\int_0^t \left(\frac{1}{2} \left\{ \operatorname{Tr} \overline{\rho}_\tau A + (\overline{f}_\tau, A\overline{f}_\tau) \right\} + (\overline{f}_\tau, h) \right) d\tau.
\end{gathered} \tag{14}$$

Трудности, связанные с выводом обыкновенных дифференциальных уравнений для матриц C_t возникают в следствии некоммутативности операторов $(a^\dagger, C_t a)$ и $(a^\dagger, \dot{C}_t a)$ в случае $B \neq 0$, что является существенным отличием формулы (13) от формулы (5), что отражено в доказательстве теоремы 6.

В разделе 2.4 рассмотрены обратные канонические преобразования, задаваемые оператором $U_{-t} = e^{-\imath\mathcal{H}t}$

$$\begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{-t} \\ a_{-t}^\dagger \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} U_{-t} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} U_t = \begin{pmatrix} \Phi_{-t} & \Psi_{-t} \\ \overline{\Psi}_{-t} & \overline{\Phi}_{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{-t} \\ \overline{h}_{-t} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

которые связанны с каноническими преобразованиями (12) следующим образом
$$\Phi_{-t} = \Phi_t^*, \quad \Psi_{-t} = -\Psi_t^T.$$
Для них приведены формулы нормального упорядоченных разложений аналогичные формулам (13) и (14).

В разделе 2.5 обоснованы два альтернативных способа построения скалярного члена s_t в разложении (13). Первый способ основывается на равенстве $e^{s_t} = \langle 0|e^{i\mathcal{H}t}|0\rangle$ и приводит к равенству, согласующемуся с (14).

Недостатком формулы (14) в многомерном случае является низкая скорость численного интегрирования следа при компьютерных вычислениях, поэтому в диссертации уделено внимание выводу алгебраических формул, быстро исполняемых для матриц G общего вида.

В случае $h = 0$ выражение для e^{s_t} может быть записано в упрощенной форме
$$\int_0^t \mathrm{Tr}\ \overline{\rho}_\tau A\, d\tau = \int_0^t \mathrm{Tr}\ R_\tau \overline{A}\, d\tau = \mathrm{Tr}\,(iBt - C_t), \tag{16}$$
$$e^{-\int_0^t \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ \overline{\rho}_\tau A\, d\tau} = \frac{e^{-\frac{it}{2}\mathrm{Tr}\, B}}{(\pm)\sqrt{\det \Phi_t}}\,. \tag{17}$$
$$\begin{gathered} e^{i\mathcal{H}t}|_{h=0} = e^{i\widehat{H}_2 t} = \frac{e^{-\frac{it}{2}\mathrm{Tr}\, B}}{(\pm)\sqrt{\det \Phi_t}}\, e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger, R_t a^\dagger)} \ : e^{(a^\dagger, (\Phi_t^{-1} - I)a)} :\ e^{\frac{1}{2}(a, \overline{\rho}_t a)}, \\ \widehat{H}_2 = \frac{i}{2}(a^\dagger, A a^\dagger) + (a^\dagger, Ba) - \frac{i}{2}(a, \overline{A} a). \end{gathered} \tag{18}$$
Знак $(\pm)$ выбирается с учетом непрерывности выражений (17)-(18) по t. Для этой цели введено определение индекса нормальной формы сжатия.

Определим $\varphi(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_k \lambda_k(t) \in (-\pi, \pi]$, где $\lambda_k(t)$ аргументы собственных значений $e^{i\lambda_k(t)}$ матрицы U_t. Пусть $\{T_k\}:\ 0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_{n(t)} < t$ моменты времени 2π-скачков величины $\varphi(t)$ из одной части $(-\pi, \pi]$ в другую за время t. Если $\varphi(t)$ уменьшается, то скачок из $-\pi$ в π положителен, если $\varphi(t)$ увеличивается, то скачок аргумента отрицателен. Тогда целесообразно ввести понятие индекса Ind и переписать выражение для нормально упорядоченной формы оператора $e^{i\widehat{H}_2 t}$
$$\mathrm{Ind}(s,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\sum_{T_n \in (s,t)} \mathrm{sign}(\varphi(T_n + 0) - \varphi(T_n - 0)), \tag{19}$$
$$e^{i\widehat{H}_2 t} = \frac{e^{-\frac{it}{2}\mathrm{Tr}\, B + i\pi \mathrm{Ind}(0,t)}}{\sqrt{\det \Phi_t}}\, e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger, R_t a^\dagger)} \ : e^{(a^\dagger, (\Phi_t^{-1} - I)a)} :\ e^{\frac{1}{2}(a, \overline{\rho}_t a)}. \tag{20}$$
Таким образом, обеспечивается непрерывность скалярного члена разложения (20). Примеры непрерывной реконструкции функции фазы показаны на Рис. 1.

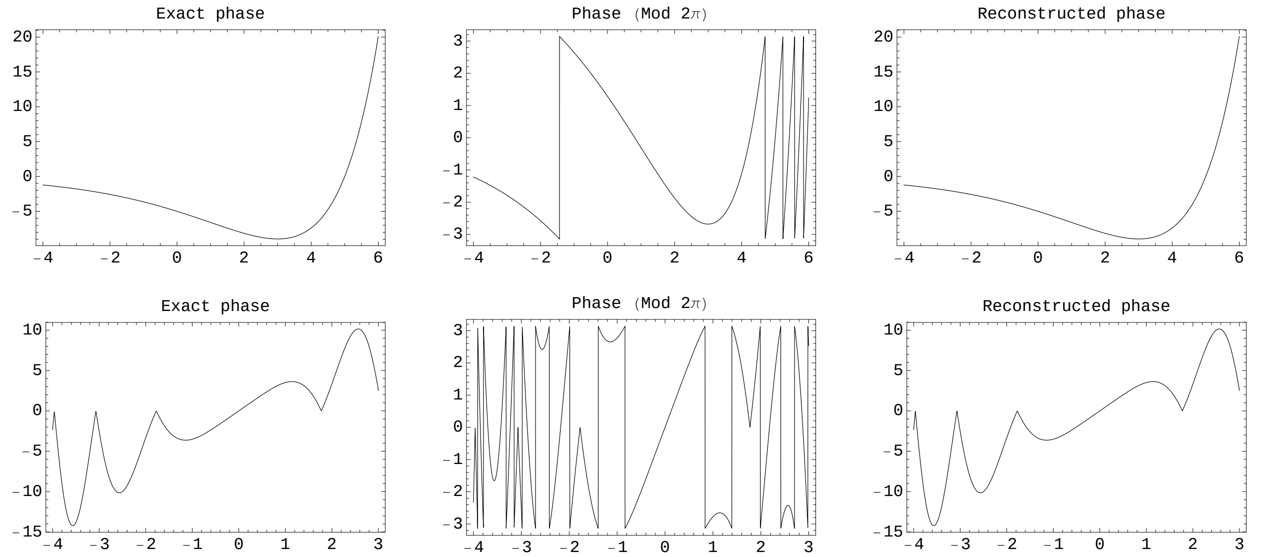

Рис. 1: Рисунки демонстрируют реконструкцию непрерывной фазовой функции методом, основанным на условии непрерывности по $(\mathrm{mod} 2\pi)$ (см. (19) и реализацию алгоритма в http://statphys.nm.ru/biblioteka/Demo/FactorS.nb).

В разделе 2.6 при условии $\det G \neq 0$ и $h \neq 0$, выведен алгебраический вариант формулы (14), позволяющий сократить время вычисления s_t в тысячи раз:

$$e^{s_t} = \langle 0|e^{i\widehat{H}t}|0\rangle = e^{-\int\limits_0^t \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\overline{\rho}_t A d\tau + Q_t} = \frac{e^{-\frac{it}{2}\mathrm{Tr}\,B + Q_t}}{\sqrt{\det \Phi_t}},$$

$$Q_t = \frac{1}{2}(z, (\overline{\rho}_t - \overline{A}t)z) - \frac{1}{2}(\overline{z}, (R_t - At)\overline{z}) + (\overline{z}, (\Phi_t^{-1} - I - iBt)z)|_{z(h,\overline{h})},$$

$$\begin{pmatrix} z(h,\overline{h}) \\ \overline{z}(h,\overline{h}) \end{pmatrix} = G^{-1}\begin{pmatrix} h \\ \overline{h} \end{pmatrix}.$$

Раздел 2.7 посвящен аналитическому вычислению для вырожденных в общем случае матриц G матричных экспонент, входящих в (12) e^{Gt}, $\frac{e^{tG}-I}{G}$ и $\frac{e^{Gt}-I-Gt}{G^2}$, с помощью Жорданова разложения.

В разделе 2.8 вычислен явный вид ковариационной матрицы V в терминах матриц канонических преобразований

$$V_{ij} = \frac{1}{2}\langle\{Q_i, Q_j\}\rangle - \langle Q_i\rangle\langle Q_j\rangle, \tag{21}$$

$$V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\Phi_t + \overline{\Psi}_t)(\Phi_t^* + \Psi_t^T) & \imath[(\Phi_t + \overline{\Psi}_t)(\Phi_t^* - \Psi_t^T) - I] \\ \imath[(\overline{\Psi}_t - \Phi_t)(\Psi_t^T + \Phi_t^*) + I] & (\overline{\Psi}_t - \Phi_t)(\Psi_t^T - \Phi_t^*) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $Q = (x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots p_n)^T$, а средние берутся в состояниях $e^{-\imath\mathcal{H}t}$. Основываясь на теореме Вилльямсона, построено симплектическое разложение ковариационной матрицы V

$$V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X & -XY \\ -YX & YXY + X^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}S_2^T S_2, \quad S_2 = \begin{pmatrix} X^{1/2} & -YX^{1/2} \\ 0 & X^{-1/2} \end{pmatrix}, \qquad (23)$$
$$X = (\Phi_t + \overline{\Psi}_t)(\Phi_t^* + \Psi_t^T), \quad Y = \imath[X^{-1} - (\Phi_t^* + \Psi_t^T)^{-1}(\Phi_t^* - \Psi_t^T)].$$

Симплектичность матриц S_2 понимается в обычном смысле

$$S_2^T J S_2 = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти формулы в дальнейшем играют существенную роль при вычислении энтропии и других характеристик, позволяющих анализировать сцепленность состояний, генерируемых в нелинейных оптических параметрических процессах, рассматриваемых в Главе 3 диссертации.

По аналогии с первой главой в разделе 2.9 введено понятие *приведенного сжатого состояния*

$$e^{i\mathcal{H}t}|z\rangle = e^{S_t - (a^\dagger, \xi_t) - \frac{1}{2}(a^\dagger, R_t a^\dagger)}|0\rangle, \qquad (24)$$

где $\xi_t = g_t - \Phi_t^{-1}z$, $S_t = s_t + (\overline{f}_t, z) + \frac{1}{2}(z, \overline{\rho}_t z) - \frac{|z|^2}{2}$, и вычислено скалярное произведение, нормальные символы композиций обобщенных сжатых состояний:

$$\langle\psi_1, \psi_2\rangle|_{\mathcal{L}_2} = e^{\sigma_{12}} \int \frac{e^{-\left((x + \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_{12}^{-1}Y), \Omega_{12}(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_{12}^{-1}Y)\right)}}{\pi^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(I - \overline{R}_1)\det(I - R_2)}} d^n x = \frac{e^{\sigma_{12}}}{\sqrt{\det(I - \overline{R}_1 R_2)}},$$
$$\Omega_{12} = \Omega_{12}^T = (I - \overline{R}_1)^{-1} + (I - R_2)^{-1} - I = (I - \overline{R}_1)^{-1}(I - \overline{R}_1 R_2)(I - R_2)^{-1},$$
$$\sigma_{12} = \overline{S}_1 + S_2 - \frac{1}{2}\big((\overline{G}_1, (I - \overline{R}_1)^{-1}\overline{G}_1) - \frac{1}{2}\big((G_2, (I - R_2)^{-1}G_2) + \frac{1}{2}(Y, \Omega_{12}Y),$$

где $\Omega_{12} = \Omega_{12}(t)$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}(t)$, а $R_i = R_i(t)$, $S_i = S_i(t)$ являются элементами приведенных форм (24), соответствующим сжатым состояниям ψ_1 и ψ_2, а также введены матрицы $G_i = g_i - \Phi_i^{-1}z_i$.

В последнем разделе главы 2 в случае, когда матрица $D = A\overline{A} - B^2$ не вырождена и выполнено коммутационное соотношение $BA = A\overline{B}$, построены точные аналитические выражения матриц канонических преобразований Φ_t, Ψ_t через спектральное разложение эрмитовой матрицы D.

Глава 3 посвящена задачам квантовой оптики, связанным с оптическими параметрическими процессами и допускающим точные решения с помощью метода канонических преобразований. На базе метода канонических преобразований, описанного в предыдущих главах, вычисляется вектор состояния в представлении взаимодействия квантовых оптических взаимодействий, их статистические, энтропийные и информационные характеристики, которые дают возможность проанализировать свойства сцепленности (перепутанности) состояний, генерируемых в этих процессах.

Первое взаимодействие описывает два процесса параметрического преобразования частоты вниз и один процесс смешение частот

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_{2p} = 2\omega_p = \omega_2 + \omega_3, \quad \omega_1 + \omega_p = \omega_3, \tag{25}$$

где ω_p, ω_{2p} – частоты накачки, а частоты ω_1, ω_2, ω_3 генерируются в ходе взаимодействия. Этот процесс может быть, в частности, реализован в нелинейном фотонном кристалле.

В приближении медленно-меняющихся амплитуд полей и предположении классической накачки, гамильтониан взаимодействия рассматриваемой системы, может быть записан в виде[2]

$$H_{int} = i\hbar[\beta_1(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2) + \beta_2(a_2^\dagger a_3^\dagger - a_2 a_3) + \gamma(a_1 a_3^\dagger - a_1^\dagger a_3)], \tag{26}$$

где $a_j^\dagger$, a_j, $(j = 1, 2, 3)$ операторы рождения и уничтожения фотонов с частотами ω_j; $\beta_{1,2}$ – нелинейные коэффициенты связи соответствующие процессам преобразования частоты вниз, γ – нелинейный коэффициент связи соответствующий преобразованию частоты вверх.

Предполагая, что в начальный момент система находилась в вакуумном состоянии $|\psi(0)\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3$, вычислен явный вид компонент волновой функции взаимодействия $|\psi(t)\rangle \in \ell_2^{\otimes 3}$ в зависимости от времени

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2\delta_1 \cosh^2\delta_2}} \sum_{m,n} (\operatorname{th}\delta_1)^m \Big(-\frac{\operatorname{th}\delta_2}{\cosh\delta_1}\Big)^n \sqrt{C_{m+n}^m} |m\rangle_1 \otimes |m+n\rangle_2 \otimes |n\rangle_3,$$

где параметры $\delta_i = \delta_i(t)$ выражаются аналитически через канонические преобразования, порождаемые гамильтонианом (26), которые из-за громоздкости опущены в автореферате, а $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Второе взаимодействие рассмотрено в разделе 3.2.2 и включает в себя один параметрический процесс преобразования частоты вниз и два процесса смешения частот:

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2, \; \omega_1 + \omega_p = \omega_3, \; \omega_2 + \omega_p = \omega_4. \tag{27}$$

Аналогично взаимодействию (25) гамильтониан, описывающий процессы (27), можно записать в виде[3]

$$H_{int} = i\hbar[\beta(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2) + \gamma_1(a_3^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_3) + \gamma_2(a_4^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_4)]. \tag{28}$$

[2]Chirkin, A. S. Statistic and information characterization of tripartite entangled states / A. S. Chirkin, M. Yu. Saigin // J. Russian Laser Research – 2007. – V. 28. – P. 505-515.

[3]Chirkin, A. S. Parametric amplification at low-frequency pumping and generation of four-mode entangled states / A. S. Chirkin, M. Yu. Saigin, I.V. Shutov // J. Russian Laser Research – 2008. – V. 29. – P. 336-346.

Аналитическим образом вычислены матрицы канонических преобразований и показано, что эффективный энергетический обмен между взаимодействующими волнами в (27) существуют при условии

$$\beta \geq \gamma_1 + \gamma_2. \tag{29}$$

Аналогично разделу 3.2.1 вычислена зависимость волновой функции от времени, при условии начального вакуумного состояния:

$$\begin{gathered} |\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\det \Phi_t^*}} e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger, R_{-t}a^\dagger)} \bigotimes_{i=1}^{4} |0\rangle_i \\ = \frac{1}{\sqrt{\det \Phi_t^*}} \sum_{m,n,k,l} F(m,n,k,l)|m+k\rangle_1 \otimes |m+l\rangle_2 \otimes |n+l\rangle_3 \otimes |n+k\rangle_4, \end{gathered} \tag{30}$$

где

$$F(m,n,k,l) = (R_{12}(t))^m (R_{34}(t))^n (R_{14}(t))^k (R_{23}(t))^l \sqrt{C_{m+k}^m C_{n+k}^n C_{n+l}^n C_{m+l}^m}.$$

В конце этого раздела приведены вычисления информационно-этропийных характеристик процесса (27), следующие из симплектических раложений ковариационных матриц. Графики зависимости энтропий $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$, $S(\rho_{12}) = S(\rho_{34})$, $S(\rho_{13}) = S(\rho_{24})$, $S(\rho_{14}) = S(\rho_{23})$ от времени приведены на Рис. 2 а), б). Интенсивный рост энтропий объясняется взаимодействием между модами и соблюдением условия эффективного энергетического обмена (29). Помимо энтропий процесса вычислены условные энтропии и взаимные информации процесса (см. Рис. 2 в), г)), определяемые по формулам

$$\begin{aligned} S(A|B) &= S(\rho_{AB}) - S(\rho_B), \\ I(\rho_{AB}) &= S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}). \end{aligned}$$

Важным свойством квантовой условной энтропии в отличие от классической условной энтропии является то, что она может принимать *отрицательные* значения. Для произвольного состояния ρ_{AB} отрицательность условной энтропии $S(A|B)$ является *достаточным, но не необходимым* условием сцепленности. Таким образом, условная энтропия может служить индикатором сцепленности. Отсюда следует (Рис. 2 в), г)), что при смешивание частот (27) происходит блочное перепутывание: моды 1 и 2 сцепленны, моды 3, 4 также оказываются сцепленными, и подсистемы $A = 12$ и $B = 34$ сцепленны, поскольку $S(12|34) = -S(34) = S(12) < 0$. Найденный эффект представляет интерес для осуществления квантовой передачи информации, в частности, для *state-merging* протокола[4].

[4]см. Horodecki, M. Quantum state merging and negative information / M. Horodecki, J. Oppenheim, A. Winter, // Communications of Mathematical Physics. – 2005. – V. 269. – P. 107-136. или Wilde, M. Quantum Information Theory / M. Wilde –Cambridge University Press, 2013. – 655 p.

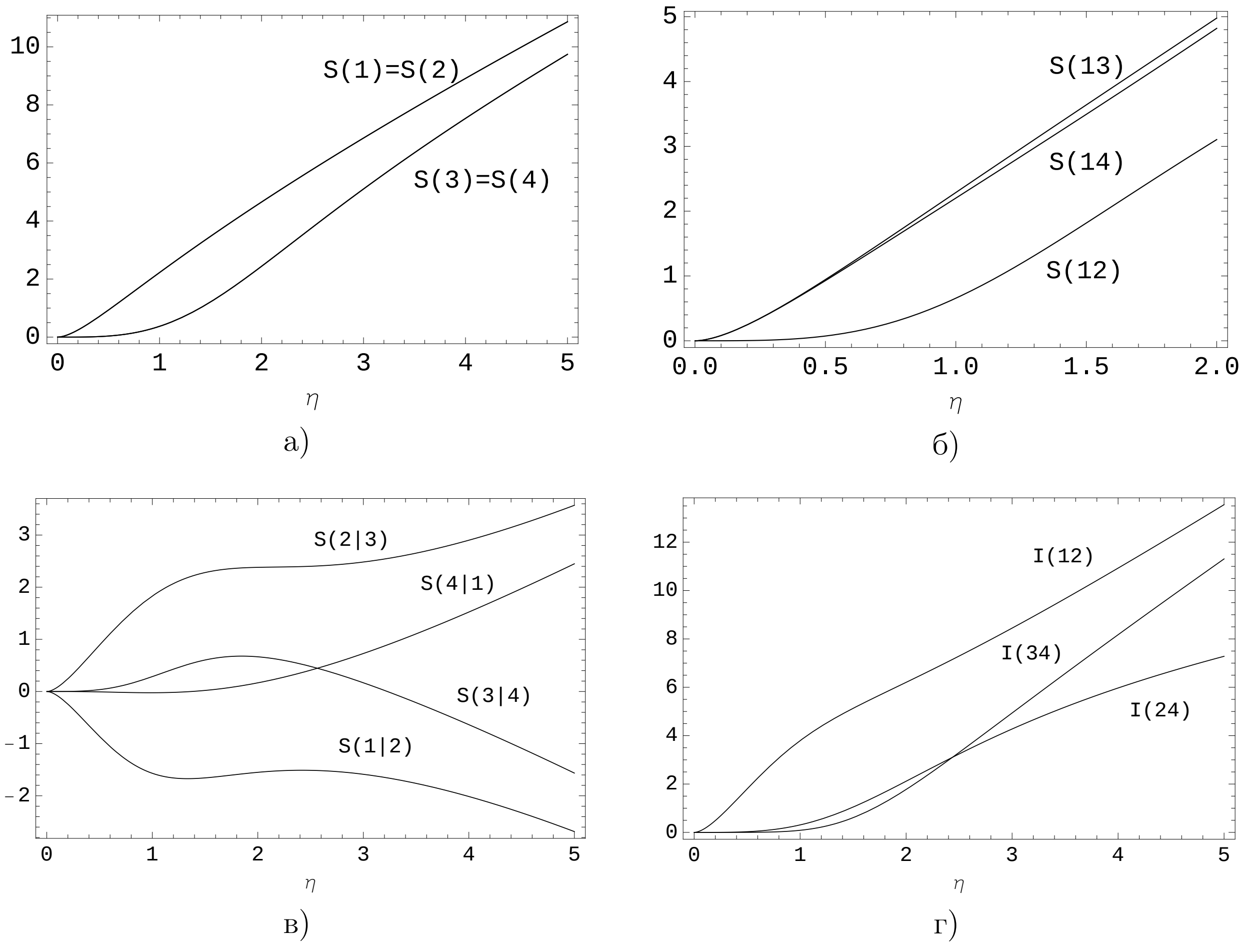

Рис. 2: а) Зависимость энтропий $S(\rho_i) = S(i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ от безразмерного времени взаимодействия $\eta = \beta t$ при $\gamma_1 = \gamma_2$. б) Зависимость энтропий $S(\rho_{ij}) = S(ij)$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ от безразмерного времени взаимодействия $\eta = \beta t$ при $\gamma_1 = \gamma_2$ в) Зависимость условных энтропий $S(1|2)$, $S(1|3)$, $S(2|4)$, $S(3|4)$ от безразмерного времени взаимодействия $\eta = \beta t$ при $\gamma_1 = \gamma_2$. г) Зависимость взаимных информаций $I(12)$, $I(23)$, $I(34)$ от безразмерного времени взаимодействия $\eta = \beta t$ при $\gamma_1 = \gamma_2$.

В заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

В приложении приведены краткие сведения о гауссовых состояниях.

Защищаемые положения

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Построено корректное нормально упорядоченное разложение оператора эволюции многочастичной квадратичной бозе-системы с использованием матриц канонических преобразований.

- Предложено корректное определение интегрального выражения для скалярного члена нормально упорядоченного разложения оператора эволюции квадратичной системы, а также его алгебраическое выражение как для случая вырожденной, так и невырожденной матрицы, задающей каноническое преобразование.

- Введено понятие индекса (аналога индекса Маслова в квазиклассической квантовой теории) для корректного определения скалярного члена нормально упорядоченного разложения оператора эволюции квадратичной системы.

- Вычислены скалярные произведения сжатых состояний и нормальный символ сжатия в терминах матриц канонических преобразований.

- На основе метода канонических преобразований проведен анализ нелинейных оптических параметрических процессов, происходящих в апериодическом нелинейном фотонном кристалле, в приближении поля классической накачки. Вычислен явный вид волновых функций в случае генерации трех и четырех мод в кристалле. Найдены энтропийные и информационные характеристики оптических параметрических процессов и на их основе проведен анализ сцепленности (перепутанности) генерируемых в процессах состояний.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. А.М Чеботарев, Т.В. Тлячев, А.А. Радионов, *Сжатые состояния и их применение в задачах квантовой эволюции*// Математические Заметки, том 89 (2011), с. 614-634.

2. А.М Чеботарев, Т.В. Тлячев, А.А. Радионов, *Сжатые состояния и их применение в задачах квантовой эволюции* // Вторая международная конференция "Математическая физика и ее приложения Самара, 29 августа - 4 сентября 2010 с. 274—276.

3. А.М. Чеботарев, Т.В. Тлячев , А.А. Радионов, *Обобщенные сжатые состояния и многомерная формула факторизации*// Математические Заметки, том 92 (2012), с. 762-777.

4. А.М. Чеботарев, Т.В. Тлячев, *Многомерные формулы факторизации некоммутирующих семейств операторов и их применение в задачах квантовой эволюции*// Ломоносовские чтения, 16 - 25 апреля, 2012, Москва, с. 62—65.

5. T.V. Tlyachev, A.S. Chirkin, *General approach to the quantum theory of multipartite coupled parametric processes*// The 19th Central European Work–

shop on Quantum Optics (CEWQO-2012), 2 - 6 July 2012 , Sinaia, Romania, p.77—78.

6. T.V. Tlyachev, A.M. Chebotarev and A.S. Chirkin, *A new approach to quantum theory of multimode coupled parametric processes*// Physica Scripta, T153 (2013).

7. T.V. Tlyachev, *Multipartite coupled parametric processes and uncertainty relations*// 20th Central European Workshop on Quantum Optics (CEWQO-2013), 16-20 June 2013, Stocholm, Sweden p. 188.

8. A.S. Chirkin, A.M. Chebotarev, T.V. Tlyachev, *Quantum theory of coupled three-frequency optical parametric interactions, multipartite entangled states*// 13th International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations, 24-28 June, 2013, Nuremberg, Germany p. 43.

9. A.S. Chirkin, A.M. Chebotarev, T.V. Tlyachev, *Complete quantum theory of nondegenerate optical parametric amplification at low frequency pumping*// ICONO/LAT, 18-22 June 2013, Moscow, Russia, p. 29.

10. T.V. Tlyachev, A.M. Chebotarev and A.S. Chirkin, *Canonical transformations and multipartite coupled parametric processes*// Physica Scripta, T160(2014).

11. A.M. Chebotarev, T.V. Tlyachev, *Normal Forms, Inner Products, and Maslov Indices of General Multimode Squeezings*// Mathematical Notes, 2014, Vol. 95, No. 5, pp. 721-737 .