



**Рыжиков Сергей Борисович**

Развитие исследовательских  
способностей одаренных  
школьников при выполнении  
исследовательских работ по  
физике с проведением  
экспериментов на базе фото– и  
видео техники

**Москва**  
**«Школа будущего»**  
**2012**

УДК 37.02 : 376.5  
ББК 74.262.22  
Р 93

**Рецензенты:**

*А. И. Федосеев*, доктор физико-математических наук, профессор физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

*Д. А. Исаев*, доктор педагогических наук, профессор, декан факультета физики и информационных технологий МПГУ

Рыжиков С. Б.

**Развитие исследовательских способностей одаренных школьников при выполнении исследовательских работ по физике с проведением экспериментов на базе фото- и видео техники:** монография. — М: «Школа Будущего», 2012. — 160 с.

Монография посвящена одной из актуальных в педагогике проблем — развитию исследовательских способностей одаренных школьников. В работе раскрыты методические аспекты проектно-исследовательской деятельности школьников, приведены конкретные направления, по которым могут быть выполнены экспериментальные исследовательские работы с использованием в качестве основного измерительного инструмента фото- или видеокамеры. Приведенные эксперименты могут быть воспроизведены в любой школе. Книга рассчитана на учителей физики, преподавателей и студентов педагогических вузов.

**ISBN 978-5-94389-017-8**

## Введение

Мы живем во время бурного развития науки и техники. Сегодня уже каждый школьник пользуется электронными устройствами (сотовые телефоны, планшетики, GPS-навигаторы, цифровые фотокамеры и пр.), которые 20 лет назад считались чудом техники, а 50 лет назад они не упоминались даже в самых смелых научно-фантастических романах. Развитие техники идет так быстро, что педагогика не может успеть отслеживать этот рост и вносить изменения в учебники физики (и др. естественных наук).

В связи с этим в настоящее время уже стало общепризнанным необходимость перехода к новой парадигме в образовании – от заучивания определенного объема информации (к тому же постоянно устаревающей) к умению в дальнейшем приобретать необходимые знания самостоятельно [14, 16, 19, 34, 54, 74, 80, 88, 117, 128, 154, 202, 203, 205]. Поэтому актуальной задачей является развитие исследовательских способностей школьников по различным предметам в соответствии с их интересами, в том числе в области физики, что отмечено в новых образовательных стандартах РФ.

Большую роль в этом играет проведение проектно-исследовательских работ, которые могут включать как теоретическую, так и экспериментальную составляющую. В настоящее время выполнению проектно-исследовательских работ школьниками всех возрастных групп уделяется большое внимание, результаты этих работ докладываются на региональных, всероссийских и международных конкурсах (конференциях) проектно-исследовательских работ школьников [25, 36, 42, 50, 58, 66, 73, 87, 89, 106, 119, 125, 140, 159, 165, 171, 182, 188, 191, 192, 194, 195, 219, 240, 257]. Большое внимание проектно-исследовательским работам уделяется не только в России, но и во всех ведущих индустриальных странах [2, 18, 46, 47, 80, 114, 139, 155, 248].

Хотя имеются некоторые разногласия в терминологии, большинство авторов разделяют проектные, исследовательские, учебно-исследовательские и научно-исследовательские виды деятельности [26, 52, 79, 84, 86, 99, 100, 118, 121, 130, 132, 141, 142, 199, 220, 246, 249]. Под проектами обычно понимают любую деятельность учащихся, в результате которой возникает новый продукт: это может быть создание стенгазеты, компьютерной презентации, программы, разработка фантастических проектов по освоению Луны и т.п. Хотя важную роль самостоятельных

исследований учеников отводили еще в античности и в новое время [235, 236, 237], считается, что метод проектов, как совместная деятельность ученика и учителя в поиске решения проблем был разработан в начале XX века американским педагогом Дж. Дьюи [74, 84, 144]. В России примерно в то же время этот метод активно использовал педагог С.Т. Шацкий [84, 144]. Под исследовательской работой школьника понимается более узкий вид деятельности, связанный с получением новой информации, один из видов познавательной деятельности человека [13, 26, 113, 133, 199, 214].

В наибольшей степени развитию исследовательских способностей способствует проведение исследовательских работ [29, 199, 200, 67, 75, 79, 90, 107, 118, 119, 122, 212]. Это обусловлено прежде всего тем, что при проведении исследовательских работ школьник не связан прокрустовыми рамками условий стандартных задач, где в явном или неявном виде ему уже заданы модельные предположения, и точными указаниями хода выполнения лабораторной работы. Поэтому, планируя и проводя подобные работы, школьник имеет определенную степень свободы, необходимую для творчества. Школьник может сам выбрать себе тему, при необходимости ее скорректировать в ходе работы, определить объект исследования, выбрать модельные предположения и т.д. В результате он приобретает навыки работы с литературными источниками, интерпретации, классификации, обобщения полученной информации. Школьник учится планировать и проводить физические эксперименты, обрабатывать полученные данные, делать на их основании выводы. Докладывая о результатах работы в классе или на конференции школьных работ, ученик получает навык публичных выступлений. Таким образом, школьник приобретает компетенции «взрослых» ученых-исследователей, которые будут необходимы в его дальнейшей деятельности, если он после школы выберет обучение в техническом или естественнонаучном вузе [55, 73, 75, 97, 101, 107, 141, 173, 178, 181, 188, 192, 194, 196, 200, 201, 210, 225].

По уровню сложности исследовательскую деятельность можно условно разделить на три уровня.

Первый уровень (начальный) – школьник получает субъективно новую информацию, т.е. он изучает явления, которые еще не изучались в классе. Работы этого уровня не предполагают проведение глубокого анализа полученных результатов и определения их места в общей системе научных знаний.

На этом этапе исследование можно проводить в виде фронтальной лабораторной работы, учитывая при этом существенную разницу между обычной (стандартной) лабораторной работой, где школьнику заранее указывается ход работы, и исследовательской работой, где у школьника существует определенная свобода действий [1, 3, 6, 7, 26, 54, 74, 82, 109, 129, 153, 247, 256]. Выполняемые задания при этом не отличаются особенной сложностью, например ученики могут исследовать процесс закипания воды или измерять коэффициент трения [33, 92].

Второй уровень – школьник получает субъективно новую информацию, но при этом эту информацию нельзя просто получить из школьного учебника. Для получения результатов от школьника требуется проведение глубокого анализа полученных экспериментальных и (или) теоретических данных. Кроме этого, для определения места полученных результатов в общей системе научных знаний школьник проводит на доступном для него уровне анализ научной литературы по данному вопросу.

Проведение подобных работ в большей степени дает школьнику представление о научной работе, чем получение примитивной информации в работах первого уровня. К сожалению, проводить подобные работы можно только индивидуально или небольшими группами [6, 13, 73, 75, 78, 79, 87, 91, 99, 103, 121, 125, 131, 159, 196, 214, 219].

Следует иметь в виду, что хотя при выполнении работ второго уровня школьник не открывает, а всего лишь «переоткрывает» физические закономерности, но тем не менее он действует как настоящий «взрослый» исследователь, воспроизводя основные этапы научного исследования [26, 34, 75, 79, 89, 94, 99, 121, 155, 156, 199, 200].

Третий уровень – школьник получает объективно новую научную информацию. Число работ третьего уровня намного меньше, чем первого и второго. Обычно такие работы проводятся в лабораториях НИИ или вузов под руководством научных сотрудников. Как правило, эти работы проводятся учениками школ, являющимися «базовыми» школами при вузах или институтах (например, СУНЦ МГУ, лицей 1511 при МИФИ, 1580 при МГТУ им Э.Н. Баумана... и т. п.). К несомненным достоинствам этих работ относится то, что школьник получает представление о работе современной научной лаборатории, проходит профориентацию, знакомится с возможным местом своей будущей работы [15, 67, 68,

82, 98, 107, 139, 225]. Однако, опыт работы в жюри Московских городских и всероссийских конкурсах проектно-исследовательских работ показывает, что поскольку работой школьника руководит не педагог, а научный сотрудник (или, чаще, дипломник или аспирант), то во многом страдает само обучение. Школьник, работая на дорогостоящем современном физическом приборе, не всегда хорошо представляет физические принципы его функционирования. Бывали случаи, когда личный вклад школьника ограничивался тем, что ему «разрешили нажать вторую кнопку справа». Само же выполнение работы при этом зачастую регламентировано руководителем еще жестче, чем обычная школьная лабораторная работа, так что, несмотря на то, что в ходе работы иногда получаются интересные научные результаты, исследовательская составляющая работы школьника, т.е. умение выдвигать гипотезы, планировать эксперимент, анализировать полученные данные и пр. может отсутствовать.

Сделанное замечание в большой степени справедливо при работе школьника на дорогостоящем школьном оборудовании, например, цифровой лаборатории «Архимед». Опыт работы в жюри конкурсов проектно-исследовательских работ показывает, что, проведя работу с помощью оборудования лаборатории «Архимед», школьник зачастую не имеет представления о точности полученных результатов и методах их обработки. Разумеется, сделанное замечание относится лишь к части, а не ко всем работам. Встречаются прекрасно выполненные работы, когда школьник разобрался с постановкой проблемы, успешно освоил экспериментальную методику и математические методы обработки результатов [55, 107, 27, 140, 141]. Остается только надеяться, что число таких работ будет расти.

Как уже было отмечено выше, выполнение работ третьего уровня доступно в основном школьникам, обучающихся в лицеях при вузах или НИИ, а сами работы выполняются в научных лабораториях. К сожалению, большинство школьников лишены такой возможности, и выполняют проектно-исследовательские работы в своей школе. Возникает вопрос, как организовать исследовательские работы в условиях слабой обеспеченности средней школы экспериментальным оборудованием?

Многие направления исследований могут быть реализованы с помощью ставших уже общедоступных фотоаппаратов и видеокамер.

Следует заметить, что фотоаппараты, видеокамеры, фотографии и видеofilмы давно успешно применяются в средней школе. Сложно перечислить все направления их использования.

Фотографии и видеофильмы применяются для изучения нового материала, решения задач и контроля за эффективностью обучения. Фотоаппараты и видеокамеры используются для проведения творческих проектных работ, создания видеофильмов, в т.ч. учебных, для самоконтроля учителей за успешностью проведения занятий и обмену опытом и т.д. [11, 12, 24, 124, 93, 146, 151, 258, 259, 260]. Однако несмотря на свою доступность фото- и видеотехника мало используется в качестве измерительной аппаратуры для проведения физических экспериментов. Причины этого и проблемы, возникающие при работе с фото- и видеокамерами мы обсудим ниже, после того как разберем общие принципы проведения исследовательских работ школьников.

# Глава 1

## Общие принципы проведения исследовательских работ

### 1.1. Особенности проведения исследовательских работ по сравнению с другими формами обучения

Выполнения исследовательских работ имеет несколько особенностей, существенно затрудняющих их проведение по сравнению с другими формами обучения [3, 6, 26, 50, 61, 75, 79, 97, 99, 105, 125, 131, 159, 196, 198, 199, 214, 231, 241, 257].

1) **Время выполнения.** Выполнение исследовательской работы занимает несколько недель, а иногда и месяцев. Кроме того, первые результаты работы могут появиться нескоро, только через несколько занятий. Это существенно отличает исследовательские работы от других форм обучения. Когда школьник учится решать задачи, то к концу урока он уже способен научиться решать задачи рассматриваемого типа, при выполнении лабораторной работы, он получает результаты уже в конце рабочего дня. При выполнении исследовательской работы от школьника требуется много терпения. К сожалению, случаи, когда, с энтузиазмом начав выполнять работу, школьники «сходили с дистанции». Поэтому желательно, чтобы первые результаты получались уже через 2-3 занятия, на большее время терпения может не хватить.

2) **Выбор темы.** Для успешного выполнения работы необходимо, чтобы:

- тема исследования была интересна школьнику;
- работа по этой теме должна быть выполнима.

В связи с этим возникает проблема: если тему формулирует руководитель, то у школьника может остаться ощущение не свободы в выборе темы. При этом также теряется важнейшая составляющая исследовательской деятельности – умение наблюдать за физическими явлениями, поскольку многие темы возникают из наблюдений школьника за окружающим миром природы и техники [32, 94, 101, 103, 145, 175, 186, 196, 215, 231, 240, 251].

Если тему предлагает школьник, то, как показывает опыт, она редко бывает выполнимой. Кроме того, обычно школьник не в состоянии сформулировать тему исследования, поскольку он ранее таких исследований не проводил и плохо понимает, как это делается.



Предлагать темы на выбор также не является выходом из положения, поскольку по названию темы школьник не может оценить трудоемкость работы и ценность ожидаемых результатов [69, 81, 103, 131, 149, 249, 251].

Поэтому оптимально, чтобы выбор темы был результатом совместных усилий ученика и руководителя. Например, вначале руководитель при разговоре с учеником выясняет общее направление его интересов (тепловые машины, оптические явления, аэродинамика и пр.). Затем руководитель либо предлагает конкретную тему исследования, либо незаметно подсказывает как подобная тема может звучать. Если у школьника есть желание «сделать что-нибудь интересное», но нет никаких идей, то можно предложить поискать интересующую его тему в научно-популярной литературе, где описано большое число занимательных экспериментов и интересных наблюдений, связанных с проявлением физических явлений в повседневной жизни [10, 38, 41, 44, 112, 134, 135, 226, 221, 222].

3) **Отбор школьников.** Опыт показывает, что число школьников, готовых тратить свои силы и внеучебное время на выполнение исследовательских работ относительно невелико. Кроме того, следует учесть, что школьники 10 и 11-го классов усиленно готовятся к ЕГЭ, поэтому вовлекать школьников в исследовательскую деятельность в области физики желательно с 7-го класса – с момента начала изучения предмета физики. Если школьник изучает физику в более раннем возрасте, например, в кружке, то можно привлекать его к исследовательской деятельности с момента, когда он приходит в кружок [1, 3, 36, 50, 62, 64, 69, 98, 99, 101, 139, 145, 203, 206, 231, 243].

Одним из способов вовлечения детей является организация исследовательских работ в системе дополнительного образования: в школьных кружках, дворцах детского творчества, научных обществах учащихся (НОУ) и т.п. [6, 13, 27, 66, 141, 142, 198, 224, 225, 234, 239]. Заинтересованные школьники приходят в кружок, наблюдают за работой старших учеников, принимают участие в их исследованиях, а затем переходят к самостоятельным работам. Некоторые школьники начинают заниматься исследовательской деятельностью после выступления (или в процессе подготовки) на Турнире юных физиков [53, 55, 107, 210].

Возможен поэтапный вариант отбора. На первом этапе школьники приходят в кружок (на элективный курс) по решению задач повышенной сложности или просто кружок занимательной физики. По мере обучения в кружке у них могут появляться вопросы,

которые выходят за рамки подготовки к решению олимпиадных задач, требуют изучения дополнительной литературы. Впоследствии, если интерес к проблеме развивается, то школьник может захотеть провести самостоятельное исследование по заинтересовавшей его теме [199]. Подобный метод отбора школьников используется автором и некоторыми его коллегами в лицее «Вторая школа» [159, 181, 191, 192, 196], о чем будет подробнее рассказано ниже.

## **1.2. Особенности проведения работ в летних школах**

Летние школы являются прекрасной площадкой для проведения проектно-исследовательских работ, поскольку:

- у руководителей имеется большая свобода в планировании курсов;
- исследования можно уделять больше времени, чем в обычной школе, где исследования можно проводить лишь во второй половине рабочего дня;
- в летние школы ездят в основном высокомотивированные (одаренные) школьники.

Однако при выполнении исследовательских работ в летних школах возникают дополнительные проблемы:

- летние школы продолжаются непродолжительное время, редко более трех недель, поэтому времени «на раскочку» нет.
- в летнюю школу невозможно вывести много оборудования для демонстрационных экспериментов и практических работ.
- в летней школе обычно число компьютеров ограничено и нет возможности предложить школьникам произвести обработку экспериментов на домашнем компьютере.

Поэтому в летней школе сложно провести полноценную исследовательскую работу и стоит ориентироваться на то, чтобы такую работу хотя бы начать с тем, чтобы доделать ее уже в течение учебного года, проводя очное или дистанционное научное руководство школьником [173, 178].

## **1.3. Общие рекомендации по планированию исследовательской работы от постановки задачи до подготовки доклада на конференции**

**Выбор темы.** При всем многообразии тем исследовательских работ существует единое требование: работа должна быть «обречена на успех». То есть, если ученик не бросает работу посередине пути, а

выполняет указания руководителя, то у него должен быть набран материал для выступления на конференции. Если школьник в результате работы не получает результатов, то положительные стороны выполнения исследовательской работы могут стать отрицательными. Действительно, у него перед глазами будет пример, что его сверстники выполняют работы и у них все получилось, а у него – нет. Ему остается думать, что он – неудачник, и, вместо того, чтобы ощутить радость творчества, у него может возникнуть боязнь к исследовательской деятельности. Поэтому лучше ставить простые, но заведомо выполнимые задачи, чем дать важную и актуальную, но рискованную тему работы [22, 100, 103, 104, 105, 139, 145, 149, 196, 218, 251].

#### **Число участников исследовательской работы.**

Исследовательские работы могут проводиться как индивидуально, так и группой. Способ проведения сильно зависит от характера ученика. Некоторые с самого начала хотят проводить работу в одиночку – чтобы никто не мешал. Другие, напротив, из боязни остаться «один на один» с учителем или по другим причинам предпочитают работать вдвоем, втроем или небольшой группой [1, 6, 60, 62, 100, 102, 109, 149, 231, 240]. Опыт показывает, что увеличение числа участников нежелательно, поскольку это приводит к тому, что делают работу 1-2 человека, а остальные лишь при этом присутствуют. Постоянная работа школьников «на вторых ролях» не способствует формированию их исследовательских умений и может привести к заниженной самооценке [199]. К тому же на конференции жюри обязательно заинтересуются, как были распределены роли между участниками. Руководителю нужно быть готовым к тому, что когда работу начинают делать несколько человек, через некоторое время они захотят делать каждый свою задачу. В этом случае хорошо бы иметь несколько подзадач, чтобы при необходимости предоставить каждому участнику свой фронт работы.

**Планирование времени работы.** Как показывает опыт, исследовательская работа – это не движение по заранее намеченному плану, а борьба с постоянно возникающими самыми неожиданными препятствиями [74, 80, 149]. Поэтому в процессе выполнения работы школьник:

1) приобретает понимание того, что в процессе проведения исследования происходит постоянная корректировка первоначального плана работы;

2) путь к совершенству бесконечен и в любом исследовании существует желание улучшить полученный результат, набрать больше статистики ... и. т. п. Однако нужно в какой-то момент остановиться, чтобы оформить результат и доложить его на конференции или конкурсе школьных работ. Обычно этот момент определяется – объемом выполненного исследования, а временным фактором – необходимостью успеть подготовить доклад к конференции [26, 60, 62, 94, 103, 104, 105, 149].

#### **1.4. Основные направления использования фото- и видеотехники при обучении физике**

Приведем основные направления использования фото- и видеотехники при обучении физике.

– использование на уроках видеозаписей и фотографий в качестве демонстрационного материала и видеозадач [24, 48, 93, 96, 151, 152, 160, 213, 244], в том числе богатого фото- и видеоматериалов на учебных видеокассетах и мультимедийных дисках [9, 39, 40, 48, 152, 250];

– использование видеокамеры (часто web-камеры) для демонстрации через проектор экспериментов, которые плохо видны в классе ввиду малости исследуемых объектов [65, 158];

– создание видеозаписей уроков с целью самоанализа проведенного урока, обмена опыта с коллегами, помощи ученикам, пропустившим занятие [146, 258, 259, 260];

– проведение проектных работ, включающих создание учениками иллюстративных материалов, в т.ч. учебных видеофильмов [24, 43, 72, 124, 250].

– использование в качестве измерительных инструментов, о чем речь пойдет ниже.

Мы не будем затрагивать применение фото- и видеотехники, используемой для художественной съемки. Хотя эта съемка может быть связана с изучением физики [11, 12, 93], например, для театрализованного представления на физические темы, но такое применение фото- и видеотехники не является специфическим для обучения физике и выходит за рамки рассматриваемой темы.

## **1.5. Возможности использования фото- и видеотехники в качестве измерительного инструмента**

Хотя во многих описанных ниже примерах вместо фото- или видеотехники можно использовать другие инструменты (стробоскоп, электронный секундомер со световыми воротами или герконовыми датчиками и т.п.), использования фото- и видеотехники имеет серьезные преимущества [93, 161, 170, 176, 193, 217]:

- доступность – сегодня сложно найти удаленный город, где нельзя было бы приобрести цифровую фотокамеру;
- простота в использовании – вряд ли можно найти школьника, который не умел бы фотографировать, описанным ниже «маленьким хитростям» может овладеть каждый;
- универсальность – нет необходимости приобретать фотокамеру специально для проведения исследовательской работы, можно использовать имеющуюся технику;
- взаимозаменяемость – описанные в литературе эксперименты можно воспроизвести с помощью другой фотокамеры такого же класса;
- компактность – фото- и видеотехника не занимает много места, она может использоваться в походе и условиях летней школы;
- простота в подготовке – хотя в большинстве фото- и видео сессиях требуются дополнительные источники освещения, подготовка к фото- или видео съемке в описанных ниже экспериментах не занимает много времени;
- возможность компьютерной обработки данных – полученные в цифровых камерах данные можно быстро перенести на компьютер;
- высокая точность измерений – подробнее на точности измерений мы остановимся ниже;
- наглядность – возможность использовать полученные фотографии или видеоролики в качестве иллюстративного материала на уроке, в презентации на конференции и т.п.

К недостаткам фотокамер можно отнести их хрупкость. При неаккуратном обращении или падении на пол они выходят из строя, что затрудняет их использование при выполнении фронтальных лабораторных работ, когда учитель не может уследить за правильностью эксплуатации всех фотокамер. Видимо это и является

основной причиной, почему они не получили широкого распространения в школе.

Фото- и видеотехника может быть использована при следующих направлениях исследований:

- исследование динамики протекания процессов, особенно она полезна, когда исследуются очень быстрые (доли секунды и короче) или очень медленные (часы или дни) процессы;
- исследование формы и распределения цвета на объекте, особенно в случае очень мелких, очень крупных или неустойчивых объектов [20, 85, 93 143, 158, 165, 170, 174, 176, 177, 179, 182, 185, 193, 233, 238, 242].

Рассмотрим особенности использования фото- и видеотехники при выполнении различных задач.

## **1.6. Особенности использования фото- и видеотехники для регистрации движения**

В зависимости от задачи можно использовать следующие схемы работы.

1. Режим однократной съемки – может быть реализован практически с любым фотоаппаратом и большинством видеокамер, однако в большинстве видеокамер размер изображения меньше, чем у фотоаппаратов. Желательно, чтобы фотоаппарат имел ручную установку времени экспозиции для уменьшения размытости кадра при съемке быстро движущихся объектов.

2. Режим серийной съемки – реализован в большинстве цифровых фотоаппаратов. Желательно, чтобы также можно было вручную устанавливать время экспозиции кадров.

3. Режим видеозаписи – реализован во всех видеокамерах и в большинстве цифровых фотоаппаратов. Фотоаппарат создает видеофайл типа «avi» («mov» и т.п.), который нужно перенести на компьютер для дальнейшей обработки. Видеокамера также позволяет перенести записанный видеоролик на компьютер по цифровому каналу. Видеофайл можно преобразовать в последовательность графических файлов с помощью программ видеобработки Adobe Premiere, Movie Maker и др. [24, 43, 72, 124, 170, 176]. При съемке движущихся объектов возникает «смазывание» изображения, поэтому следует выбирать соответствующий режим съемки движущихся объектов, который есть в большинстве видеокамер, обычно он называется «спорт». В этом режиме время экспозиции кадра

уменьшено, поэтому получается лишь незначительное размытие изображения [170, 176].

Замечание. Аналоговая видеокамера также позволяет создавать видеофайлы, однако для этого потребуется специальное устройство видеозахвата, позволяющее преобразовывать видеозапись в файл [170].

Во всех схемах работы нужно соблюдать следующие требования:

– Во избежание «дрожания» изображения, видеокамеру или фотоаппарат следует закреплять на штативе. В крайнем случае, ее можно положить на стол, но не держать в руках.

– При появлении в кадре быстро движущегося предмета, видеокамера или фотоаппарат может автоматически начать перенастраивать фокус, что приведет к размытию изображения. Поэтому следует после наведения камеры на фокус перевести в ее режим фиксированного или ручного фокуса.

– При съемке с укороченным временем выдержки необходимо обеспечить хорошее освещение. Поэтому съемку нужно проводить в дневное время или использовать мощный осветитель [170, 176].

Каждый режим работы имеет свои преимущества. Наиболее удобен режим серийной съемки, поскольку сразу создает серию графических файлов. Однако большинство фотоаппаратов не позволяют снимать достаточно быстро и достаточно долго, поэтому этот режим нельзя использовать, если нужно зафиксировать очень быстрый или, наоборот, очень долгий процесс. Ограничения по времени сильно варьируют от конкретной модели фотоаппарата или видеокамеры.

Видеосъемка позволяет проводить длительное наблюдение за динамикой процесса, однако если нельзя регулировать время затвора, то получатся не очень четкие кадры.

Однократная съемка имеет то преимущество, что существует в каждом фотоаппарате и позволяет получать четкие кадры высокого разрешения. Как мы увидим ниже, в некоторых случаях полезно при наличии нескольких фотоаппаратов или видеокамер комбинировать разные виды съемки [170].

Учитывая схожесть функций фотоаппаратов и видеокамер, в дальнейшем мы будем упоминать обобщенное название «фотокамера» и режим работы устройства.

## 1.7. Определение погрешности измерений

Остановимся подробнее на точности измерений.

Частота кадров в фотоаппарате (режим «видео») и в камере выдерживается с высокой точностью, иначе видеоролик при просмотре на телевизоре начал бы «плыть». Будем считать, что неточности, связанные с измерением времени видеокамерой, намного меньше остальных приборных погрешностей.

Сложнее определить промежутки между кадрами при серийной съемке. Обычно в инструкции по эксплуатации фотоаппарата приводятся лишь примерные значения частоты следования кадров. Кроме того, промежутки между кадрами могут в определенных пределах меняться. Поэтому необходимо провести калибровку, произведя съемку работающего секундомера с отчетом десятых долей секунды. Сделав серию кадров, можно построить график зависимости показаний секундомера от номера кадра. Проведя несколько съемок можно определить частоту следования кадров и стабильность работы фотоаппарата.

Этот же прием можно использовать для проверки скорости съемки видеокамеры или фотоаппарата в режиме видеосъемки [170, 176].

После того, как запись сделана и преобразована в последовательность графических файлов, по ней можно определить [158, 170, 176]:

- время движения тела на определенном участке, например, между линиями старта и финиша;
- координаты тела, траекторию его движения;
- скорость и ускорение тела.

Если необходимо найти время движения тела, то наша точность определяется частотой кадров камеры. Когда мы измеряем длину миллиметровой линейкой, то мы берем в качестве погрешности измерительного инструмента пол цены деления (т.е. 0,5 мм). При измерении времени в кадрах, мы можем получить точность 0,5 кадра. Если, например, шарик начал движение у верхней линии на десятом кадре, на пятнадцатом кадре он еще не достиг финиша, а на шестнадцатом уже пересек его и успел продвинуться дальше, то можно сказать, что шарик прошел от старта до финиша за  $5,5 \pm 0,5$  кадров. С другой стороны, обычно момент начала движения так же неизвестен. Например, шарик мог начать двигаться чуть раньше начала 10-го кадра, но заметили мы его движение только на 10-м



кадре. Поэтому момент начала движения мы также определяем с точностью не лучше, чем 0,5 кадра. Таким образом, приборная погрешность при измерении интервала времени с помощью видеокамеры составляет плюс-минус один кадр. В приведенном примере шарик двигался 6 кадров, поэтому можно сказать, что время его движения составляет  $6 \pm 1$  кадров, т.е. относительная точность измерения одна шестая.

Более высокая точность достигается при измерении не времени движения, а координат тела. Координаты тела измеряются по оцифрованному кадру видеокамеры или фотоаппарата. Проще всего это делать в графических редакторах (PaintBrush, Photoshop и т.п.), где указываются текущие координаты курсора. Для большей точности курсор лучше подводить не к центру тела (шарика), который не всегда можно точно определить, а к верхнему или нижнему краю тела. В некоторых программах можно сделать курсор, напоминающий размером и формой наблюдаемый объект, Координаты объекта определяются по положению курсора, когда он максимально точно совпадает с объектом [170, 176].

Для того чтобы перевести размеры изображения в метры, надо определить с помощью курсора координаты любого изображения с известными размерами на том же кадре (например, меток на линейке). При этом нужно иметь в виду, что масштаб по горизонтали и по вертикали может несколько различаться. Использование широкоугольного объектива приводит к некоторому искажению размеров (масштаб в верхней части кадра может быть чуть мельче, чем в центре), что требуется учесть для более точного определения координат шарика [158, 170, 176].

Точность измерений координат определяется разрешающей способностью видеокамеры. С учетом того, что объекта обычно немного «смазан», относительная точность определения координаты редко бывает лучше 1% от размера кадра.

Таким образом, абсолютная точность измерения координаты тела зависит от того, насколько большой участок пути мы хотим зафиксировать. Чем больший отрезок пути должен поместиться в кадре, тем меньше точность определения координат тела.

По двум последовательным кадрам можно измерить скорость движущегося тела. Для этого следует измерить путь  $\Delta L$ , который оно проходит между двумя кадрами. Затем скорость движения тела вычисляется по формуле  $v = \Delta L / T$ , где  $T$  – время между двумя последовательными кадрами (см. рис. 1.1) [170, 176].

Следует иметь в виду, что таким способом мы измеряем не мгновенную, а среднюю скорость. Действительно, средняя скорость – это отношение перемещения тела ко времени  $\Delta t$ , за которое это перемещение произошло. Мгновенная скорость – это предел, к которому стремится средняя скорость при  $\Delta t$ , стремящемся к 0. Но устремить  $\Delta t$  к 0 можно только теоретически. На практике мы ограничены частотой кадров видеокамеры и измеряем *среднюю* скорость, пусть за малые, но не за бесконечно малые промежутки времени.

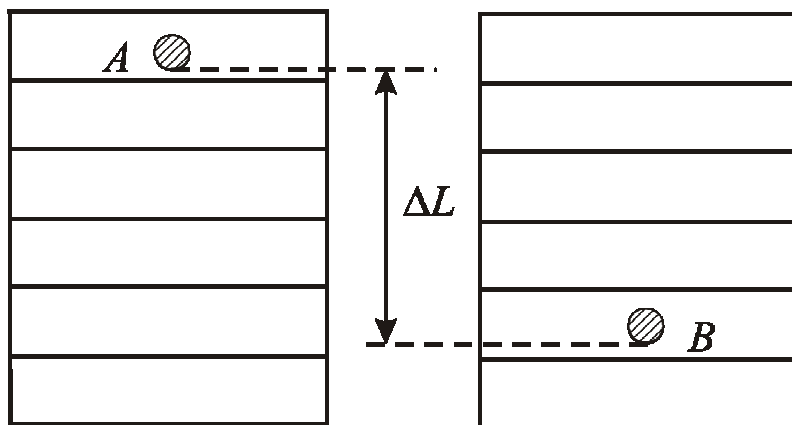


Рис. 1.1

Пояснение к определению скорости тела с помощью видеокамеры:  
*A* и *B* – положения тела на двух последовательных кадрах

Измеряя изменение скорости между тремя последовательными кадрами, можно вычислить также и ускорение. Однако, поскольку за малые промежутки времени скорость меняется мало, то ускорение будет измерено не очень точно [158, 170, 176].

Кроме приборных погрешностей следует учитывать и статистические погрешности, вызванные самыми разнообразными причинами. Поэтому каждую серию экспериментов нужно несколько раз повторить и обрабатывать их в соответствии с общепринятыми правилами учета статистических погрешностей [95, 120].

## 1.8. Учет параллакса

Наиболее удобна схема опыта, когда изучаемый объект располагается (или движется) на фоне масштабной линейки [170, 176]. Это позволяет легко рассчитать координаты. Однако это создает сложности при наведении камеры на резкость. Экран следует располагать как можно ближе к объекту – так, чтобы он только не мешал бы движению. Это требование обусловлено тем, что камера, скорее всего, наведет фокус на масштабные линии на экране. Объект в этом случае оказывается не в фокусе камеры, его изображение получается сильно размытым, а может и вовсе стать незаметным на общем фоне. Чтобы надежно снять движение небольшого тела, нужно поставить экран непосредственно за линией движения объекта.

Однако, поскольку тело движется на некотором удалении от мерных линий, то для большей точности следует учесть параллакс [170, 176]. Причина возникновения параллакса поясняется на рис. 1.2. Пусть тело движется по вертикали  $AE$ , экран с линиями расположен за шариком на расстоянии  $a=|EF|$ , а наблюдатель (камера) находится в точке  $O$ :  $|OE|=L$ . Точки  $A$  и  $B$  – положение тела на двух последовательных кадрах. Наблюдателю в точке  $O$  кажется, что тело прошло путь  $h_1=|CD|$ , который больше чем реальный  $h=|AB|$ .

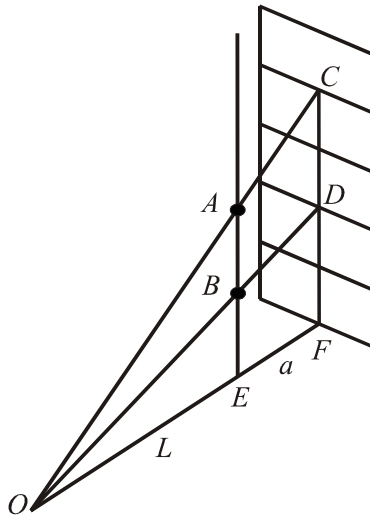


Рис. 1.2. Пояснение к расчету параллакса

Из подобия треугольников  $OAB$  и  $OCD$  и треугольников  $ODF$  и  $OBE$  имеем:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|OB|}{|OD|}, \quad \frac{|OB|}{|OD|} = \frac{|OE|}{|OF|} = \frac{L}{L+a}.$$

Таким образом:  $h = h_1 \frac{L}{L+a}$ .

Получается, что видимый путь тела  $h_1$  больше истинного пути  $h$ . Для уменьшения параллакса камеру следует располагать по возможности дальше от экрана, так, чтобы  $L$  было много больше  $a$ , а необходимый размер кадра получать, используя приближение (Zoom). Удаление камеры от объекта позволяет также уменьшить искажения, возникающие при съемке широкоугольным объективом на близких расстояниях [170, 176].

## 1.9. Особенности работы с видеокамерами с чересстрочной разверткой

Некоторые аналоговые VHS и SVHS видеокамеры и некоторые цифровые видеокамеры работают в режиме «чересстрочной развертки» (interlacing). В этом режиме регистрирующее устройство при сканировании сначала «захватывает» все нечетные строки изображения, а при следующем сканировании – все четные строки. При этом на кадрах получаются двойные изображения движущихся тел. Тела выглядят полосатыми как «зебра» с горизонтальными полосками, причем изображения несколько смещены относительно друг друга. Неподвижные и медленно движущиеся тела при этом получаются без искажений.

Эффект появления «двойников» у межстрочной развертки хорошо известен. Программы обработки видео и графические пакеты типа «Photoshop» имеют специальные фильтры (De-Interlace) для его нивелирования. Обычно такие «двойники» мешают, но в данном случае они могут сослужить хорошую службу, поскольку отражают перемещение тела за половину времени между кадрами. Например, если частота камеры 25 кадров в секунду, то время между положениями «двойников» соответствует  $1/50$  с, что позволяет вдвое уменьшить время между последовательными положениями движущегося тела [170].

## 1.10. Общие замечания о планировании и проведении экспериментов

В отличие от стандартных фронтальных лабораторных работ, когда школьникам дается полное описание работы, начиная с указания цели работы, при выполнении исследовательских работ у школьников должна быть определенная свобода выбора в постановке экспериментов. Однако свобода предполагает ответственность школьника за получение конечного результата. Поэтому руководитель должен помочь ученику в **планировании** эксперимента [73, 149, 200, 201].

При планировании ученик должен ответить на следующие вопросы:

- возможно ли проведение эксперимента по предложенной схеме с учетом размеров помещения, правил техники безопасности и т.д.?
- сколько времени займет проведение экспериментов с учетом необходимости повторения измерений для определения статистической погрешности?
- позволит ли погрешность измерений у используемых приборов получить ожидаемый результат с необходимой точностью при условии, что не возникнет дополнительных непредвиденных помех при проведении эксперимента?

Если еще до проведения эксперимента становится ясно, что точности измерительных приборов не хватит для выявления желаемого эффекта или эксперимент займет слишком много времени, то нет смысла его даже начинать, а лучше еще раз продумать как оптимизировать условия проведения эксперимента.

## Глава 2

### Использование фото- и видеотехники при исследовании колебательных процессов

Если тема исследования еще не выбрана из иных соображений, то освоение техники работы с фотокамерами можно начинать с колебательных процессов. Это обусловлено следующими причинами.

- колебательные процессы так или иначе изучаются в школьной программе, причем эта тема – сложная и вызывает много вопросов у школьников;

- формулы, необходимые для решения задач по этой теме, а именно: период пружинного и математического маятников, закон движения груза при гармонических колебаниях (тот факт, что движение происходит по синусоидальному закону), во многих учебниках приводятся без строго доказательства, как экспериментальный факт [37, 148, 223], а в других доказательство приводится с использованием производных [229], что затрудняет понимание явлений и вызывает путаницу при решении задач;

- при изучении математического маятника используется понятие малых углов (малых колебаний), которое не очень понятно школьнику (почему  $6^\circ$  – это малый угол, а  $7^\circ$  – уже нет, и что делать, если угол не мал);

- колебательные процессы достаточно часто встречаются в повседневной жизни: это и качание качелей, и колебание гитарной струны, и колебание маятника настенных ходиков и пр.,

- изучение колебаний математического маятника – любимая лабораторная работа многих учителей [59, 110, 111];

- на основе колебательных систем можно поставить много исследовательских работ [171, 175, 177, 183, 193].

Реализовать простейшие колебательные системы оказывается совсем несложно, необходима лишь нитка и грузик. Описать наблюдаемые процессы оказывается намного сложнее, поскольку для решения полученных уравнений (даже в приближении малых углов) требуется знание производных (как мы увидим ниже, можно обойтись и без производных, но тогда приходится производить сложные расчеты).

## 2.1. Исследование колебаний математического маятника

В школе обычно изучается две простые колебательные системы: пружинный и математический маятники. Мы начнем с математического маятника, поскольку:

- реализовать эксперименты с математическим маятником проще, чем с пружинным;
- он чаще используется при выполнении лабораторных работ;
- именно с математического маятника Галилей начал свои исследования в механике [30].

На примере математического маятника удобно продемонстрировать, как можно в повседневном увидеть необычное. Можно запустить в классе математический маятник и спросить школьников, что они наблюдают. Обычно этот вопрос вызывает недоумение: маятник просто качается взад – вперед, что тут можно наблюдать и анализировать? Тогда им можно рассказать историю про открытие Галилеем изохронности (от греческих слов «изо» – «постоянство» и «хронос» – «время» [23], то есть явление независимости периода колебания от амплитуды).

В своих трудах Галилей описывает, как в молодости он присутствовал на церковной службе. Он заметил, как в начале службы кто-то задел паникадило – большой подсвечник, висящий на цепи. Галилею захотелось измерить период колебания подсвечника. Не имея других инструментов, он измерил период по собственному пульсу. В конце службы, когда колебания подсвечника стали заметно меньше, Галилей снова измерил период колебаний. Оказалось, что период не изменился. Так Галилей открыл явление изохронности. Многие видели, как качаются маятники, но нужно быть Галилеем, чтобы догадаться изучить зависимость периода колебаний от амплитуды [30].

Если возникнет вопрос столь уж важно явление изохронности, то можно напомнить, что до Галилея не было маятниковых часов. Маятниковые часы сконструировал ученик Галилея – Гюйгенс. Все маятниковые часы, включая Кремлевские куранты и Биг-Бен, а также простые настенные ходики – наследники идей Галилея.

У школьников иногда возникает вопрос: как Галилей догадался, что в Соборе нужно измерить время колебания паникадила? Здесь можно заметить, что, скорее всего, он не ставил определенной цели, а просто привычка все замечать и анализировать –

является важным качеством любого естествоиспытателя [175].

Таким образом, возникли две задачи для исследования колебаний математического маятника: найти зависимость периода колебаний от угла и от длины нити. Можно также предложить школьникам провести исследование зависимости периода колебаний от массы грузика.

### **2.1.1. Планирование экспериментов с математическим маятником**

Внешне постановка эксперимента выглядит несложно: один конец нитки крепится к штативу, к другому привязывается грузик. Маятник готов. В соответствии с определением математического маятника размер грузика должен быть много меньше длины нити. Как мы обсудим ниже, здесь есть «подводные камни», но при планировании эксперимента можно обсудить только длину маятника.

Прежде всего, возникает вопрос, какую брать длину нити? Если ученики учатся только в 7-м классе, то они еще не знают формулы периода математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}, \quad (2.1)$$

где  $L$  – длина нити.

Возможно, что ученики уже имели опыт наблюдения за раскачивающимися на нитке (леске, цепочке и др.) предметами, и знают, что с увеличением длины период растет. Можно проверить хотя бы эту гипотезу, а можно дать им формулу (2.1) для проверки. Ее можно также получить методом размерностей [8, 127, 175].

Метод размерностей предполагает, что нам известно от каких параметров системы зависит искомая величина. В данном случае искомая величина – период измеряется в секундах, а параметры системы: длина нити (измеряется в метрах) и масса грузика (измеряется в килограммах). Если школьники сами не сообразят, то им можно подсказать, что в систему входит еще и Земля, в космосе в условиях невесомости маятник колебаться не будет. Поэтому в формулу для периода может войти ускорение свободного падения  $g$ . Теоретически период может еще зависеть от угла начального отклонения нити, но угол – величина безразмерная. Поэтому для начала можно сослаться на опыт Галилея, показавший независимость периода от угла отклонения.



Существует единственная комбинация параметров, удовлетворяющая методу размерностей:

$$T \sim \sqrt{L/g}.$$

Относительная точность измерений улучшается с увеличением периода. Таким образом, предварительный анализ показывает, что для улучшения относительной точности измерений, нужно брать максимально длинную нить. Учитывая высоту потолка в классе, можно использовать нить длиной порядка 2,5 м. Этому соответствует период колебаний примерно 3 с. Если камера не может делать видеозаписи с таким временем, то нужно подобрать длину нити, чтобы обеспечить значение периода близкое к максимальному времени работы камеры в режиме видеозаписи.

### **2.1.2. Возможные схемы экспериментов с математическим маятником**

1) Самым простым экспериментом является проверка формулы (2.1), т.е. нахождение зависимости периода от длины нити. Для этого даже не нужно использовать камеру, достаточно ручного секундомера, точность которого с учетом человеческой реакции составляет 0,1 – 0,2 с.

Длину нити можно варьировать в широких пределах, например, уменьшить ее длину в 4 раза. Тогда период уменьшится в 2 раза и точности ручного секундомера будет достаточно, чтобы зафиксировать уменьшение периода.

Точность измерения можно существенно повысить, если измерять период не по одному, а, например, по 10 колебаниям. Заметим, что число колебаний для определения периода ограничивается затуханием маятника.

2) Нахождение зависимости угла отклонения от времени.

Теория говорит, что при малых колебаниях угол отклонения нити будет меняться по формуле [228, 229, 252]:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t), \quad (2.2)$$

где  $\alpha_0$  – начальный угол отклонения, а  $\omega_0 = 2\pi/T$  – циклическая частота колебаний. Чтобы убедиться в ее справедливости, нужно сделать видеозапись колебаний (или серийную съемку) и по оцифрованной последовательности кадров определить отклонение грузика в каждый момент времени. Заметим, что если школьники

владеют языками программирования, они могут ускорить процесс обработки, написав программу, распознающую грузик и автоматически определяющую его координаты.

3) Нахождение зависимости периода от массы грузика.

Теоретически период математического маятника не должен зависеть от массы грузика, поэтому представляется, что изучать данную зависимость бессмысленно. Однако существует по крайней мере две причины возникновения такой зависимости.

Во-первых, если масса грузика слишком мала, то большое влияние оказывает сила сопротивления воздуха [4, 211]. Во-вторых, если масса грузика слишком велика, то сказывается растяжение нити под действием центробежной силы [63]. Последнее можно заметить с помощью камеры. Ее нужно крупным планом навести на покоящийся грузик и сфотографировать его положение. Затем сделать снимок при прохождении нижней точки в процессе колебаний.

4) Нахождение зависимости периода от угла начального отклонения (амплитуды колебаний).

По постановке эксперимента эта работа напоминает нахождение зависимости периода от длины нити. Однако в этом эксперименте требуется гораздо большая точность измерения, поскольку период мало меняется с изменением начального угла. Кроме того, в этом эксперименте нельзя измерять период за 10 или более колебаний, поскольку амплитуда колебаний все время уменьшается, что не позволяет сказать, при какой амплитуде измерен период.

Точной формулы зависимости периода от начального угла не существует. Она задается в виде бесконечного ряда [211]:

$$T = T_0 \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \sin^6 \frac{\alpha_0}{2} + \dots \right], \quad (2.3)$$

где  $T_0$  – период, определяемый по формуле (2.1).

Школьникам можно дать эту формулу в приближенном виде [211]:

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \right)$$

или

$$T = T_0 (1 + \alpha_0^2 / 16). \quad (2.4)$$

В таблице 2.1 приведены значения периода колебания математического маятника в зависимости от начального угла [175]:

Таблица 2.1. Зависимость периода математического маятника от угла

Начальный угол (рад)	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0	1,55
$T/T_0$	1	1	1	1,0006	1,0025	1,006	1,016	1,066	1,163

Из таблицы 2.1 видно, что для экспериментального наблюдения отклонения при угле  $30^\circ$  нужно проводить эксперимент с точностью не менее 1%. Даже при угле  $60^\circ$  нужна точность 5%. Однако ввиду быстрого затухания колебаний при больших углах такую точность с ручным секундомером достичь не удастся. Если период составляет 3 с, то точность при угле  $30^\circ$  должна составить 0,03 с, что достижимо при скорости съемки не менее 30 кадров в секунду. При съемке камеру имеет смысл наводить в нижнюю точку траектории, поскольку в крайних точках грузик будет находиться практически неподвижно в течение 2–3 кадров, что вызовет дополнительный вопрос, на каком кадре заканчивается один период. Кроме того, фото грузика в нижнем положении позволит контролировать растяжение нити под действием центробежной силы, о чем говорилось выше [63]. При наличии двух камер, вторую можно навести в точку максимального отклонения, чтобы контролировать изменение амплитуды колебаний.

### 2.1.3. Некоторые дополнительные проблемы при экспериментах с математическим маятником

К сожалению, в учебной литературе не обсуждается проблема, что при больших углах колебаний ( $30^\circ$  и более), груз на нитке начинает крутиться [174, 175]. Это происходит ввиду того, что нитка состоит из скрученных волокон, если их сильно натянуть, то они будут крутиться. Кроме того, достаточно сложно запускать маятник так, чтобы он колебался в одной плоскости. При неаккуратном запуске плоскость колебаний может поворачиваться.

Бороться с этими проблемами можно насадив грузик на ось с подшипником. Технически более простым решением является использование *бифилярного*: подвеса (от латинского «*bi*» – «два», и «*filum*» – «нить»), изображенный на рис. 2.1 [65].

Бифилярный подвес не позволит грузику закручиваться, но все равно следует осторожно приводить маятник в движение, чтобы не

толкнуть его вбок. Если это не получается делать вручную, то можно попробовать отводить грузик в сторону с помощью дополнительной нити. Эту нить можно закрепить в штативе, а затем пережечь. Тогда толчка не будет.

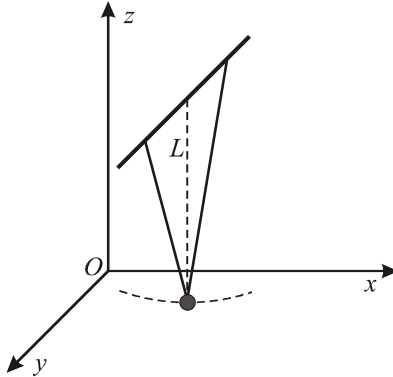


Рис. 2.1  
Бифилярный подвес

Заметим, что для бифилярного подвеса длина маятника не равна длине нитей, а определяется радиусом окружности, по которой движется грузик (радиус окружности обозначен на рис. 2.1 пунктиром) [174, 175].

## 2.2. Исследование колебаний пружинного маятника

Перейдем к исследованию колебаний *пружинного маятника*. В простейшем случае пружинный маятник – это грузик, подвешенный на пружинке, как показано на рис. 2.2.

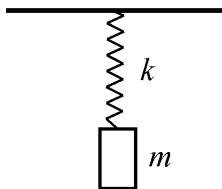


Рис. 2.2.  
Пружинный маятник

В идеальном случае пружина подчиняется *закону Гука*, т.е. сила упругости пропорциональна изменению длины пружины. Кроме того, масса пружинки должна быть много меньше массы груза. Теоретическая формула периода колебаний пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}, \quad (2.5)$$

где  $k$  – жесткость пружины.

С пружинным маятником можно провести следующие исследования (по аналогии с математическим маятником).

- 1) Проверка формулы (2.5) – нахождение зависимости периода от жесткости пружины и массы груза.
- 2) Нахождение зависимости координаты груза от времени.
- 3) Нахождение зависимости периода колебаний от амплитуды.

Хотя по формуле (2.5) период не должен зависеть от амплитуды, это верно, только если деформации пружинки строго подчиняются закону Гука. В ряде случаев, например, для пружинного эспандера это хорошо выполняется. Если же взять эспандер с резинками, то закон Гука выполняется только при очень малых растяжениях.

При проведении экспериментов школьники столкнутся с проблемой, что как ни стараться отпускать грузик вертикально, маятник вскоре начнет раскачиваться из стороны в сторону. Поэтому период придется измерять по 3–5 колебаниям. Если брать пружину с маленькой жесткостью, то грузик будет совершать еще и вращательные движения вокруг вертикальной оси.

Для преодоления этих проблем можно сделать горизонтальный пружинный маятник, как показано на рис. 2.3.

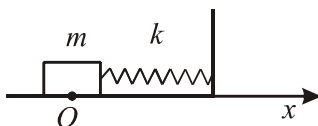


Рис. 2.3  
Горизонтальный пружинный маятник

Но в этом случае будет мешать сила трения, поэтому такой маятник можно сделать, используя тележку или школьную магнитную подвесную дорожку.

## 2.3. Исследование некоторых сложных колебательных систем

### 2.3.1. Сложный пружинный маятник

Тот факт, что вертикальный пружинный маятник раскачивается из стороны в сторону, можно использовать для проведения исследовательской работы – подвесить грузик на пружинке и дать ему возможность колебаться вверх – вниз и из стороны в сторону. Заметим, что движение такого маятника не будет периодическим. Аналитического выражения для расчета движения такого маятника не существует, но его можно получить путем численного моделирования [70, 157, 175, 204].

Найдем зависимости ускорения грузика от его координат [175, 177, 196].

Пусть у нас есть пружинный маятник. Длина маятника в нерастянутом состоянии  $l_0$ , жесткость пружины  $k$ , масса грузика  $m$ . Начало координат поместим в точку подвеса (рис. 2.4).

На грузик действует сила тяжести и сила упругости со стороны пружины:

$$T = k(l - l_0).$$

Длину пружины  $l$  найдем по формуле:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где  $x$  и  $y$  – координаты грузика.

Запишем II закон Ньютона в проекции на оси координат:

$$ma_x = -k(l - l_0) \frac{x}{l},$$

$$ma_y = -mg - k(l - l_0) \frac{y}{l}$$

Здесь следует обратить внимание учеников на знаки. Знак «-» в проекции на ось  $x$  означает, что при растягивании пружины вправо, сила будет действовать в обратном направлении. Знак «-» перед « $mg$ » означает, что ось  $y$  направлена вверх. Кажется, что перед слагаемым « $k(l - l_0)y/l$ » должен стоять знак «+», ведь при растягивании пружины сила направлена вверх. Но там и будет знак «+», поскольку координата  $y$  грузика меньше нуля, так что «минус» на «минус» даст «плюс».

Уравнения для проекций ускорений примут вид [175, 177]:

$$a_x = -\frac{k}{m}(l-l_0)(x/l),$$

$$a_y = -g - \frac{k}{m}(l-l_0)(y/l) \quad (2.6)$$

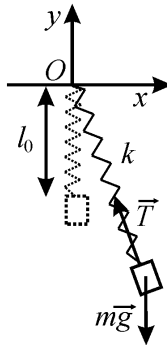


Рис. 2.4

К расчету колебаний сложного пружинного маятника

Наблюдение колебаний такого маятника показывает, что оно не периодически. На рис. 2.5 приведен вид возможной траектории движения (при малом затухании) «сложного» пружинного маятника при следующих условиях запуска: масса грузика  $m = 2$  кг, длина нерастянутой пружины – 0,3 м, жесткость  $k = 100$  (Н/м) (при подвешивании 2 кг грузика, пружина растянется еще на 0,2 м). Для запуска грузик отклонили на 0,05 м вниз и 0,05 м вправо [175, 177].

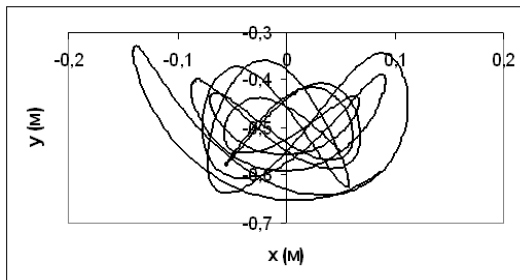


Рис. 2.5. Траектория «сложного» пружинного маятника

Заметим, что когда значение  $k/m$  кратно значению  $l/g$ , получаются очень красивые колебания (маятник Горелика) [65].

### 2.3.2. Двойной математический маятник

Двойной математический маятник несложно собрать, но его движение сложно рассчитать. Собирается он подвешиванием к математическому маятнику еще одного грузика (рис. 2.6).

Найдем ускорения, действующие на грузики [175, 183]. Обозначим углы отклонений нитей  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, массы грузиков –  $m_1$  и  $m_2$ , длины нитей –  $L_1$  и  $L_2$ . Запишем II закон Ньютона для каждого грузика в проекции на оси:

$$\begin{aligned} m_1 a_{1x} &= -T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta, \\ m_1 a_{1y} &= T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta - m_1 g, \\ m_2 a_{2x} &= -T_2 \sin \beta, \\ m_2 a_{2y} &= T_2 \cos \beta - m_2 g. \end{aligned} \quad (2.7)$$

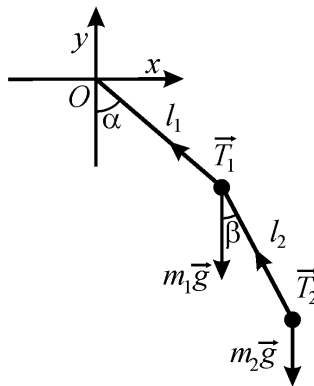


Рис. 2.6  
Двойной маятник

Запишем уравнения кинематической связи (рис. 2.7):



$$\begin{aligned}
 x_1 &= L_1 \sin \alpha, \\
 y_1 &= -L_1 \cos \alpha, \\
 x_2 &= x_1 + L_2 \sin \beta, \\
 y_2 &= y_1 - L_2 \cos \beta.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

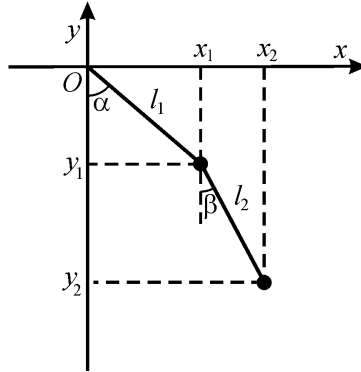


Рис. 2.7.  
Координаты грузиков двойного маятника

Если школьники знают производные, то можно, дважды продифференцировав систему уравнений (2.8), получить соотношения между угловыми ускорениями грузов. Но поскольку школьники 7–9 классов, скорее всего, еще не умеют дифференцировать, то можно воспользоваться следующими рассуждениями [175, 183].

Ускорение верхнего грузика состоит из двух составляющих – центростремительной (нормальной)  $a_n$  и тангенциальной  $a_t$ . Первая составляющая показывает, как изменяется направление скорости, вторая показывает, как изменяется модуль скорости. Обозначим угловую скорость вращения первого грузика  $\omega_1$ , тогда центростремительное ускорение равно:  $a_{1n} = \omega_1^2 L_1$ . Теперь можно записать проекции ускорения верхнего грузика на оси (рис. 2.8) [175, 183]:

$$\begin{aligned}
 a_{1x} &= a_{1t} \cos \alpha - L_1 \omega_1^2 \sin \alpha, \\
 a_{1y} &= a_{1t} \sin \alpha + L_1 \omega_1^2 \cos \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Движение нижнего грузика можно рассматривать как вращение вокруг верхнего. Тогда его ускорение будет складываться из ускорения верхнего грузика, и суммы центростремительного и тангенциального ускорений кругового движения вокруг верхнего грузика (рис. 2.8).

$$\begin{aligned} a_{2x} &= a_{1x} + a_{2t} \cos \beta - L_2 \omega_2^2 \sin \beta \\ a_{2y} &= a_{1y} + a_{2t} \sin \beta + L_2 \omega_2^2 \cos \beta \end{aligned} \quad (2.10)$$

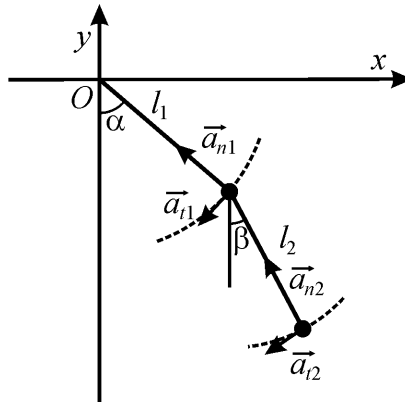


Рис. 2.8  
Ускорения грузиков двойного маятника

Учитывая, что тангенциальное ускорение показывает изменение модуля скорости, получим [76, 77, 228, 252]:

$$a_t = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{R \Delta \omega}{\Delta t}. \quad (2.11)$$

Поскольку школьники могут не знать, что такое *угловое ускорение*, нужно дать определение углового ускорения как изменение угловой скорости:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}.$$

Из (2.11) получим [228, 252]:

$$a_t = \varepsilon R \quad (2.12)$$

Теперь запишем систему (2.9) – (2.10) с учетом (2.12):

$$\begin{aligned}
a_{1x} &= L_1 \varepsilon_1 \cos \alpha - L_1 \omega_1^2 \sin \alpha \\
a_{1y} &= L_1 \varepsilon_1 \sin \alpha + L_1 \omega_1^2 \cos \alpha \\
a_{2x} &= L_1 \varepsilon_1 \cos \alpha - L_1 \omega_1^2 \sin \alpha + L_2 \varepsilon_2 \cos \beta - L_2 \omega_2^2 \sin \beta \\
a_{2y} &= L_1 \varepsilon_1 \sin \alpha + L_1 \omega_1^2 \cos \alpha + L_2 \varepsilon_2 \sin \beta + L_2 \omega_2^2 \cos \beta
\end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставляем уравнения кинематической связи (2.13) во II закон Ньютона (2.7) [175, 183]:

$$m_1 L_1 \varepsilon_1 \cos \alpha - m_1 L_1 \omega_1^2 \sin \alpha = -T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta \quad (2.14)$$

$$m_1 L_1 \varepsilon_1 \sin \alpha + m_1 L_1 \omega_1^2 \cos \alpha = T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta - m_1 g \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
m_2 L_1 \varepsilon_1 \cos \alpha - m_2 L_1 \omega_1^2 \sin \alpha + m_2 L_2 \varepsilon_2 \cos \beta - m_2 L_2 \omega_2^2 \sin \beta &= \\
= -T_2 \sin \beta & \quad (2.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 L_1 \varepsilon_1 \sin \alpha + m_2 L_1 \omega_1^2 \cos \alpha + m_2 L_2 \varepsilon_2 \sin \beta + m_2 L_2 \omega_2^2 \cos \beta &= \\
= T_2 \cos \beta - m_2 g & \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Получилось 4 уравнения с 4 неизвестными. Осталось выразить угловые скорости и натяжения нитей через углы и угловые скорости.

Сначала исключим  $T_1$ . Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad (2.18)$$

Умножим (2.14) на  $\cos \alpha$ , (2.15) на  $\sin \alpha$  и сложим их:

$$m_1 L_1 \varepsilon_1 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = T_2 \sin \beta \cos \alpha - T_2 \cos \beta \sin \alpha - m_1 g \sin \alpha.$$

Отсюда:

$$m_1 L_1 \varepsilon_1 = T_2 \sin \beta \cos \alpha - T_2 \cos \beta \sin \alpha - m_1 g \sin \alpha.$$

Применяя тригонометрические формулы для синуса и косинуса разности углов:

$$\begin{aligned}
\sin(\beta - \alpha) &= \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\
\cos(\beta - \alpha) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,
\end{aligned} \quad (2.19)$$

получим [175, 183]:

$$m_1 L_1 \varepsilon_1 = T_2 \sin(\beta - \alpha) - m_1 g \sin \alpha.$$

А отсюда выразим  $\varepsilon_1$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{T_2 \sin(\beta - \alpha) - m_1 g \sin \alpha}{m_1 L_1}. \quad (2.20)$$

Из (2.16) – (2.17) исключим  $\varepsilon_2$ , умножив (2.16) на  $\sin \beta$ , (2.17) на  $\cos \beta$  и вычтя их друг из друга:

$$m_2 L_1 \varepsilon_1 (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) + m_2 L_1 \omega_1^2 (-\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) - m_2 L_2 \omega_2^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = -T_2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + m_2 g \cos \beta \quad (2.21)$$

Выражение (2.21) можно упростить с помощью формул (2.19):

$$m_2 L_1 \varepsilon_1 \sin(\beta - \alpha) - m_2 L_1 \omega_1^2 \cos(\alpha - \beta) - m_2 L_2 \omega_2^2 = -T_2 + m_2 g \cos \beta. \quad (2.22)$$

Подставим  $\varepsilon_1$  из (2.20) в (2.22):

$$\frac{T_2 \sin(\beta - \alpha) - m_1 g \sin \alpha}{m_1} m_2 \sin(\beta - \alpha) - m_2 L_1 \omega_1^2 \cos(\alpha - \beta) - m_2 L_2 \omega_2^2 = -T_2 + m_2 g \cos \beta$$

Отсюда мы получим уравнение для  $T_2$  [175, 183]:

$$T_2 \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\beta - \alpha) \right] = m_2 g \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + m_2 L_1 \omega_1^2 \cos(\alpha - \beta) + m_2 L_2 \omega_2^2 + m_2 g \cos \beta \quad (2.23)$$

Это выражение можно упростить. Сгруппируем члены при  $m_2 g$  и преобразуем тригонометрические формулы:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + \cos \beta &= \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \cos \beta + \cos \beta = \\ &= \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta (1 - \sin^2 \alpha) = \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \cos^2 \alpha = \\ &= \cos \alpha (\sin \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos \alpha) = \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Тогда (2.23) запишется в виде:

$$T_2 \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\beta - \alpha) \right] = m_2 g \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) + m_2 L_1 \omega_1^2 \cos(\alpha - \beta) + m_2 L_2 \omega_2^2$$

Отсюда получаем  $T_2$  [175, 183]:

$$T_2 = m_1 m_2 \frac{g \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) + L_1 \omega_1^2 \cos(\beta - \alpha) + L_2 \omega_2^2}{m_1 + m_2 \sin^2(\beta - \alpha)}. \quad (2.24)$$

Теперь  $\varepsilon_1$  мы можем вычислить из (2.20). Чтобы получить  $\varepsilon_2$  преобразуем (2.16) и (2.17): умножим (2.16) на  $\cos \beta$ , (2.17) на  $\sin \beta$ , и затем их сложим.

$$m_2 L_1 \varepsilon_1 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + m_2 L_1 \omega_1^2 (-\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + m_2 L_2 \varepsilon_2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = -m_2 g \sin \beta$$

Преобразуем это равенство, используя тригонометрические формулы (2.18) и (2.19):

$$m_2 L_1 \varepsilon_1 \cos(\alpha - \beta) - m_2 L_1 \omega_1^2 \sin(\alpha - \beta) + m_2 L_2 \varepsilon_2 = -m_2 g \sin \beta.$$

А отсюда получаем окончательное выражение для  $\varepsilon_2$  [175, 183]:

$$\varepsilon_2 = \frac{L_1 \omega_1^2 \sin(\alpha - \beta) - L_1 \varepsilon_1 \cos(\beta - \alpha) - g \sin \beta}{L_2}. \quad (2.25)$$

Следует признаться, что формулы для ускорений (2.20), (2.24), (2.25) получились очень сложными для такой простой с виду задачи. Движение двойного маятника в общем случае аperiodическое и для расчета его движения требуются численные методы [175, 183]. Но можно экспериментально с помощью фотокамеры зафиксировать траекторию движения грузиков. Для эксперимента лучше подвесить грузики в бифилярные подвесы.

В качестве экспериментальной исследовательской работы школьникам можно предложить найти начальные условия запуска грузиков, при которых они будут колебаться почти периодически.

### 2.3.3. Маятник Гюйгенса

Если ограничить колебания маятника двумя полуцилиндрами (например, из картона), то получится маятник, который при определенном соотношении длины нити и радиусов полуцилиндров будет проявлять свойства изохронности даже при больших углах отклонения (рис. 2.9) [175, 196].

В качестве исследовательской работы школьникам можно предложить найти необходимое соотношение между длиной нити и радиусами полуцилиндров, и проверить, будут ли колебания гармоническими и изохронными.

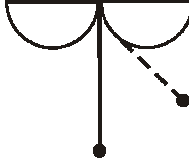


Рис. 2.9. Маятник Гюйгенса

### 2.3.4. Пружинный маятник на рельсе

При наличии тележки с малым трением в осях или школьной демонстрационной доски на магнитной подушке можно сделать маятник как показано на рис. 2.10 [175, 196].

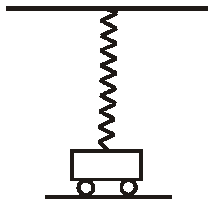


Рис. 2.10. Пружинный маятник на рельсе

В качестве исследовательской работы школьникам можно предложить найти период колебаний в зависимости от расстояния от точки крепления пружины до рельса и проверить будут ли эти колебания гармоническими при малых амплитудах. Наиболее интересен случай, когда расстояние от точки крепления пружины до рельса примерно равно собственной длине пружины в нерастянутом состоянии. В этом случае колебания маятника не будут гармоническими даже при малых амплитудах [175, 196, 207].

### 2.3.5. Маятник Капицы

Большие возможности для проведения исследовательских работ представляет маятник с подвижным подвесом, предложенный Капицей [71, 196]. Маятник можно сделать, разместив грузик на жестком стержне, который может вращаться на оси, прикрепленной к

перевернутому звуковому динамику как показано на рис. 2.11. При работе динамика ось маятника будет совершать вертикальные колебания, заставляя грузик двигаться. Меняя мощность и частоту динамика, можно получить устойчивые колебания маятника, в том числе почти в вертикальном положении как показано на рис. 2.11.

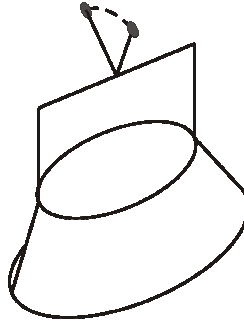


Рис. 2.11. Маятник Капицы

Теория колебаний маятника Капица весьма сложна, но его можно рассчитать, используя численные методы, как описано в [196]. Экспериментально можно исследовать различные моды устойчивых колебаний маятника.

## 2.4. Исследование связанных колебательных систем

### 2.4.1. Два связанных математических маятника

Среди колебательных систем можно выделить особую группу – *связанные маятники* (рис. 2.12) [4, 211]. Массы нитей и пружинки будем считать пренебрежимо малыми. Чуть ниже мы рассмотрим вопрос, как сделать такую конструкцию. Когда грузики находятся в нижних положениях, пружинки не растянуты. Такая, несложная на первый взгляд, система позволяет продемонстрировать много интересных эффектов.

Начать можно с того, что спросить учеников: что произойдет, если качнуть левый маятник, не трогая правый?

Может показаться, что левый груз начнет раскачивать правый, и через какое-то время они будут колебаться с одинаковой амплитудой, при этом из-за трения колебания будут постепенно затухать. Однако эксперимент покажет, что маятники будут

поочередно отдавать друг другу энергию, как будет указано ниже [4, 65, 175, 177, 196, 211 ].

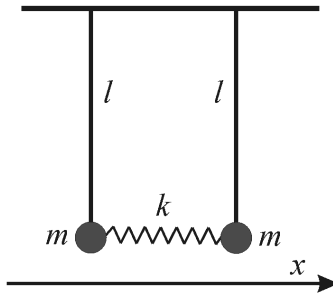


Рис. 2.12. Связанные маятники

Рассчитаем ускорения грузиков, пренебрегая силой трения, считая углы колебания малыми, а пружины невесомыми и подчиняющимися закону Гука. Пусть грузик левого маятника отклонился на величину  $x_1$ , а правого – на  $x_2$  (рис. 2.13). Тогда на левый грузик действует сила со стороны правого грузика:

$$F_{1x} = -k(x_1 - x_2).$$

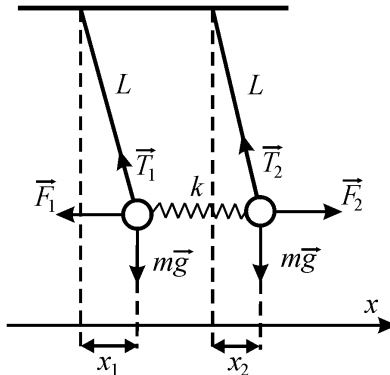


Рис. 2.13. К расчету колебаний двух связанных маятников

В соответствии с III законом Ньютона сила упругости будет действовать на правый груз в противоположном направлении:



$$F_{2x} = k(x_1 - x_2) = -k(x_2 - x_1).$$

Учтем силу тяжести. Горизонтальные проекции сил, действующих на грузы, в приближении малых углов равны:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -k(x_1 - x_2) - m_1 g x_1 / L; \\ F_{2x} &= -k(x_2 - x_1) - m_2 g x_2 / L. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ускорения грузов:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= -\frac{k}{m_1}(x_1 - x_2) - \frac{g}{L}x_1; \\ a_{2x} &= -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) - \frac{g}{L}x_2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Рассматривая для простоты случай равных значения масс:  $m_1 = m_2 = m$ , получим:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{g}{L}x_1; \\ a_{2x} &= -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{g}{L}x_2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Аналитическое решение полученной системы уравнений (2.28) достаточно сложное, но рассчитать движение маятников без высшей математики можно численно как описано в [175].

Для экспериментального исследования системы связанных маятников очень сложно обеспечить малое провисание пружинки. Поэтому проще обойтись совсем без пружинки, собрав два маятника на бифилярных подвесах как показано на рис. 2.14. Небольшой грузик на нити обеспечивает связь маятников. Масса соединительного груза должна быть много меньше масс самих маятников.

Покажем, что при малых смещениях возвращающая сила будет пропорциональна разнице смещений грузиков (чтобы можно было использовать систему уравнений (2.28)).

Найдем натяжение нити (рис. 2.15). Следует обратить внимание школьников, что чертёж сделан с упрощением. На нем левый грузик висит на вертикальной нити. Но вторая нить тянет его направо, следовательно грузик не может висеть строго вертикально. Однако, поскольку масса грузика  $m$  много больше массы грузика  $m_0$ , это отклонение будет незначительным, и мы для простоты расчетов будем считать нить практически вертикальной [175, 177].

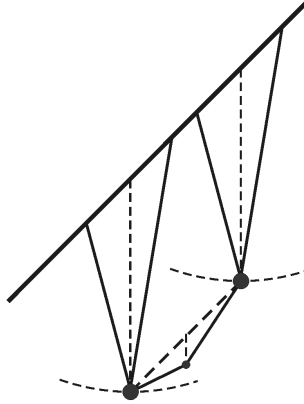


Рис. 2.14. Маятники, связанные с помощью грузика

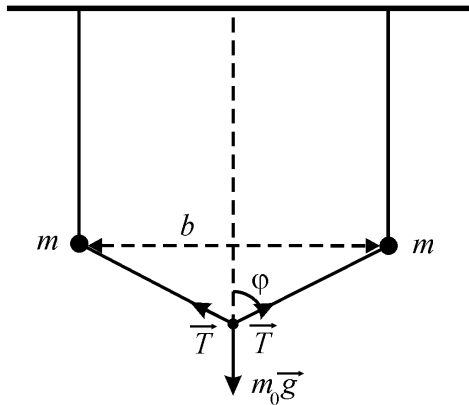


Рис. 2.15. К расчету натяжения нити

Найдем силы, действующие на грузик  $m_0$ . На него действует сила тяжести и две силы натяжения нити. Силы натяжения компенсируют друг друга в горизонтальном направлении, а в вертикальном направлении силы натяжения равны силе тяжести:

$$m_0 g = 2T \cos \varphi.$$

Отсюда 
$$T = \frac{m_0 g}{2 \cos \varphi}. \quad (2.29)$$

Если качнуть маятник, то угол  $\varphi$  изменится, но очень незначительно. Поскольку школьники еще не привыкли пренебрегать малыми поправками, то на этом моменте можно остановиться подробнее.

Для наглядности предположим, что у нас висят два грузика на расстоянии  $b = 20$  см (рис. 2.16). Отклоним первый грузик на расстояние  $x_1 = 1$  см, а второй – на  $x_2 = 2$  см. Найдем расстояние  $b_1$  между ними.

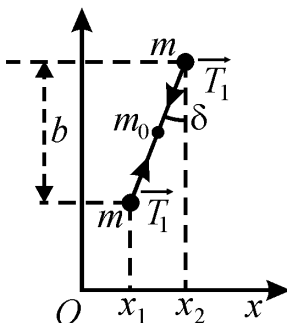


Рис. 2.16  
К расчету натяжения нити

Применяя теорему Пифагора, получим:

$$b_1 = \sqrt{b^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{20^2 + 1^2} = \sqrt{401} = 20,025 \text{ (см)}.$$

Таким образом, удлинение составит менее 0,3 мм, т.е. действительно малую величину.

Школьники обычно не сильны в стереометрии, поэтому проецируем силу натяжения сначала на горизонтальную плоскость (рис. 2.16) [175, 177]. Проекция равна:  $T_1 = T \sin \varphi$ .

Поскольку угол  $\varphi$  практически не меняется, то не меняется и проекция силы натяжения на горизонтальную плоскость. Теперь найдем проекцию силы натяжения на ось x. Она равна:

$$T_x = T_1 \sin \delta = T \sin \varphi \cdot \sin \delta. \quad (2.30)$$

Учитывая, что угол  $\delta$  мал, формула (2.30) запишется в виде:

$$T_x = T \sin \varphi \cdot \sin \delta = T \sin \varphi \frac{x}{b}.$$

А с учетом (2.29):

$$T_x = \frac{m_0 g x \sin \varphi}{2b \cos \varphi} = \frac{m_0 g \operatorname{tg} \varphi}{2b} x. \quad (2.31)$$

Таким образом, мы получили, что возвращающая сила пропорциональна  $x$ . То есть, такая висючая конструкция равносильна пружине с коэффициентом жесткости [175, 177]:

$$k = \frac{m_0 g \operatorname{tg} \varphi}{2b}. \quad (2.32)$$

Практические рекомендации по выбору угла  $\varphi$ . Если его брать близким к  $90^\circ$ , то нить может натянуться слишком сильно, и в этом случае не будет выполняться условие, что угол  $\varphi$  меняется мало.

Если взять слишком малый угол, то маленький груз на длинной нити может сам начать колебаться как математический маятник, что приведет к изменению натяжения нити. Поэтому оптимально брать угол  $\varphi$  примерно  $60^\circ$ .

В качестве грузиков для основных маятников удобно брать свинцовые рыболовные грузила массой 50–100 г, в качестве маленького грузика – канцелярскую скрепку. При указанных массах поведение реальной системы соответствует компьютерному моделированию с использованием формул (2.28) [175, 196].

## 2.4.2. Нахождение собственных мод колебаний

Вид движения системы связанных маятников сильно зависит от начальных условий.

Если качнуть только один маятник (например, левый), то между маятниками будет происходить обмен энергией. Вначале левый маятник полностью отдает свою энергию правому и останавливается. При этом правый маятник раскачивается до максимальной амплитуды. Затем правый маятник начинает раскачивать левый, и отдает ему свою энергию, а сам останавливается. И так они поочередно передают друг другу свою энергию. Теоретически они будут делать это периодически бесконечно долго. Колебания реальных маятников будут постепенно затухать [65, 175, 177, 196].

На рис. 2.17 представлены графики зависимостей координат:

$x_1$  и  $x_2$  от времени при следующих параметрах системы:  $g/L = 10$  ( $\text{с}^{-2}$ ); отношение жесткости пружины к массе грузика  $k/m = 1$  ( $\text{с}^{-2}$ ).

При желании можно сказать ученикам, что такой вид колебаний называется биениями [4, 211].

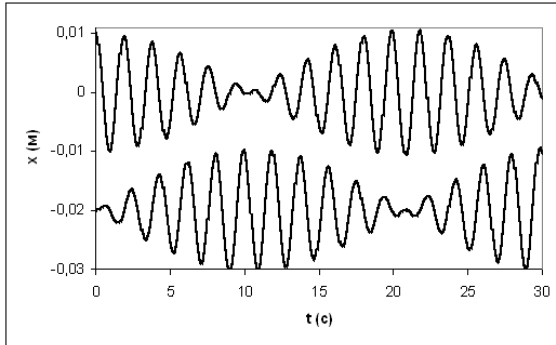


Рис. 2.17  
Колебания связанных маятников

Существует возможность запустить маятники так, чтобы они колебались синхронно (*синфазно, в фазе*). Для этого нужно вначале отклонить оба грузика на одну величину. Зависимости координат грузиков от времени представлены на рис. 2.18 (при тех же параметрах системы).

Для синфазных колебаний несложно рассчитать период. Когда маятники двигаются в фазе, то пружина остается все время не натянутой. Следовательно, они просто качаются как две ничем не связанных маятника с периодом  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ .

Заметим, что виды колебаний, при которых маятники движутся с одинаковой частотой, называется *собственными модами* колебаний, а соответствующие частоты – *собственными частотами* [4, 211].

Для системы из двух связанных маятников существует еще одна собственная мода – *в противофазе*. Для этого нужно грузики отклонить в разные стороны на одинаковое расстояния (рис. 2.19). Тогда в силу симметрии их движение будет одинаковым как в зеркале, средняя точка пружины будет неподвижной, как будто в нее вбили гвоздик. Зависимости координат грузиков от времени представлены на рис. 2.19 (при тех же параметрах системы).

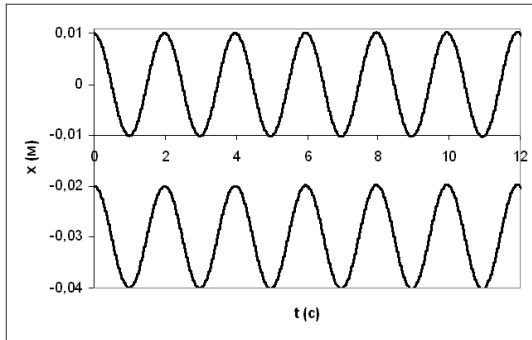
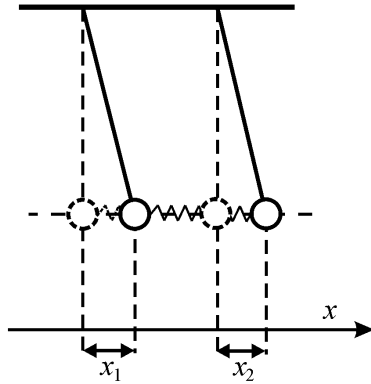


Рис. 2.18  
Синфазные колебания связанных маятников

При движении в противофазе период колебаний уменьшается. Это несложно обосновать. Найдем силу, действующую на отклонившийся от равновесия грузик. По формуле (2.26) она равна:

$$F_{1x} = -k(x_1 - x_2) - m_1 g x_1 / L .$$

При колебаниях в противофазе в любой момент времени:

$$x_1 = -x_2 ,$$

следовательно, формула (2.26) запишется в виде:

$$F_{1x} = -2kx_1 - m_1 g x_1 / L .$$

Ускорение грузика равно:

$$a_{1x} = \frac{F_{1x}}{m} = -\frac{2k}{m}x_1 - \frac{g}{L}x_1.$$

Отсюда получаем значение периода [175, 196]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{2k}{m} + \frac{g}{L}}}. \quad (2.33)$$

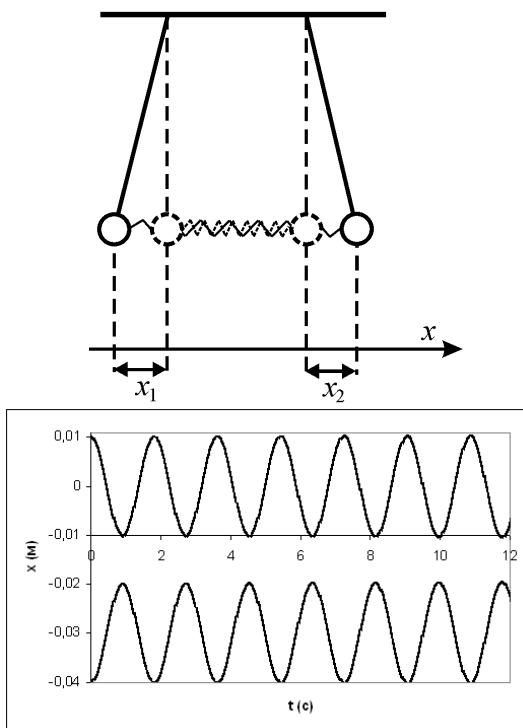


Рис. 2.19. Колебания связанных маятников в противофазе

В качестве исследовательской работы можно предложить школьникам воспроизвести и зафиксировать на камеру биения, собственные моды и поискать другие интересные моды колебаний. Кроме того, можно предложить исследовать колебания с грузиками разных масс [175, 196].

### 2.4.3. Три связанных математических маятника

Рассмотрим систему из трех математических маятников, связанных пружинками или нитями с маленькими грузиками, причем все три маятника висят на одной прямой (рис. 2.20).

С такой системой можно провести исследования, аналогичные тем, которые были описаны для системы из двух связанных маятников:

- исследование биений, т.е. движения грузиков, когда вначале в движение приведен только один грузик;
- нахождение собственных мод, собственных частот и сравнение экспериментальных результатов с теоретическими;
- поиск других интересных мод колебаний и исследование колебаний с грузиками разных масс [175, 196].

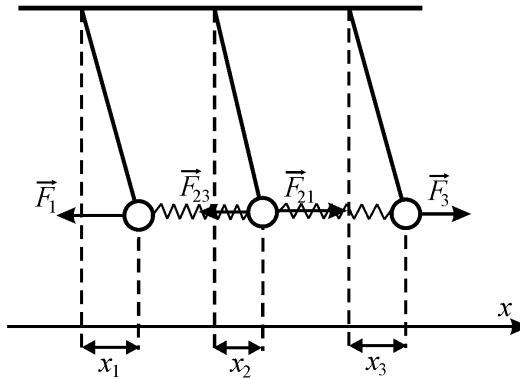


Рис. 2.20  
Три связанных маятника

Рассмотрим сначала движение маятников когда вначале отклоняют один левый грузик. Картина перераспределения энергии будет более сложной, чем в случае двух маятников. Зависимости координат грузиков от времени представлены на рис. 2.21 (длины маятников и массы грузиков такие же, как в случае двух маятников) [175, 196].

Найдем собственные моды колебания и их частоты. Силы, действующие на крайние грузики можно записать по аналогии с формулами (2.26):



$$F_{1x} = -k(x_1 - x_2) - mgx_1 / L.$$

$$F_{3x} = -k(x_3 - x_2) - mgx_3 / L.$$

А сила, действующая на средний грузик, равна:

$$F_{2x} = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) - mgx_2 / L.$$

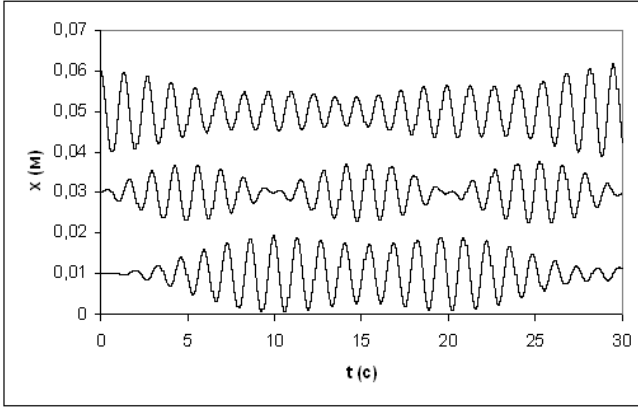


Рис. 2.21

Колебания связанных маятников:

вверху колебания первого грузика, в центре - второго, снизу - третьего

Соответственно, из II закона Ньютона найдем ускорения грузов:

$$a_{1x} = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{g}{L}x_1;$$

$$a_{2x} = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) - \frac{g}{L}x_2; \quad (2.34)$$

$$a_{3x} = -\frac{k}{m}(x_3 - x_2) - \frac{g}{L}x_3.$$

С помощью этих уравнений можно рассчитать движение грузиков при любых начальных условиях методом численного моделирования, как описано в [175, 196].

Найдем собственные частоты колебаний. Две собственные моды найти несложно. Первая – когда все три маятника вначале отклонены в одну сторону на одинаковую величину – тогда они качаются синфазно с периодом  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ . Вторая – когда два

крайних маятника качаются в противофазе, а средний покоится (рис. 2.22). В этом случае в соответствии с формулой (2.34) ускорение крайнего маятника равно:

$$a_{1x} = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{g}{L}x_1.$$

При колебаниях в противофазе  $x_2 = 0$ . Следовательно, ускорение крайнего левого (и правого) маятника равно:

$$a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{g}{L}x.$$

Отсюда мы получаем выражение для периода колебаний маятников в противофазе [175, 177, 196]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}}. \quad (2.35)$$

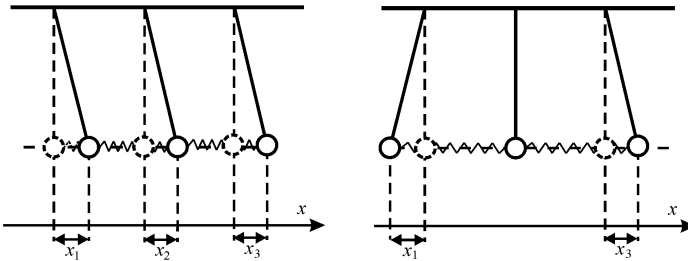


Рис. 2.22

Колебания трех связанных маятников в фазе (слева) и в противофазе (справа)

Третий случай найти сложнее. Обычно школьники сами не могут до него догадаться. Нужно отклонить два крайних грузика на одинаковые углы  $\alpha$ , а средний грузик – в обратную сторону на угол  $2\alpha$  (см. рис. 2.23) [4, 175, 196, 211].

Найдем период таких колебаний. По формуле (2.34) левый маятник движется с ускорением:

$$a_{1x} = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{g}{L}x_1.$$

В начальный момент времени:

$$x_2 = -2x_1 \text{ и } x_3 = x_1. \quad (2.36)$$

Поскольку маятники качаются с одинаковыми периодами, то эти

соотношения будут выполняться все время. Следовательно:

$$a_{1x} = -\frac{k}{m} 3x_1 - \frac{g}{L} x_1.$$

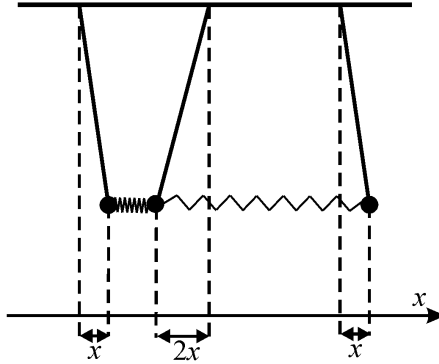


Рис. 2.23  
Колебания связанных маятников

Ускорение среднего грузика равно:

$$a_{2x} = -\frac{k}{m} (x_2 - x_1) - \frac{k}{m} (x_2 - x_3) - \frac{g}{L} x_2$$

Подставляя соотношения (2.36), имеем:

$$a_{2x} = -\frac{k}{m} (x_2 + \frac{x_2}{2}) - \frac{k}{m} (x_2 + \frac{x_2}{2}) - \frac{g}{L} x_2 = -\frac{k}{m} 3x_2 - \frac{g}{L} x_2.$$

Получается, что ускорение среднего грузика все время в два раза больше ускорения крайних грузиков, что можно было ожидать, учитывая, что центральный грузик движется все время вдвое быстрее крайних и проходит вдвое больший путь. Периоды у всех трех грузиков получаются одинаковыми и равными [175, 196]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{3k}{m} + \frac{g}{L}}} \quad (2.37)$$

После исследования собственных мод колебаний школьникам можно предложить зафиксировать другие интересные моды колебаний. Кроме того, можно предложить исследовать колебания с грузиками разных масс и с пружинками, имеющими разные коэффициенты упругости.

## **2.4.4. Система из большого числа связанных математических маятников**

Аналогично можно рассмотреть систему из четырех и более связанных маятников. У них тоже будет несколько собственных мод колебаний [4, 175, 196, 211]. Число маятников в системе определяется только терпением школьников.

Кроме нахождения собственных мод колебаний, с помощью такой системы можно моделировать *распространение упругой волны* [4, 175, 196, 211]. Например, можно сделать левый маятник большой массы и запустить его. Колебание первого маятника вызывает колебание второго, колебание второго приводит к колебанию третьего... и т.д. Меняя жесткость пружины и массу грузиков, можно исследовать зависимость скорости распространения волны от плотности среды и ее упругих свойств (модуля Юнга). Можно также исследовать отражение волн от более плотной или менее плотной среды, а также сложение прямой и обратной волны, можно поставить и другие задачи [175, 196,].

## **2.5. Исследование физических маятников и крутильных колебаний**

### **2.5.1. Общие подходы к изучению динамики вращательного движения**

Перейдем к исследовательским работам, связанным с динамикой вращательного движения.

Хотя динамика вращательного движения обычно в школе не изучается, школьника окружает огромное количество объектов для описания которого необходимо знаний законов динамики вращательного движения. Кроме того, существует целый ряд олимпиадных задач, где в неявном виде используются приведенные ниже формулы [28]. Поэтому при наличии времени и желания школьников можно дать представленный ниже материал, который, как показывает опыт, успешно усваивается школьниками 9-го класса.

Динамику вращательного движения можно изучать по следующему плану [186]:

1) Введение понятия *момента силы*. В физике момент силы – величина векторная и вводится на основе векторного произведения [4, 211]. Однако, если ограничиться только движением в одной плоскости

вводить ее как вектор оказывается нецелесообразным. Возможно ввести момент силы либо как положительную величину. Тогда момент силы относительно оси – это произведение силы на *плечо*:

$$M = Fh,$$

где плечо – это на кратчайшее расстояние от линии, вдоль которой действует сила, до оси относительно которой считается момент силы (рис. 2.24).

Однако в этом случае неясно как складывать моменты сил, стремящихся поворачивать тело в разные стороны. Поэтому более предпочтительно вводить как величину *со знаком*, например, положительную, если сила стремится повернуть тело по часовой стрелке, и отрицательную – в противоположном случае.

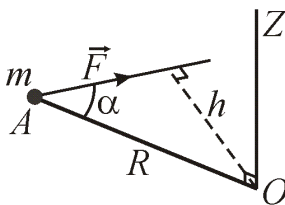


Рис. 2.24  
Пояснение термина «плечо»

2) Определение углового ускорения, как изменения угловой скорости.

$$\varepsilon = \Delta \omega / \Delta t .$$

3) Вывод соотношения между угловым и линейным ускорением по аналогии с соотношением между угловой и линейной скоростями [4, 211]:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{R \Delta t} = \frac{a}{R} .$$

4) Изучение основного закона динамики вращательного движения.

Он получается из II закона Ньютона [186]. Рассмотрим силу, действующую на материальную точку, закрепленную на жестком невесомом стержне (рис. 2.25). Используя понятие углового ускорения, плеча и момента силы можно записать II закон Ньютона в виде:

$$m\epsilon R = ma = F \sin \alpha = \frac{Fh}{R} = \frac{M}{R}.$$

Или: 
$$M = m\epsilon R^2. \quad (2.38)$$

4) Распространение основного закона динамики вращательного движения для твердого тела с использованием понятия момента инерции [4, 186, 211]

Обратим внимание школьников, что в формуле (2.38) *не участвует точка приложения силы  $F$* . Поэтому эту форму записи II закона Ньютона можно обобщить для произвольного тела, вращающегося вокруг оси.

Разобьем тело на большое число  $N$  маленьких объемов с равными массами  $m_i$  как показано на рисунке (рис. 2.25). Поскольку тело твердое, то угловые скорости и угловые ускорения всех малых объемов будут одинаковы. Будем считать, что действующий на тело момент  $M$  складывается из малых моментов сил  $M_i$ , приложенных к каждому из этих объемов. Тогда II закон Ньютона для каждого объема запишется в виде:

$$M_i = m_i\epsilon R_i^2,$$

где  $R_i$  – расстояние от малого объема до оси вращения тела.

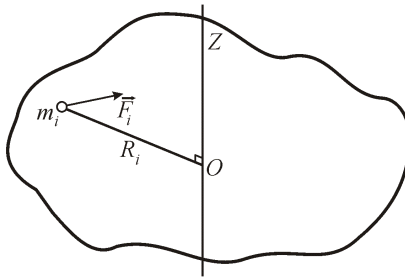


Рис. 2.25

К выводу основного уравнения вращательного движения

Просуммировав по всем объемам, мы получим *основное уравнения динамики вращательного движения* – II закон Ньютона для произвольного тела, вращающегося вокруг оси [4, 211]:

$$M = \sum_{i=1}^N M_i = \sum_{i=1}^N m_i \varepsilon R_i^2 = \varepsilon \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 = \varepsilon I, \quad (2.39)$$

где  $I = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2$  – *момент инерции* относительно данной оси.

Для проведения исследовательских работ достаточно знать моменты инерции простейших тел [4, 186, 211]:

- тонкостенного цилиндра  $I = mR^2$ ,
- однородного цилиндра  $I = mR^2 / 2$ ;
- шара  $I = 2mR^2 / 5$ ;
- стержня относительно его центра  $I = ml^2 / 12$  и относительно одного из его концов  $I = ml^2 / 3$ .

Формулы для моментов инерции можно дать школьникам:

- без вывода, что менее желательно, поскольку опыт показывает, что школьники без особого доверия относятся к формулам, полученным без вывода;
- используя неявное интегрирование, как описано в [186, 196];
- используя численные методы, как описано в [186, 196].

Кроме этого для некоторых задач полезно знать теорему Гюйгенса-Штерна. Ее можно вывести, если школьники знают, что такое центр масс.

Рассмотрим несколько исследовательских задач на эту тему [185, 186, 207].

## 2.5.2. Исследование колебаний физических маятников

Когда мы рассматривали маятники, то имели в виду математический маятник, когда вся масса маятника сосредоточена в нижней точке. Понятно, что это – идеализация. Масса нити, действительно, обычно много меньше массы грузика, но масса стержня в настенных ходиках отнюдь не мала. Чтобы вычислить период, когда масса распределена по маятнику, нужно использовать основное уравнения динамики вращательного движения [4, 211].

Начнем рассмотрение с грузика на стержне. Пусть у нас качается маятник, состоящий из грузика массы  $m$  на невесомом стержне длиной  $L$  (рис. 2.26).

Момент силы тяжести относительно оси  $O$  равен:

$$M = mgl \sin \alpha.$$

В приближении малых углов:

$$M = mgl\alpha .$$

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$mgl\alpha = \varepsilon I = \varepsilon ml^2 .$$

Отсюда получим выражение для углового ускорения [4, 186, 196, 211]:

$$\varepsilon = g\alpha/l .$$

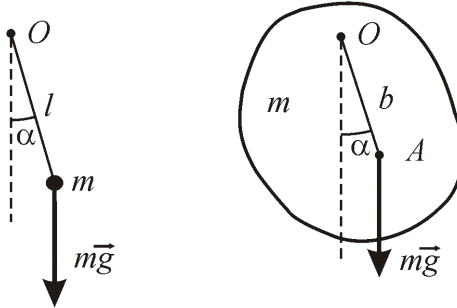


Рис. 2.26  
Математический и физический маятники

Теперь рассмотрим произвольное закрепленное на оси  $O$  тело массой  $m$  с моментом инерции относительно этой оси  $I$ . Запишем основное уравнение динамики вращательного движения.

$$M = mgb \sin \alpha \approx mgb\alpha = I\varepsilon ,$$

где  $\alpha$  – угол между  $OA$  и вертикалью, а  $b$  – расстояние от центра масс до оси. Тогда угловое ускорение равно:

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{mb}{I} g\alpha . \quad (2.40)$$

Сопоставляя уравнение (2.40) и аналогичную формулу для ускорения математического маятника:

$$\varepsilon = \frac{1}{l} g\alpha ,$$

мы увидим, что если ввести величину



$$l_1 = \frac{I}{mb}, \quad (2.41)$$

то получится такая же формула для углового ускорения, что и для математического маятника. Следовательно, у них будут одинаковые периоды. Период математического маятника равен  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , период физического маятника также равен [4, 186, 196, 211]:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mbg}}. \quad (2.42)$$

Заметим, что указанная в формуле (2.41) величина  $l_1$  называется *приведенной длиной* физического маятника [4, 211].

Рассмотрим для примера исследование колебаний однородного стержня. Возьмем длинный однородный стержень – от конструктора или от химического штатива и подвесим его на очень короткой нити к жесткому подвесу. Рассчитаем его период по формуле (2.42). Расстояние до центра масс – половина длины стержня  $b = l/2$ . Момент инерции стержня относительно его края:  $I = ml^2/3$  [4, 186, 196, 211]. Таким образом:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2/3}{mgl/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Теперь с помощью фотокамеры можно измерить период, а также исследовать зависимость угла отклонения от времени и определить будут ли колебания гармоническими.

Аналогичные исследовательские работы можно провести [185, 186, 196]:

- с настенными ходиками;
- с детской игрушкой «Ванькой–встанькой» (отдельной задачей является нахождение центра масс этой игрушки).
- с елочными украшениями... и др. подобными объектами.

Ниже мы рассмотрим еще несколько интересных примеров.

### 2.5.3. Исследование движения маятника Максвелла (игрушки «йо-йо»)

Рассмотрим не колеблющийся, а вращающийся маятник – маятник Максвелла, который представляет собой цилиндр, точнее, два соосных цилиндра. На один из цилиндров намотана нить, как показано на рис. 2.27. Заметим, что подобное устройство имеет детская

игрушка «йо-йо». На практике для большей устойчивости маятник закрепляют на двух нитях.

Если цилиндр отпустить, то он будет опускаться, нить при этом будет разматываться, цилиндр начнет вращаться.

Когда нить полностью разматывается, то в силу инерции цилиндр начнет наматывать нить, и в идеале (при отсутствии трения и др.) вернется в исходное положение. Таким образом, маятник будет совершать периодическое движение [4, 186, 196, 211].

Для расчета ускорения рассмотрим движение маятника Максвелла, как поворот маятника относительно мгновенной оси вращения (точка  $A$  на рис. 2.27). Тогда основное уравнение динамики вращательного движения примет вид:

$$mgr = I_1 \varepsilon = (I_0 + mr^2) \varepsilon,$$

где  $I_0$  – момент инерции относительно оси, проходящий через центр масс, а  $I_1$  – момент инерции относительно оси, проходящий через точку  $A$ . Отсюда угловое ускорение равно:

$$\varepsilon = \frac{mgr}{I_0 + mr^2}.$$

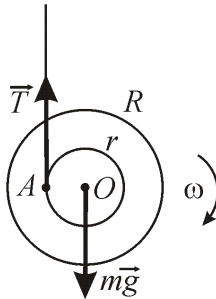


Рис. 2.27  
Маятник Максвелла

Соответственно, ускорение центра маятника [4, 186, 196, 211]:

$$a = \varepsilon r = \frac{mgr^2}{I_0 + mr^2} = g \frac{m}{m + I_0 / r^2}.$$

Заметим, что вычисленное ускорение справедливо пока нить не разматалась. После того как нити на цилиндре останется меньше, чем пол оборота, характер движения изменится. Маятник перестанет опускаться, а начнет вращаться вокруг точки крепления нити к

маятнику. Этим маятник отличается от детских игрушек «йо-йо», на многих из которых нить не привязывается к внутреннему цилиндру, а крепится в виде петли.

Экспериментально с помощью фотокамеры можно определить ускорение маятника пока нить разматывается, а также исследовать его движение на последнем этапе, когда нить полностью разматалась. Можно также определить потери энергии, которые происходят за счет сопротивления воздуха, неупругого удара нити при прохождении маятника нижнего положения. Кроме того, нужно учесть, что после первого опускания маятник кроме вертикального движения еще начинает раскачиваться из стороны в сторону [186].

Можно также предложить школьникам исследовать движение игрушек «йо-йо» при выполнении с ними стандартных для этих игрушек упражнений.

## 2.5.4. Исследование крутильных колебаний

Из двух старых лазерных дисков и трех нитей можно изготовить трифилярный подвес (от греческого слово «tri», которое произносится, как и русское «три» [23]), с помощью которого можно измерить много закономерностей.

Подвес очень прост в изготовлении, в двух лазерных дисках сверлятся 3 маленькие отверстия (рис. 2.28). Верхний диск крепится неподвижно, а нижний диск, если его повернуть на некоторый угол вокруг вертикальной оси, начинает совершать крутильные колебания [4, 65, 186, 196, 211].

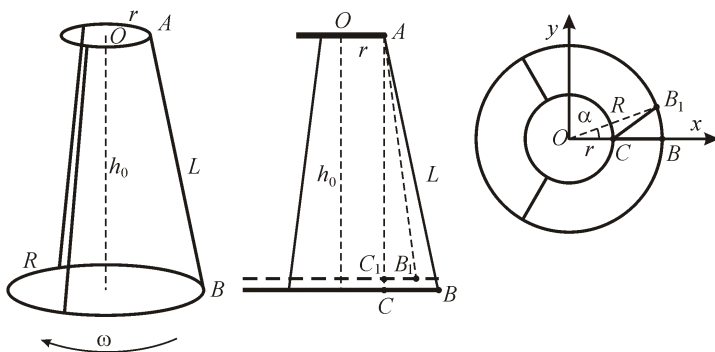


Рис. 2.28  
Трифиллярный подвес

Рассчитаем период такого маятника исходя из закона сохранения энергии. Если школьники не знают такого способа, то им можно провести аналогию с математическим маятником, для которого можно вывести соотношение между максимальной угловой скоростью и максимальным отклонением (при малых углах):

$$\omega_{\max} = \alpha_{\max} \omega_0, \quad (2.43)$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T$  – циклическая частота колебаний,  $T$  – период, а  $\omega_{\max}$  – максимальная угловая скорость.

Рассмотрим отклонение маятника, т.е. нижнего диска, на малый угол и найдем соотношение между углом поворота и высотой подъема нижнего диска. Будем использовать условие того, что нить нерастяжима, т.е. ее длина не меняется. Выберем одну из нитей. Обозначим ее концы  $A$  и  $B$ . Проведем вертикальную линию из  $A$ . Пусть она пересечет нижний диск в точке  $C$ . Тогда [186, 196]:

$$|BC| = (R - r)$$

Отсюда находим длину нити по теореме Пифагора:

$$L^2 = |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = h_0^2 + (R - r)^2. \quad (2.44)$$

Теперь, пусть нижний диск повернулся на угол  $\alpha$ . Заметим, что при повороте нижний диск поднялся, и точка пересечения вертикали с диском также поднялась. Обозначим ее  $C_1$ . Точка  $B$  поднялась и сместилась в положение  $B_1$ . Координаты точки  $B_1$  ( $R \cos \alpha, R \sin \alpha$ ). Рассмотрим треугольник  $AC_1B_1$ . Он – прямоугольный, при этом по теореме Пифагора:

$$|C_1B_1|^2 = (R \sin \alpha)^2 + (R \cos \alpha - r)^2.$$

Обозначим расстояние между дисками  $h_1$ . Следовательно, длина нити равна:

$$L^2 = h_1^2 + |C_1B_1|^2 = h_1^2 + (R \sin \alpha)^2 + (R \cos \alpha - r)^2. \quad (2.45)$$

Чтобы найти  $h_1$ , приравняем (2.44) и (2.45):

$$h_0^2 + (R - r)^2 = h_1^2 + (R \sin \alpha)^2 + (R \cos \alpha - r)^2.$$

Преобразуем (2.45):

$$h_0^2 + R^2 + r^2 - 2Rr = h_1^2 + R^2 \sin^2 \alpha + R^2 \cos^2 \alpha + r^2 - 2Rr \cos \alpha .$$

Отсюда [186, 196]:

$$h_0^2 - h_1^2 = 2Rr - 2Rr \cos \alpha = 2Rr(1 - \cos \alpha) . \quad (2.46)$$

При малых углах  $\alpha$  :

$$\cos \alpha = 1 - \alpha^2 / 2 ,$$

Тогда формула (2.46) предстанет в виде [186, 196]:

$$h_0^2 - h_1^2 = 2Rr \alpha^2 / 2 = Rr \alpha^2 .$$

Преобразуем:

$$h_0^2 - h_1^2 = (h_0 - h_1)(h_0 + h_1) = \Delta h(2h_0 - \Delta h) .$$

Поскольку изменение расстояния между дисками  $\Delta h = h_0 - h_1$  – мало, то пренебрежем  $\Delta h$  по сравнению с  $h_0$ . Тогда:

$$Rr \alpha^2 = h_0^2 - h_1^2 = (h_0 - h_1)(h_0 + h_1) = \Delta h(2h_0 - \Delta h) \approx 2\Delta h \cdot h_0 .$$

Отсюда получаем значение  $\Delta h$  :

$$\Delta h = Rr \alpha^2 / 2h_0 .$$

Таким образом, мы получили соотношение между углом поворота и высотой подъема нижнего диска [186, 196]. Применим закон сохранения энергии:

$$I \omega_{\max}^2 / 2 = mg \Delta h = mg Rr \alpha_{\max}^2 / 2h_0 ,$$

где  $m$  – масса нижнего диска, а  $I$  – его момент инерции.

У нас получилось искомое соотношение между максимальной угловой скоростью и максимальным углом отклонения  $\alpha$  :

$$\omega_{\max}^2 = \alpha_{\max}^2 mg Rr / I h_0 . \quad (2.47)$$

Сопоставляя формулы (2.47) и (2.43), получим, что частота колебаний трифилярного подвеса равна:

$$\omega_0 = \sqrt{mg Rr / I h_0} ,$$

а период колебаний [4, 186, 196, 211]:

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I h_0}{mgRr}}. \quad (2.48)$$

Для проведения исследовательских работ удобно преобразовать формулу (2.48) к виду:

$$I = \frac{mgRrT^2}{(2\pi)^2 h_0}. \quad (2.49)$$

Используя формулу (2.49), можно, экспериментально измеряя период колебаний, определять моменты инерции тел. Разместив на нижнем диске шар, цилиндр, стержень и др. можно проверить полученные выше формулы для моментов инерций. Можно рассчитать (например, численно как описано в [186, 196]) и проверить моменты инерций других тел: кубика, конуса ... и т.д. Кроме того, перемещая тела на диске, можно проверить теорему Гюйгенса-Штерна.

Кроме того, в качестве исследовательской задачи можно предложить школьникам рассчитать период крутильных колебаний стержня, подвешенного на двух нитях или линейки на четырех (рис. 2.29). Можно попытаться придумать другие формы крутильных маятников [186, 196].

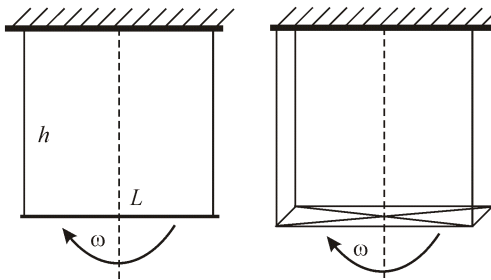


Рис. 2.29. Крутильные маятники

Еще одно направление исследований связано с наблюдением затухающих колебаний. Для регулировки затухания можно прикреплять к маятнику бумажные «крылышки». Подробнее о затухающих колебаниях будет рассказано ниже.

## **Глава 3**

### **Исследование движения в вязкой среде**

#### **3.1. Определение круга исследовательских задач по теме «вязкое трение» (сопротивление среды)**

Практически все реальные движения происходят в воздухе или в воде (исключением является разве, что движение спутников). Однако сила вязкого трения в школьных задачниках почти никогда не учитывается. При этом даже в профильном курсе тема «вязкое трение» рассматривается вскользь. Обычно говорится, что при малых скоростях сила трения (сопротивления) пропорциональна скорости тела, а при больших – квадрату скорости. Однако при этом не обсуждается, какие скорости считать «малыми» и как вычислить коэффициент пропорциональности [76, 77, 228].

Такое положение дел существует по нескольким причинам. Во-первых, в большинстве случаев, сила трения (сопротивления) воздуха намного меньше других сил, действующих в системе, и ей можно пренебречь. Во-вторых, расчеты движений тел с учетом силы вязкого трения чрезвычайно сложны и могут быть проведены аналитически лишь для узкого круга задач.

Таким образом, задачи, связанные с измерением силы трения (сопротивления) среды удовлетворяют указанным выше критериям тем для исследовательских работ: они не могут быть решены простыми аналитическими способами, многие из них имеют известное решение методами высшей математики, многие задачи могут быть реализованы экспериментально.

Рассмотрим следующие направления исследований [158, 161, 162, 163, 164, 166, 170, 172, 176, 182, 188, 192, 195]:

- вертикальное падение тел в воздухе;
- полет тела, брошенного под углом к горизонту;
- затухающие колебания маятника (пружинного или математического);
- (ламинарное) движение тел в вязкой жидкости.

##### **3.1.1. Постановка задачи учета сопротивления воздуха на примере классического опыта Галилея**

Задачу вертикального падения тела имеет смысл облечь в

историческую форму, чтобы сделать ее более интересной школьникам. Поэтому полезно вспомнить о знаменитом эксперименте Галилея на Пизанской башне, предварив его живым описанием происходящих событий [170].

В один прекрасный день 1590 года в университете старинного итальянского города Пиза царило оживление. Еще бы, известный профессор Галилео Галилей обещал спрыгнуть со знаменитой Пизанской башни. Посмотреть на такое чудо собралась изрядная толпа: студенты, профессора и просто зеваки. В назначенный час Галилей действительно появился на башне, но прыгать с нее не стал, а объявил, что собрал всех здесь, чтобы публично произвести опыт, ниспровергающий учение Аристотеля о законах движения тел. Аристотель утверждал, что скорость падения тела тем больше, чем оно тяжелее. Галилей пришел к выводу, что все тела падают одинаково быстро. Учение Аристотеля господствовало к тому моменту почти две тысячи лет, и объявить о его ошибочности было в то время неслыханной дерзостью. Для подтверждения своей правоты Галилей в присутствии собравшейся толпы одновременно бросил с башни тяжелое пушечное ядро и легкую мушкетную пулю. Пизанская башня уже тогда была сильно наклонена, поэтому можно было не беспокоиться, что стены могут помешать падению. Зрители на площади с замиранием смотрели на полет тел, некоторые даже припали к земле, чтобы точнее уловить момент удара. «Одновременно, Галилей прав!» – закричали одни. «Нет, ядро все же упало раньше!» – кричали другие...

Прежде всего, отметим, что существуют сомнения, что Галилей такой эксперимент вообще проводил, во всяком случае, в такой постановке [83, 232]. Аргументы скептиков таковы.

Во-первых, до нашего времени дошли основные труды Галилея [30, 31], и в них Галилей не ссылается на этот эксперимент.

Во-вторых, в такой постановке Галилей не мог ни подтвердить, ни опровергнуть Аристотеля, поскольку Аристотель утверждал, что при падении тел одного размера и одинаковой формы тяжелые тела падают быстрее легких. Для опровержения теории Аристотеля нужно было бросать одинаковые шары. И, действительно, по другой версии этой легенды [115] Галилей бросал четыре шара равного диаметра: золотой, свинцовый, мраморный и восковый, причем восковый шар прилетел заметно позже. Еще по одной версии были брошены два шара равного диаметра: чугунный и деревянный



[49]. При этом неясно, идет ли речь об одном и том же эксперименте или Галилей проводил свои эксперименты многократно.

Третий аргумент заключается в том, что о бросании Галилеем тел с Пизанской башни написал в своих воспоминаниях ученик Галилея Вивiani (1622–1703), причем написал об этом через много лет после смерти Галилея. Сам он во время описываемого события еще не родился, а видимо, знал о произошедшем от учителя.

Но, с другой стороны, нет оснований не доверять Вивiani. Его рассказ полон подробностей: например, один из знакомых Галилея, чтобы привлечь побольше зрителей, сделал, как сейчас говорят, рекламный ход – он пустил слух, что в полдень профессор Галилей прыгнет с Пизанской башни. Его выдумка удалась – на такое зрелище собралось множество зевак. Кроме того, существуют свидетельства, что позднее ученики Галилея провели много подобных экспериментов в разных городах, в том числе ученик Галилея Винченцо Раньери бросал тела с Пизанской башни [108].

Впрочем, для нас не так уж важно, проводил Галилей эксперимент или нет – легенда об этом эксперименте есть практически во всех учебниках физики и ученики знают о нем. Для нас важно другое: чем должен был закончиться эксперимент, если он был проведен?

Обычно школьники уверены, что тела должны были упасть одновременно, ведь оба тела падали с ускорением свободного падения  $g$ . Но ведь Галилей не откачивал воздух перед Пизанской башней, поэтому тела падали *в воздухе*. Столь уж очевидно, что сила сопротивления воздуха мала?

Прежде чем проводить эксперимент, можно начать с *качественного анализа задачи* [162, 170, 176]. Можно сделать разумное предположение, что сила сопротивления пропорциональна площади сечения тела, говоря точнее, площади максимального сечения, перпендикулярного скорости движения тела. Обычно это предположение принимается школьниками без возражений. Действительно, если отпустить лист бумаги, держа его горизонтально, то он будет падать медленно, а если держать его вертикально, когда площадь сечения практически равна нулю, то лист упадет быстрее.

Запишем II закон Ньютона в проекции на вертикальную ось (пусть для определенности ось направлена вверх):

$$ma = -mg + F_c.$$

Ускорение падающего тела:

$$a = -g + F_c / m. \quad (3.1)$$

Можно провести следующие рассуждения: если диаметр ядра, например, в 10 раз больше пули, то его площадь в 100 раз больше, а объем больше в 1000 раз. Следовательно, и масса ядра больше в 1000 раз. Получается, что слагаемое  $F_c / m$  при равных скоростях для ядра в 10 раз меньше, чем для пули, т.е. сопротивление воздуха окажет влияние на ускорение ядра в 10 раз меньше, чем на ускорение пули. Получается, что ядро упадет быстрее пули [162, 170, 176].

Полученный результат обескураживает школьников. Выходит, что Галилей своим знаменитым экспериментом ничего не доказал и *не мог доказать*. По Аристотелю ядро должно было упасть быстрее, и по современным представлениям о законах движения оно должно упасть быстрее. Становится непонятным, в чем был смысл этого эксперимента и почему он попал в учебник по физике.

Здесь приходится останавливаться и детально обсуждать точность проводимого эксперимента. Важно не только, одновременно ли упали ядро и пуля или нет, но и насколько ядро опередило пулю. Если на сотую секунду, то толпа на площади этого просто бы не заметила. Отсюда вытекает необходимость рассчитать время падения ядра и пули. Начнем с того, как определять величину вязкого трения.

### **3.2. Сопротивление среды при ламинарном и турбулентном течении**

В механике рассматривают два принципиально различных типа движения тела в жидкости или газе: *ламинарное* (от латинского «lamina» – «тонкий слой»), не образующее вихри и *турбулентное* или вихревое (от латинского «turbo» – «вихрь») [4, 45, 147, 162, 170, 172, 176, 211].

При малых скоростях движения тела в жидкости или газе является ламинарным и основную роль в замедлении движения играет *вязкое трение*. Его механизм заключается в том, что при движении тела в среде, оно раздвигает среду, которая смыкается за телом. При этом прилегающий к телу тонкий слой жидкости или газа трется о тело, и разгоняется им до скорости, практически равной скорости тела (рис. 3.1, слева). Этот слой, в свою очередь, разгоняет соседний с ним слой, и, таким образом, получается последовательность слоев (отсюда и название «lamina»), которые трутся друг о друга и движутся с постепенно уменьшающимися скоростями: от скорости тела до

нулевой скорости около стенок (если падение происходит в комнате или другом ограниченном пространстве) или на бесконечности (т.е. если стенки достаточно далеко, так что движение среды незаметно). Взаимное влияние слоев и создает вязкое трение, пропорциональное скорости тела [4, 211]:

$$\overline{F}_{\text{трения}} = -\alpha \overline{v}, \quad (3.2)$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности силы вязкого трения.

При увеличении скорости тела слои уже не успевают смыкаться за телом, слоистая структура жидкости или газа разрушается, и образуются вихри (рис. 3.1, в центре). Получается, что тело не только разгоняет слои жидкости или газа, но и увлекает вихри за собой. При этом разгоняется гораздо больше жидкости или газа, чем в случае ламинарного обтекания. В этом случае принято говорить уже не о вязком трении, а о *сопротивлении среды*, причем сила сопротивления будет пропорциональна квадрату скорости:

$$F_{\text{сопротивления}} = -\beta v^2, \quad (3.3)$$

где  $\beta$  – коэффициент пропорциональности силы сопротивления.

Следует заметить, что в разных учебниках терминология может немного различаться, и иногда вязкое трение также называют силой сопротивления среды [77].

При анализе формулы (3.3) У учеников может возникнуть вопрос: почему в формуле (3.3) сила стоит без вектора? Важно подчеркнуть, что было бы неверно записать формулу (3.3) в виде:  $\overline{F}_{\text{сопротивления}} = -\beta \overline{v}^2$ , поскольку скалярное произведение двух векторов – величина скалярная. Правильная запись формулы (3.3) в векторном виде – это произведение вектора скорости на скалярную величину – модуль скорости:

$$\overline{F}_{\text{сопротивления}} = -\beta \overline{v} |\overline{v}|. \quad (3.4)$$

Для определения характера движения тела в вязкой среде используется параметр, называемый числом Рейнольдса – Re [4, 211]:

$$\text{Re} = \frac{\rho v L}{\eta}, \quad (3.5)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $v$  – скорость тела,  $L$  – характерные размеры тела (в нашем случае – диаметр шарика),  $\eta$  – вязкость. Вязкость зависит от рода вещества и от температуры. Ее значение можно посмотреть в таблицах физико-химических величин (см., например, [230]). Для воздуха при комнатной температуре она составляет  $1,8 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с), для воды –  $0,82 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с), для глицерина –  $2,9$  кг/(м·с).

При  $Re$  меньше 10 движение шарообразных тел можно считать ламинарным. Значение коэффициента трения, возникающего при ламинарном движении шара, определяется *формулой Стокса* [4, 211]:

$$\alpha = 6\pi R\eta, \quad (3.6)$$

где  $R$  – радиус шара.

Поскольку эта тема сложна для понимания, нужно много раз упоминать условия применимости формул. В частности, нужно подчеркнуть, что ламинарное движение при числах  $Re$  меньше 10 наблюдается только у тел обтекаемой формы: шарообразной, каплеобразной или напоминающей профиль самолетного крыла. Если двигать, например, кубик или диск (рис. 3.1, справа), то вихри будут образовываться даже при очень маленьких скоростях.

При увеличении числа  $Re$  движение приобретает турбулентный (вихревой) характер. Конечно, нельзя указать конкретное значение числа  $Re$ , при котором движение перестает быть ламинарным, просто с увеличением числа  $Re$  формула Стокса будет описывать движение все менее точно. При числах  $Re$  больших 100 движение носит существенно турбулентный характер.

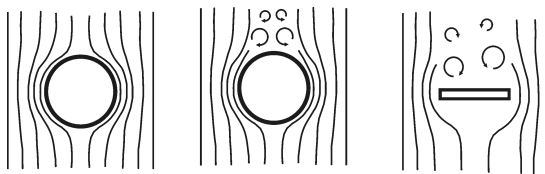


Рис. 3.1. Ламинарное (слева) и турбулентное (в центре и справа) обтекание тела

Точной формулы для описания движения тела при наличии вихрей не существует. В этом случае расчет силы сопротивления среды основывается на учете количества среды, увлекаемой телом при движении. При числах  $Re$  от  $10^2$  до примерно  $10^5$  можно пользоваться приближенной формулой [4, 136, 211]:

$$F_{\text{сопротивления}} = C_x S \rho v^2 / 2, \quad (3.7)$$

где  $S$  – площадь сечения движущегося тела плоскостью перпендикулярной направлению движения, а  $C_x$  – коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы тела (целесообразно обратить внимание учеников, что сила сопротивления в этом случае уже не зависит от вязкости  $\eta$ ). В интервале чисел  $Re$  от  $10^2$  до  $10^5$  для шара  $C_x$  можно принять примерно равным 0,45. Именно неточность этого коэффициента внесет нам основную погрешность в последующих вычислениях. Соответственно коэффициент сопротивления воздуха  $\beta$  в формуле (3.4) равен:

$$\beta = C_x S \rho / 2. \quad (3.8)$$

Важно заметить, что формула (3.8) является приближительной, а значение коэффициента лобового сопротивления  $C_x$  было получено на основе экспериментов в аэродинамических трубах [4, 211].

Еще раз обратим внимание, что в формуле (3.7) сила сопротивления не зависит от вязкости среды  $\eta$ . Возникает вопрос: почему? Разве шарик не разгоняет слои воздуха? Ответ заключается в том, что когда число  $Re$  больше 100, то сопротивление определяется не тем, как разгоняются слои жидкости или газа, а тем, сколько жидкости или газа с вихрями увлечет за собой движущееся тело [4, 45, 211].

Рассчитаем для примера соотношения сил вязкого трения и сопротивления воздуха для падающей с Пизанской башни мушкетной пули, когда она подлетает к земле. В отсутствии сопротивления воздуха пуля разгонится примерно до 32 м/с. Пусть пуля имеет радиус 2 см. Тогда: число  $Re = \rho v L / \eta = 1,25 \cdot 32 \cdot 0,02 / (1,8 \cdot 10^{-5}) = 4 \cdot 10^4$ , т.е. намного больше 10 (заметим, что при падении пули число  $Re$  будет больше 10 уже через одну сотую секунды).

Сила сопротивления воздуха по формуле (3.7) составит:

$$F_c = C_x S \rho v^2 / 2 = 0,4 \cdot 3,14159 \cdot (0,02)^2 \cdot 1,25 \cdot (32)^2 / 2 = 0,32 \text{ (Н)}.$$

Сила трения по формуле Стокса равна (3.6):

$$F = 6 \pi R \eta v = 6 \cdot 3,14159 \cdot 0,02 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5} \cdot 32 = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ (Н)}.$$

Получается, что в данном случае сила, рассчитанная по формуле Стокса в 1000 раз меньше силы сопротивления воздуха, рассчитанной по формуле (3.7) [170, 176]. При изучении материала полезно многократно повторять школьникам правило использования числа  $Re$ . При малых скоростях, когда  $Re < 10$ , нужно пользоваться

формулой Стокса для ламинарного обтекания, а при больших, когда  $Re$  принимает значения от  $10^2$  до примерно  $3 \cdot 10^5$ , нужно уже использовать формулу (3.7) для турбулентного (вихревого) обтекания.

Когда же можно наблюдать ламинарное обтекание движущихся в воздухе тел, чтобы пользоваться линейной зависимостью сопротивления воздуха от скорости? Например, при движении небольших (меньше сантиметра) тел со скоростью не более сантиметра в секунду. Такими телами, например, являются капельки воды в тумане, что будет подробнее разобрано ниже.

### 3.3. Исследование ламинарного движения

#### 3.3.1. Нахождение объектов для наблюдения ламинарного движения

Как уже упоминалось выше, ламинарное движение в воздухе можно наблюдать только для очень маленьких тел, например для капель тумана.

Наблюдать оседание тумана можно в естественных условиях. Однако неопределенность и невоспроизводимость условий эксперимента не позволяет проводить расчеты. В лабораторных условиях туман можно получить при уменьшении температуры влажного воздуха, например, за счет адиабатического расширения воздуха, находящегося под куполом насоса, как описано в [65].

Оценим скорость оседания тумана. Найдем *установившуюся скорость*, т.е. скорость при которой падение будет происходить с постоянной скоростью [170, 176]. Примем радиус капельки тумана равным 0,001 мм. При установившемся движении сила тяжести уравновешена силой вязкого трения, т.е.:

$$mg = \alpha v = 6\pi R\eta v.$$

Отсюда находим установившуюся скорость:

$$v = \frac{mg}{6\pi R\eta} = \frac{4/3\pi R^3 \rho_B g}{6\pi R\eta} = \frac{2R^2 \rho_B g}{9\eta}$$

Подставляя плотность воды  $\rho_B = 1000 \text{ кг/м}^3$ , вязкость воздуха –  $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м·с)}$ , получим:

$$v = \frac{2R^2 \rho_B g}{9\eta} = \frac{2 \cdot (10^{-6})^2 \cdot 10^3 \cdot 9,815}{9 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5}} = 0,12 \text{ (мм/с)}.$$

Получается, что мельчайшие частицы тумана падают, пролетая один метр более чем за 8 тыс. секунд, то есть примерно за два с половиной часа, что соответствует реальным наблюдениям оседания тумана в отсутствии потоков воздуха [170, 176].

Оценим число Re для такой капельки:

$$\text{Re} = \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{1,25 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-6}}{1,8 \cdot 10^{-5}} \approx 10^{-5},$$

то есть намного меньше 10. Таким образом, использование формулы Стокса, для капелек тумана оправдано.

В качестве проверки усвоения материала можно предложить школьникам задачу для самостоятельного решения: при каком размере капелек тумана можно пользоваться формулой Стокса [170, 176].

Задача сводится к нахождению размера капельки, для которой число Re будет равно 10. Подставим формулу для установившейся скорости в формулу (3.5):

$$10 = \text{Re} = \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{\rho R}{\eta} \frac{2R^2 \rho_B g}{9\eta} = \frac{2R^3 \rho \rho_B g}{9\eta^2}.$$

Тогда:

$$R^3 = \frac{90\eta^2}{2\rho \rho_B g} = \frac{45 \cdot (1,8 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot 1,25 \cdot 10^3 \cdot 9,815} = 1,2 \cdot 10^{-12} \approx 10^{-12} \text{ (м}^3\text{)}.$$

Отсюда  $R = 10^{-4}$  (м), т.е. формула Стокса применима для нахождения установившейся скорости падения капелек меньше десятой доли миллиметра [170, 176].

Наблюдать ламинарное движение можно в более вязких средах. Полезно обсудить со школьниками, можно ли в качестве такой среды взять воду? Вязкость воды почти в 100 раз больше воздуха [230], но плотность больше плотности воздуха почти в 1000 раз, поэтому число Re в воде при той же скорости тела будет больше. Для наблюдения ламинарного движения лучше брать более вязкие жидкости, например, машинные масла или глицерин. Вязкость глицерина при комнатной температуре равна  $\eta = 2,9$  кг/(м·с), плотность  $\rho = 1,27 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Ниже мы приведем эксперимент с использованием глицерина.

### 3.3.2. Исследование движения с установившейся скоростью, формула Стокса

Зависимости скорости тела от времени при ламинарном обтекании (сила сопротивления среды пропорциональна скорости) приведены на рис. 3.2. Данные зависимости получены путем численного моделирования как описано в [170, 176]. Графики можно также получить из теоретических формул, которые ввиду их сложности, приходится давать школьникам без вывода [4, 209, 211]:

$$v = \frac{g}{\gamma} [1 - \exp(-\gamma t)], \quad h = h_0 - \frac{g}{\gamma^2} [-1 + \gamma t + \exp(-\gamma t)], \quad (3.9)$$

где  $\gamma = \alpha/m$ .

При  $\alpha/m = 0,01 \text{ с}^{-1}$  график практически не отличается от прямой линии (при выбранном масштабе осей), т.е. не отличается от графика равноускоренного движения тела. При меньших значениях  $\alpha/m$  графики при выбранном масштабе практически сливаются в одну линию. При увеличении  $\alpha/m$  до  $10 \text{ с}^{-1}$  видно, что тело достигает установившейся скорости. Значение установившейся скорости при ламинарном движении можно вычислить из II закона Ньютона:

$$mg - \alpha v_0 = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{mg}{\alpha}. \quad (3.10)$$

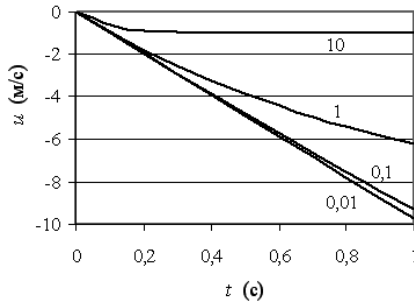


Рис. 3.2. Зависимость скорости от времени при различных коэффициентах трения; цифрами у кривых указаны значения  $\alpha/m \text{ (с}^{-1}\text{)}$

Если задать больший промежуток времени наблюдения, то будет видно, что все кривые стремятся к горизонтальным асимптотам.



При движении тел в жидкости кроме силы тяжести и вязкого трения нужно учитывать еще и силу Архимеда. II закон Ньютона в проекции на вертикальную ось тогда примет вид:

$$ma = -mg + F_A - \alpha v, \quad (3.11)$$

где  $v$  – скорость тела, а  $F_A$  – сила Архимеда. Напомним, что ось  $OY$  у нас направлена вверх, поэтому проекция ускорения свободного падения будет отрицательной, а силы Архимеда – положительной.

Сила Архимеда равна весу вытесненной жидкости. Обозначим плотность жидкости –  $\rho_0$ , плотность материала шарика –  $\rho_x$ , объем шарика –  $V$ . Опыт показывает, что школьники часто путают обозначение объема шарика и его скорости, поэтому на этом моменте нужно остановиться [196]. Уравнение (3.11) запишется:

$$\rho_x Va = -\rho_x Vg + \rho_0 Vg - \alpha v.$$

Разделим обе части уравнения на  $\rho_x V$ :

$$a = -g + g \frac{\rho_0}{\rho_x} - \frac{\alpha}{\rho_x V} v.$$

Тогда: 
$$a = -g_1 - \frac{\alpha}{m} v, \quad (3.12)$$

где  $g_1 = g \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_x} \right).$

Полученное уравнение (3.12) отличается от уравнения (3.1) только значением  $g_1$  [170, 176].

Как уже говорилось выше, ламинарное движение можно наблюдать в глицерине. Действительно, движение шарообразного тела будет ламинарным, если число Рейнольдса ( $Re$ ) будет меньше 10. Оценим его.

Вязкость глицерина при комнатной температуре равна  $\eta = 2,9$  кг/(м·с), плотность  $\rho = 1,27 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> [230]. Если использовать стальные шарики не больше 2 см в диаметре, то их скорость не превысит 1 м/с, и число  $Re$  будет меньше 10, т.е. движение шарика можно считать ламинарным и пользоваться формулой Стокса (3.6).

Поскольку глицерин имеет очень большую вязкость, то шарик в нем практически сразу достигает установившейся скорости и далее движется равномерно.

Схема простейшего эксперимента заключается в том, чтобы взять сосуд с глицерином, погрузить в него шарик, и предоставить ему возможность свободно падать в глицерине. Используя фотокамеру при этом нужно измерить их установившуюся скорость, как описано в [170, 176].

Для таких экспериментов удобно использовать шарики от подшипников, детского бильярда и т.п. Проще всего, если имеется несколько шариков из разных материалов одинакового диаметра. Коэффициент трения  $\alpha$  для шариков равных диаметров будет одинаков. Соответственно установившаяся скорость  $v_0$  будет прямо пропорциональна весу шарика (т.е. силе тяжести за вычетом силы Архимеда):

$$v_0 = \frac{mg_1}{\alpha}. \quad (3.13)$$

При отсутствии шариков одинакового диаметра можно воспользоваться формулой Стокса и определить вязкость глицерина в сосуде с учетом радиуса шарика по формуле:

$$\eta = \frac{mg_1}{6\pi Rv_0}. \quad (3.14)$$

Если при проведении экспериментов выполнено условие ламинарности обтекания, то, подставив данные для разных шариков, мы должны получить одинаковые значения коэффициента  $\eta$  [170].

Падение шариков нужно наблюдать в широком стеклянном сосуде. Формула Стокса (3.6) выведена в предположении, что стенки сосуда находятся достаточно далеко от движущегося тела, и их влиянием можно пренебречь, поэтому диаметр сосуда должен быть значительно больше диаметра шарика, а шарик следует отпускать так, чтобы он двигался по оси симметрии сосуда. Для удобства наблюдения на стенки сосуда можно нанести метки. Шарик следует отпускать только после того, как он полностью погружен в глицерин, например, с помощью пинцета, а не бросать, когда он находится над поверхностью (удар о поверхность исказит картину движения).

Заметим также, что не следует определять время движения шарика до дна сосуда, поскольку вблизи дна трение возрастет, что внесет некоторую неточность в измерения. Лучше заметить время пересечения «финишной черты» на некотором расстоянии от дна.

В [170] приведены данные экспериментов с использованием двух шариков примерно одинакового размера: свинцового и

стального. Их параметры приведены ниже в таблице 3.1. В качестве свинцового шарика использовали рыболовное грузило сферической формы. Отверстие у грузила было заплавлено оловом, поэтому плотность шарика получилась несколько ниже, чем табличная плотность свинца. Диаметры шариков измерялись штангенциркулем с точностью 0,1 мм. Грузило не было идеальным шаром. Отклонение от сферичности грузила составило примерно 0,2 мм, что отражено в погрешности диаметра, указанной в таблице 3.1 [170].

Для экспериментов использовали стеклянный химический цилиндр высотой чуть больше 30 см. На цилиндр были нанесены риски через 3 см. Чтобы метки на сосуде были лучше видны, за сосудом располагался экран – белый лист ватмана. Шарик отпускали у первой риски. Постоянная скорость устанавливалась прежде, чем шарик достигал следующей риски. Время движения определяли от момента пересечения шариком второй риски до момента прохождения его через десятую риску, которая располагалась на 24 см ниже второй. Десятая риска была на несколько сантиметров выше дна сосуда. Эксперименты проводили при комнатной температуре. Плотность глицерина измеряли взвешиванием. Она составила  $1,27 \pm 0,01$  г/см<sup>3</sup>. Вес шариков с учетом силы Архимеда приведен в таблице 3.1 [170].

Таблица. 3.1. Параметры используемых шариков

Шарик	диаметр $d$ (мм)	масса $m$ (г)	плотность $\rho_x$ (г/см <sup>3</sup> )	$g_1$ (м/с <sup>2</sup> )	вес в глицерине $mg_1$ (Н)
свинцовый	16,4±0,2	25,12±0,01	10,9±0,4	8,67±0,06	0,218±0,002
стальной	16,6±0,1	18,86±0,01	7,9±0,1	8,23±0,03	0,155±0,001

Исследование движения шариков в глицерине проводили в два этапа:

1) Проверка гипотезы, что шарики движутся в глицерине с установившейся скоростью, начиная уже со второй риски, для чего находилось время движения шарика от 2<sup>ой</sup> до 6<sup>ой</sup> риски и от 6<sup>ой</sup> до 10<sup>ой</sup>. Если движение установившееся, то эти интервалы должны быть равны.

2) Определение времени движения шарика от 2<sup>ой</sup> до 10<sup>ой</sup> риски и вычисление вязкости  $\eta$ .

Результаты измерений приведены в таблице 3.2 [170]. Из нее видно, что с указанной точностью скорость каждого шарика на первой половине пути и на второй была одинаковой, т.е. шарики двигались с

установившейся скоростью. Кроме того, видно, что скорость шариков не превышала 1 м/с, т.е. число Re было не больше 10.

Таблица 3.2. Результаты экспериментов с глицерином

Шарик	Время падения от 2 <sup>ой</sup> до 6 <sup>ой</sup> риски (число кадров)	Скорость $v_1$ (м/с)	Время падения от 6 <sup>ой</sup> до 10 <sup>ой</sup> риски (число кадров)	Скорость $v_2$ (м/с)
свинцовый	6,0±1,5	0,50±0,12	6,5±1,5	0,46±0,12
стальной	8,5±1,5	0,35±0,06	9,0±1,5	0,33±0,06

Во второй серии экспериментов измерялось время движения от 2<sup>ой</sup> до 10<sup>ой</sup> риски и вычисляли значение  $\eta$  по формуле (3.14). Результаты приведены в таблице 3.3 [170].

Таблица 3.3. Результаты измерения вязкости  $\eta$

Шарик	Время падения от 2 <sup>ой</sup> до 10 <sup>ой</sup> риски (число кадров)	Скорость $v_0$ (м/с)	$\eta$ (кг/(м·с))
свинцовый	12,5±1,5	0,48±0,06	2,9±0,4
стальной	17,5±1,5	0,34±0,03	2,9±0,2

Видно, что значения вязкости  $\eta$ , измеренные с помощью стального и свинцового шариков прекрасно совпали. Это значит, что в условиях описанных экспериментов движение было ламинарным и можно было пользоваться формулой (3.13) [170].

Полученное значение вязкости глицерина  $\eta$  совпадает с табличным [230]. Следует заметить, что вязкость глицерина сильно зависит от температуры.

После проведения эксперимента целесообразно обратить внимание школьников, что один из стандартных способов определения вязкости жидкости как раз и основан на измерении установившейся скорости движения в ней шарика [221].

### 3.3.3. Зависимость скорости и координаты от времени при ламинарном движении

Описанный выше эксперимент по падению шариков в глицерине позволяет убедиться в том, что движение шарика было ламинарным и поэтому для определения силы трения можно было пользоваться формулой Стокса.

Однако, чтобы получить зависимость скорости и координаты от времени при ламинарном движении нужно взять среду с меньшей вязкостью, чтобы успеть сделать необходимое число кадров, прежде чем шарики достигнут установившейся скорости. Сильно уменьшить вязкость тоже нельзя, т.к. желательно, чтобы шарики достигли установившейся скорости. То есть нам нужна жидкость с вязкостью чуть меньше, чем у глицерина. В качестве такой жидкости можно взять не очень густое машинное масло. В [170] использовали глицерин, разведенный дистиллированной водой.

Для разведения глицерина к 500 мл глицерина добавляли 45 мл дистиллированной воды. При этом получается 92% (по объему) глицерин. Однако приготовленная таким образом смесь может оказаться неоднородной. Для того, чтобы сделать ее однородной, ее нужно нагреть до 60° С, тщательно перемешать и охладить. Плотность 92% глицерина составляет 1,25 г/см<sup>3</sup> [170]. Соответственно, изменяется действующая на шарики сила Архимеда.

Так же как и в предыдущей серии экспериментов, шарик позволяли свободно падать в сосуде с глицерином. Падение снимали на фотокамеру. Полученный видеофрагмент падения шарика преобразовывали в последовательность графических файлов и определяли координаты шарика. Точность определения координаты – 1 мм. По двум последовательным кадрам определяли скорость шарика как описано выше. Точность определения скорости составила 0,2 м/с. Результаты экспериментов представлены на рис. 3.3 [170].

Видно, что стальной шарик успевает достичь установившейся скорости, а свинцовый почти приближается к ней. Найдем установившуюся скорость стального шарика по трем последним кадрам. Она равна  $0,71 \pm 0,02$  (м/с). Отсюда можно по формуле (3.14) вычислить вязкость 92% глицерина, она равна  $\eta = 1,40 \pm 0,04$  кг/(м·с). То есть, при разведении вязкость глицерина существенно уменьшилась.

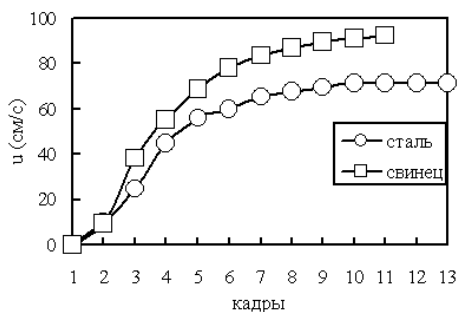


Рис. 3.3. Зависимость скорости шариков от времени при падении в 92% глицерине

В работе [170] было получено, что при указанной вязкости свинцовый шарик разгоняется до скорости 0,9 м/с, а число Re достигает 14, поэтому рассмотренное движение свинцового шарика в 92% глицерине описывается законом Стокса лишь приближенно, дальнейшее уменьшение вязкости среды может привести к существенным ошибкам. Отношение  $\alpha/m$  для шариков приведены в таблице 3.4 [170].

Таблица 3.4. Параметры шариков в разбавленном глицерине

шарик	масса $m$ (г)	диаметр $d$ (мм)	$\alpha/m$ ( $c^{-1}$ )
свинцовый	$25,12 \pm 0,01$	$16,4 \pm 0,2$	$8,6 \pm 0,3$
стальной	$18,86 \pm 0,01$	$16,6 \pm 0,1$	$11,6 \pm 0,4$

Экспериментальные зависимости координаты от времени в работе [170] сравнивались с рассчитанными численными методами. Результаты представлены на рис. 3.4 [170].

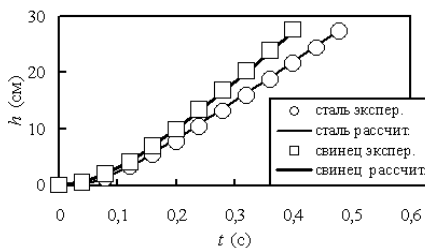


Рис. 3.4. Зависимость координат шариков от времени при падении в 92% глицерине

В пределах погрешности измерений рассчитанные значения, совпали с экспериментальными данными [170].

### 3.4. Исследование турбулентного движения

#### 3.4.1. Вертикальное движение тел в воздухе, качественный подход

Рассмотрим для примера задачу Всесоюзной олимпиады по физике 1970 г. [216].

«Мяч подброшен вертикально вверх. Что больше: время подъема или время падения?»

С первого взгляда это очень простая задача. Она разбирается практически во всех школьных учебниках [76, 77, 228, 252], где показывается, что время полета тела вверх будет равно времени его падению и вычисляется по формуле:

$$t_{\text{подъема}} = \frac{v_0}{g}. \quad (3.15)$$

При этом тело поднимется на высоту:

$$h = v_0 t_{\text{подъема}} - \frac{gt_{\text{подъема}}^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Остается вопрос: как такая простая задача попала на всесоюзную олимпиаду? Дело в том, что формула (3.15) получена в предположении, что сопротивления воздуха нет. Каков будет ответ, если его учесть? В этом случае задача из очень простой становится очень сложной.

Попробуем решить ее экспериментально. Для стандартизации опыта нужно взять устройство для подбрасывания мяча. Лучше всего для этой цели подойдет детский пистолет, стреляющий шариками для пинг-понга (или легкими мягкими шариками). Пистолет нужно направить вертикально и закрепить в штативе. Осталось навести фотокамеру и произвести серию выстрелов.

Учитывая быстрое изменение скорости тела требуется фотокамера с режимом быстрой серийной съемки или видеосъемки. Желательно наличие двух фотокамер: одна наводится крупным планом на нижнюю часть траектории, чтобы определить скорость тела во время старта (финиша), а вторая фиксирует общий вид и позволяет найти зависимость координаты от времени.

При стрельбе шариками для пинг-понга, чтобы увидеть разницу между временем подъема и падения нужна скорость съемки не менее 30 кадров/с. Тогда разница во времени подъема и падения составит 3-4 кадра (при начальной скорости около 10 м/с), т.е. вполне заметную величину [170, 176].

Можно предложить школьникам провести исследование с разными телами и начальными скоростями и убедиться, что разница времени подъема и падения будет тем больше, чем больше начальная скорость и чем больше отношение  $\beta/m$ .

Проведенный эксперимент имеет эвристическое значение, поскольку зная ответ, решить задачу аналитически становится легче. Нужно обосновать, почему время подъема меньше.

Перейдем к аналитическому решению задачи [170, 176, 196].

Рассмотреть движение тела, разбив его на множество равных малых интервалов времени  $\Delta t$ .

Запишем II закон Ньютона в проекции на вертикальную ось (для удобства – чтобы работать с положительными значениями ускорений, ось направим вниз). Когда тело летит вверх, сила тяжести и сила сопротивления воздуха  $F_1$  направлены вниз:

$$ma_1 = mg + F_1.$$

Когда же тело летит вниз, сила сопротивления воздуха  $F_2$  направлена вверх:

$$ma_2 = mg - F_2.$$

Получается, что ускорение при подъеме тела:

$$a_1 = g + F_1/m$$

всегда больше  $g$ , а ускорение при падении:

$$a_2 = g - F_2/m,$$

по модулю всегда меньше  $g$ , и соответственно, меньше, чем  $a_1$ .

Возникает загвоздка, что начальные скорости мяча при подъеме и падении мяча различны. Но ее можно решить с помощью следующего приема. Представим, что мы записали подъем мяча на видеопленку, а затем прокручиваем эту пленку наоборот. А падение мяча мы смотрим в нормальном режиме. То есть, что из верхней точки траектории высотой  $h$  одновременно с нулевой начальной скоростью



стартуют два тела с ускорениями  $a_1$  и  $a_2$ , причем  $a_1 > a_2$ . Понятно, что скорость первого тела будет всегда больше скорости второго, и оно пройдет путь  $h$  быстрее. Таким образом, получилось, что время движения вверх меньше времени движения вниз, причем результат не зависит от величины силы сопротивления воздуха, главное, чтобы сила сопротивления была направлена против движения [170, 176, 196].

В результате мы разобрали задачу Всесоюзной олимпиады. Заметим, что в сборнике [216] приведено другое, на наш взгляд, более сложное решение. К сожалению, приведенное рассуждения позволяют лишь определить больше или меньше времени тело двигалось вверх или вниз, но не дают ответа, насколько больше. Это можно сделать либо численными методами, как описано в [170, 176], либо с помощью приведенных ниже формул неявного интегрирования.

### 3.4.2. Вертикальное падение тел, установившаяся скорость

Теоретическая формула для движения тела в вязкой среде, когда сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости ( $F = \beta v^2$ ), имеет вид [4, 136, 209, 211]:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} th \left( \sqrt{\frac{\beta g}{m}} \cdot t \right), \quad h(t) = \frac{m}{\beta} \ln ch \left( \sqrt{\frac{\beta g}{m}} \cdot t \right), \quad (3.16)$$

где  $ch$  и  $th$  – гиперболические косинус и тангенс соответственно:

$$ch(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \quad th(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}.$$

Ввиду сложности формул их приходится давать без вывода или пользоваться для расчета движения численным моделированием движения тел как описано в [170, 176, 196].

Для наглядности построим зависимости скорости от времени для тел с разными значениями коэффициента  $\beta/m$ : пушечного ядра, деревянного шара, шарика для пинг-понга, а также для идеального случая, когда сопротивления воздуха нет (рис. 3.5). Коэффициенты  $\beta/m$  вычислены из следующих соображений: радиус чугунного ядра принят равным 10 см, ( $\beta/m = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ ), такой же радиус выбран для деревянного шара ( $\beta/m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ ), и использован обычный

шарик для пинг-понга (радиус 1,88 см, масса 1,75 г,  $\beta/m = 0,16 \text{ м}^{-1}$ ).  
 Подробности расчета приведены в [170, 176, 196].

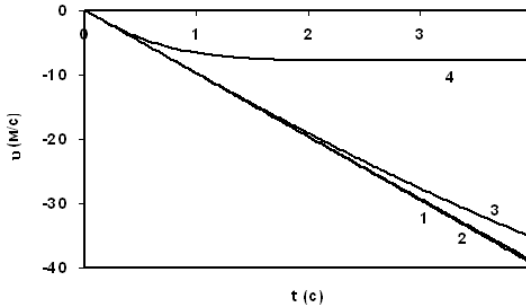


Рис. 3.5

Зависимость скорости падающего тела от времени:

- 1 – в отсутствии сопротивления воздуха; 2 – чугунное ядро,  
 3 – деревянное ядро, 4 – шарик для пинг-понга

Графики в целом похожи на аналогичные графики, когда сила сопротивления пропорциональна скорости (рис. 3.2).

Заметим, что зависимости для ядра и для идеального случая просто сливаются в одну линию, а график с шариком для пинг-понга переходит в горизонтальную линию, которая соответствует движению с установившейся скоростью. [4, 211, 252]. Вычислим ее величину:

$$g = F_c / m = \beta v^2 .$$

Отсюда можно получить значение установившейся скорости:

$$v = \sqrt{g / \beta} . \tag{3.17}$$

У каждого тела свое значение установившейся скорости. Исходя из приведенных выше данных, можно рассчитать, что у шарика для пинг-понга установившаяся скорость равна:  $\sqrt{9,815 / 0,16} = 7,832 \text{ (м/с)}$ .

При обсуждении установившейся скорости ученикам можно напомнить известный факт, что когда парашютист прыгает с самолета, его скорость сначала возрастает, затем, через некоторое время после раскрытия парашюта становится постоянной, и не меняется вплоть до приземления.

Заметим, что ядро тоже стремится к установившейся скорости, но установившаяся скорость  $y$  нее будет значительно больше. По формуле (3.17) легко получить, что ядро с выбранными нами размерами разгонится до 180 м/с, но чтобы это произошло, нужно больше времени [170, 176].

Стоит отметить, что нельзя строго указать через какое время падающее тело достигает установившейся скорости, поскольку скорость будет стремиться к установившейся подобно тому, как график зависимости  $y = 1/x$  будет стремиться к оси  $x$ , но не коснется ее. Поскольку любая задача решается с определенной точностью, то при анализе движения шарика для пинг-понга можно сказать, что он достигает установившейся скорости с точностью 5% за 1,5 с, и с точностью 1% через 2 с после старта.

Для экспериментальной проверки формул (3.16) удобно использовать детский воздушный шарик, однако при работе с ним нужно учитывать следующие проблемы [163, 176]:

- шарик при падении чувствителен к слабейшим потокам воздуха, наблюдать его свободное падение можно либо в закрытых помещениях, либо в абсолютный штиль;
- шарик может иметь несферическую форму, у несферических тел коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  может заметно отличаться от  $C_x$  для сферы; следует выбирать шарик так, чтобы его форма была близка к сферической или чтобы он имел форму, для которой известно значение лобового сопротивления  $C_x$  [136, 163, 176];
- надо следить, чтобы при падении шарик не поворачивался и не падал боком, предотвратить вращение шарика можно, подвешивая к нему небольшой груз;
- сильно надутый шарик легко лопается, не следует слишком сильно его надувать;
- шарик со временем сдувается, каждую серию опытов надо проводить за небольшое время и контролировать размеры шарика в начале и в конце эксперимента;
- вес шарика в процессе надувания увеличивается, поэтому его надо взвешивать *после* того, как он был надут [163, 176].

Для дальнейших расчетов нам необходимо знать массу шарика. Проще всего определить массу шарика взвешиванием, но при этом нужно учесть силу Архимеда воздуха. Обычно мы считаем силу Архимеда воздуха малой по сравнению с силой тяжести (напомним, что литр воздуха при нормальных условиях имеет массу 1,3 г). Однако, для воздушного шарика это не так. Если надуть шарик не

воздухом, а гелием, то он взлетит, то есть вес вытесненного воздуха будет больше силы тяжести, действующей на резиновую оболочку и на гелий внутри шарика. Поэтому необходимо учесть силу Архимеда аналогично тому, как это было сделано для шариков в глицерине.

В работе [163], чтобы обеспечить устойчивое падение шарика, к нитке, которой завязывали шарик, прикреплялся маленький грузик. Шарик отпускали так, чтобы он падал грузиком вниз. Но с дополнительным грузом шарик падал достаточно быстро и не достигал установившейся скорости. Чтобы уменьшить скорость падения, использовался воздушный шарик, наполненный гелием. Параметры шарика указаны в таблице 3.5 [163]. Воздушный шарик имел не точно сферическую форму, поэтому диаметр поперечного сечения шарика был определен с точностью до 5 мм.

Таблица 3.5. Параметры воздушного шарика

Масса шарика, определенная путем взвешивания (г)		Истинная масса шарика (учтена сила Архимеда) (г)	Диаметр $d$ (см)	Площадь сечения $S$ (м <sup>2</sup> )
без грузика	с грузиком			
3,2±0,1	6,0±0,1	10,5±0,1	18,0±0,5	0,025±0,001

Шарик бросали с высоты три метра, используя обычную стремянку. Падение снимали на камеру и определяли скорость падения шарика в нижней части траектории. Результаты экспериментов приведены на рис. 3.6 [163, 176]. График зависимости скорости шарика от времени соответствует теоретическим кривым, приведенным на рис. 3.5. При этом шарик достигает установившейся скорости  $v_0 = 2,7 \pm 0,2$  м/с.

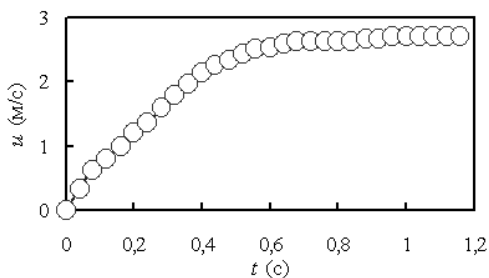


Рис. 3.6. Зависимость скорости падения воздушного шарика от времени

Зная установившуюся скорость, найдем коэффициент  $\beta$  для шарика. Запишем II закон Ньютона для установившегося движения шарика:

$\beta v_0^2 + F_A - mg = 0$ , где  $F_A$  – сила Архимеда. Отсюда:

$$\beta = \frac{mg - F_A}{v_0^2}.$$

Подставляем значения из таблицы 3.5:

$$\beta = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 9,815 / 2,7^2 = 8,1 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/м)}.$$

Определим из (3.8) коэффициент лобового сопротивления  $C_x = 2\beta/(\rho S) = 2 \cdot 8,1 \cdot 10^{-3} / (1,3 \cdot 0,025) = 0,49$ . С учетом погрешности определения  $v_0$ ,  $C_x = 0,49 \pm 0,04$  [163], т.е. в пределах погрешности соответствует коэффициенту лобового сопротивления сферы 0,45 [4, 136, 163, 211].

Используя воздушный шарик, можно не только получить зависимость скорости от времени, но и проверить правильность гипотезы о том, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости как описано ниже.

### **3.4.3. Исследование зависимости силы сопротивления от скорости**

Рассмотрим простую экспериментальную исследовательскую работу, которую можно провести даже со школьниками 7-го класса (после изучения закона Архимеда) и которая позволяет наглядно продемонстрировать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости тела даже при скоростях порядка нескольких сантиметров в секунду [163].

Для экспериментов требуется детский воздушный шарик, наполненный гелием, фотокамера, весы и набор грузов.

Если отпустить обычный воздушный шарик с высоты 2-3 м, то он еще до падения на пол достигает установившейся скорости. Ее значение, как уже говорилось выше, можно определить, приравняв силу тяжести и силу сопротивления воздуха.

Далее можно предложить простую схему эксперимента. Бросить несколько раз обычный детский воздушный шарик, привязывая к нему гирьки разных масс. Фотокамерой измерить

установившуюся скорость и определить зависимость силы сопротивления от скорости [163].

Однако здесь возникает проблема. Если к обычному воздушному шару прикрепить даже небольшой груз, то при падении с высоты 3 м он не успеет набрать установившуюся скорость.

Поэтому лучше воспользоваться воздушным шариком, наполненным гелием. Тогда, прикрепляя различные грузы, можно получить скорости падения от почти нулевой до установившейся скорости падения обычного воздушного шарика.

Здесь возникает две проблемы.

Во-первых, воздушный шарик может иметь достаточно сложную форму (в виде сердечка, бублика и др.). Возникает вопрос, как измерять площадь поперечного сечения? Одним из возможных решений этой задачи – сделать фотографию шарика в соответствующей проекции и измерить площадь по полученной фотографии, наложив на нее палетку. В работе [163] использовали наполненный гелием шарик вытянутой формы с практически круговым сечением диаметром 34 см.

Во-вторых, как найти массу шарика? Заметим, что было бы ошибкой (которую часто делают школьники) определять массу шарика по массе резиновой оболочки (которую можно взвесить до того, как надут шарик). Нужно еще учитывать находящийся в шарике газ. Но заметим, что в постановке эксперимента, когда мы измеряем только установившуюся скорость, нам *не нужно* знать массу шарика, а достаточно знать его вес, который можно определить с помощью весов [163].

Запишем условие равновесия, при котором шарик будет двигаться равномерно с установившейся скоростью  $v_0$ .

$$P = F_A + F_C, \quad (3.18)$$

где  $P$  – вес шарика с газом в отсутствии силы Архимеда воздуха,  $F_A$  – сила Архимеда воздуха,  $F_C$  – искомая сила сопротивления воздуха. Обозначим  $P_0 = P - F_A$  – вес шарика с учетом силы Архимеда. Тогда (3.18) запишется в виде:

$$P_0 = F_C.$$

Здесь у школьников может возникнуть вопрос, почему они не учитывали силу Архимеда воздуха в предыдущих задачах. Здесь можно напомнить, что плотность воздуха составляет (при комнатной температуре)  $1,25 \text{ кг/м}^3$  – в 800 раз меньше плотности воды и в 6000

раз меньше плотности стали. Поэтому при исследовании движения ядра и мушкетной пули, сила Архимеда была столь мала, что ее можно было не учитывать. Но воздушный шарик особый объект, он весит мало, а объем занимает большой, поэтому сила Архимеда может быть сравнима с силой тяжести, а если шарик наполнен гелием, то сила Архимеда даже превышает силу тяжести, благодаря чему шарик стремиться взлететь.

Эксперименты нужно начинать с того, чтобы определить вес шарика с гелием с учетом силы Архимеда. Поскольку шарик стремиться взлететь, тот просто положить его на весы не удастся. Поэтому нужно привязать к шарика гирьку массой 10–50 г, и положить гирьку на весы. Уменьшение веса гирьки покажет вес шарика с учетом силы Архимеда. В работе [163] брали гирьку 10 г и после того, как ее привязали к шарика, весы показали, что гирька весит столько, как будто ее масса равна  $5,1 \pm 0,1$  г. Следовательно, если к этому шарика привязать гирьку 4,9 г, то он не взлетал бы и не падал. Эти измерения полезно повторить в конце эксперимента, чтобы убедиться, что шарик за время эксперимента заметно не сдулся.

При экспериментах с падением шарика для стандартизации эксперимента удобно использовать стремянку. Камеру нужно перевести в режим серийной съемки или в режим видео с уменьшенным временем экспозиции. Для получения четких фотографий нужно использовать фотографические софиты или аналогичное мощное освещение. Фотокамеру нужно закрепить в штативе. Чтобы параллакс был меньше, камеру нужно ставить по возможности дальше и наводить ее на нижнюю часть полета шарика. Нужно следить, чтобы между шариком и стремянкой было достаточное расстояние, так, чтобы шарик не подлетел к стремянке. То есть. между ними должно быть по крайней мере 20 см. Далее нужно навести фокус, и перевести наведение фокуса в ручной режим, иначе камера при падении шарика может начать перенастраивать фокус. После этого можно прикреплять гирьки и отпускать шарик [163].

Если в условиях летней школы нет набора гирек, то можно воспользоваться подручными средствами, например, монетками.

В таблице 3.6 приведены массы основных монет с точностью до 0,1 г [176] (следует иметь в виду, что веса указаны для новых монеток).

Таблица 3.6. Массы монеток

Монетка	Масса (г)
5 руб.	6,5
2 руб.	5,1
1 руб.	3,3
50 коп.	2,8
10 коп.	1,9
5 коп.	2,5
1 коп.	1,5

При анализе изображения полезно убедиться, что движение, действительно, происходит с установившейся скоростью. Для этого нужно измерить время его движения на двух интервалах вблизи пола, например, за сколько он пролетел последние 30 см пути, и за сколько он преодолел путь от 60 см до 30 см от пола.

Ниже приведены данные экспериментов с воздушным шариком,  $P_0$  – вес шарика с монетками [163].

Вес $P_0$ (Н)	Число кадров	Время (с)	Путь (мм)	Скорость (м/с)
0,00196	60	2	400±8	0,20±0,004
0,01178	30	1	545±10	0,54±0,01
0,01570	20	0,667	455±8	0,68±0,01
0,02650	15	0,5	455±9	0,91±0,02
0,03455	15	0,5	554±10	1,11±0,02
0,05006	12	0,4	538±9	1,34±0,02
0,06478	10	0,333	474±12	1,42±0,04

Получилось, что зависимость скорости шарика от его веса  $m_0g$  не линейна. Чтобы понять ее характер, построим зависимость квадрата скорости шарика от веса – рис. 3.7 [163].

Эта зависимость с большой точностью можно считать линейной, особенно, если отбросить последнюю точку, когда шарик, возможно, не достиг установившейся скорости [163].

Таким образом, приведенные исследования показали, что даже при небольших скоростях: 0,2–2 м/с сопротивление воздуха возрастает пропорционально квадрату скорости.

По приведенным данным можно вычислить коэффициент лобового сопротивления  $C_x$ . Из (3.8) имеем:

$$C_x = \frac{2P_0}{S\rho v^2}.$$



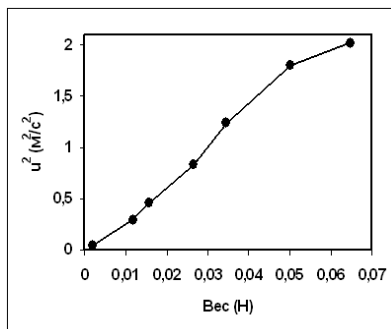


Рис. 3.7. Зависимость квадрата установившейся скорости падения от веса шарика с грузиком

Возьмем, например, данные эксперимента, когда  $P_0 = 0,03455$  (Н), а скорость  $1,11$  (м/с). Как было указано выше, диаметр максимального поперечного сечения шарика был равен  $34$  см. Следовательно, площадь поперечного сечения равна:  $S = 3,14159 (0,17)^2 = 0,09$  (м<sup>2</sup>). Отсюда вычислим коэффициент лобового сопротивления:  $C_x = 2 \cdot 0,03455 / (0,09 \cdot 1,25 \cdot 1,11^2) = 0,49$  [163].

Получилось чуть больше, чем табличное значение  $C_x$  для шара –  $0,45$  [4, 136, 211], что неплохо, учитывая, что воздушный шарик имел не идеально сферическую форму.

Как видно проведенные исследования под силу даже ученикам 7-го класса, при этом они позволяют получить весьма ценную информацию. При наличии времени и желания школьников можно также исследовать зависимость величины  $C_x$  от формы воздушного шарика.

### 3.4.4. Анализ опыта Галилея методом неявного интегрирования

Разобрав движение шарика для пинг-понга и воздушного шарика, перейдем к опыту Галилея на Пизанской башне. Для вычисления коэффициента  $\beta/m$  нужно знать размеры и массы ядра и пули. Обратимся к книге Галилея 1638 г. «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящиеся к механике и местному движению» (далее «Беседы...») [31].

При наличии времени можно дать ученикам краткую историческую справку о трудах Галилея. Два своих основных труда; «Беседы...» и «Диалог...» Галилей писал не от первого лица, а в виде беседы трех лиц. Симпличио – убежденный последователь Аристотеля, Сальвиати выступает против некоторых положений физики Аристотеля, а Сагрето – слушатель, стремящийся познать истину, хотя он не принимает явно чью-либо сторону в споре, но симпатизирует Сальвиати. На чьей стороне автор, из текста не видно, так что читатель сам может выбрать, чьи аргументы ему больше нравятся – последователя Аристотеля или его противника. Такая форма диалога позволила Галилею избежать конфликта с Церковью. В 1632 г. он издает «Диалог о двух главнейших системах мира, Птоломеевой и Коперниковой». В этой книге Галилей излагает устройство мира по Копернику, но при этом лишь обсуждает его учение, не утверждая, что оно истинно. Так он смог, с одной стороны, донести до читателей гелиоцентрическую систему Коперника, с другой, – сделать неясным, является он сторонником учения Коперника или противником. В конечном счете, это спасло Галилея от костра [232].

В ходе первого дня беседы Сагрето говорит:

«Но я, синьор Симпличио, не производивший никаких опытов, уверяю вас, что пушенное ядро весом в сто, двести и более фунтов не опередит и на одну пядь мушкетной пули весом меньше полуфунта при падении на землю с высоты двухсот локтей» [31, стр.164–165].

В тексте есть некоторая неясность: если Сагрето не проводил опыта, то почему он так уверен в его результате? С точки зрения современного естествоиспытателя нужно было бы провести эксперимент, но во времена Галилея было другое отношение к эксперименту: рассуждения и ссылка на авторитет Аристотеля, Пифагора и др. казались важнее, чем результаты эксперимента [83]. Кроме того, высота 200 локтей – примерно 100 метров не соответствует размеру Пизанской башни (55 метров). Но мы можем принять указанные в «Беседах...» массы тел.

Здесь возникает вопрос: как перевести фунт в килограммы? Английский фунт равен 0,45 кг, а русский фунт – 0,41 кг. Вряд ли Галилей пользовался русским или английским фунтом. Во времена Галилея в Европе широко применялся тройский или аптекарский фунт, который в настоящее время принят равным 0,3732 кг [230]. Строго говоря, для наших целей неважно, каким фунтом пользовался Галилей, примем за основу тройский фунт. Тогда стофунтовое ядро

имеет массу 37,3 кг, а полуфунтовая пуля – 0,1865 кг. Будем считать ядро железным и цельнолитым. Вычислим радиус ядра по формуле:

$$R = \sqrt[3]{3V / 4\pi} = \sqrt[3]{3m / 4\pi \rho_{Fe}} .$$

Плотность железа равна  $7,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> [230]. Значит, сто фунтовое ядро имеет радиус 10,4 см. Можно обратить внимание учеников, что они, несомненно, видели в военных музеях ядра такого размера.

Примем плотность воздуха равной  $1,25$  кг/м<sup>3</sup>, тогда для ядра коэффициент  $\beta/m$  равен [170, 176]:

$$\beta/m = C_x S \rho / 2m = 0,4 \cdot 3,14159 \cdot (0,104)^2 \cdot 1,25 / (2 \cdot 37,3) = 0,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

Поскольку в те времена пули отливали в виде шариков, аналогично рассчитаем радиус полуфунтовой мушкетной пули при той же плотности. Он составляет 17,8 мм. Для пули коэффициент  $\beta/m$  равен [170, 176]:

$$\beta/m = C_x S \rho / 2m = 0,4 \cdot 3,14159 \cdot (0,0178)^2 \cdot 1,25 / (2 \cdot 0,1865) = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

Как и следовало ожидать, у пули  $\beta/m$  больше, чем у ядра.

Расчеты времени падения проведем методом неявного интегрирования. При этом, как показывает опыт, чтобы не пугать школьников, слово «интегрирование» лучше не упоминать.

Потребуется знание следующих сумм [196].

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N i &= 1 + 2 + 3 \dots + N = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} \\ \sum_{i=1}^N i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}; \quad (3.19) \\ \sum_{i=1}^N i^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4}. \end{aligned}$$

Эти формулы можно доказать методом математической индукции, которая изучается в 7-ом классе. Если на доказательство этих формул не хватает времени, то их можно принять без доказательства, проверив для некоторых случаев [196].

Будем считать, что при падении обоих тел сила сопротивления много меньше силы тяжести, поэтому в целом мы можем считать равноускоренным с небольшими поправками.

Поправка к ускорению свободного падения равна:

$$a_1 = -\frac{\beta}{m}v^2 = -\frac{\beta}{m}(gt)^2 = -\frac{\beta g^2}{m}t^2 = -\gamma t^2,$$

где  $\gamma = \beta g^2 / m$ .

Получается, что дополнительное ускорение возрастает пропорционально квадрату времени.

Найдем дополнительное изменение скорости. Разобьем движение на большое число  $N$  интервалов  $\Delta t = t/N$ . На  $i$ -ом интервале дополнительная добавка (точнее – уменьшение, поскольку ускорение отрицательно) скорости равна:

$$\Delta v_i = a_i \Delta t = -\gamma t^2 \Delta t = -\gamma (i \Delta t)^2 \Delta t = -\gamma \Delta t^3 i^2.$$

Суммируя по всем  $i$ , с учетом (3.19), получаем закон изменения дополнительной скорости:

$$v = \sum_{i=1}^N \Delta v_i = -\gamma \Delta t^3 \sum_{i=1}^N i^2 = -\gamma \Delta t^3 \left( \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} \right) = -\gamma \left( \frac{t^3}{3} + \frac{t^2 \Delta t}{2} + \frac{t \Delta t^2}{6} \right)$$

Устремляя  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим формулу для вычисления «добавки скорости»:

$$v = -\gamma t^3 / 3.$$

Аналогичным образом найдем «добавку» к пройденному телом пути:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= v_i \Delta t = -\gamma t^3 \Delta t / 3 = -\gamma (i \Delta t)^3 \Delta t / 3 = -\gamma \Delta t^4 i^3 / 3 \\ x &= \sum_{i=1}^N \Delta x_i = \frac{-\gamma \Delta t^4}{3} \sum_{i=1}^N i^3 = \frac{-\gamma \Delta t^4}{3} \left( \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4} \right) = \frac{-\gamma}{3} \left( \frac{t^4}{4} + \frac{t^3 \Delta t}{2} + \frac{t^2 \Delta t^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Устремляя  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим, что «добавка пути» равна [196]:

$$x = -\frac{\gamma t^4}{12} = -\frac{\beta g^2 t^4}{12m}. \quad (3.20)$$

Подставим в (3.20) вычисленные значения  $\beta/m$  для ядра и пули, и проанализируем возможный исход опыта Галилея.

Примем  $g$  равным 9,81 м/с, высоту Пизанской башни – 55 м. В отсутствии сопротивления воздуха «идеальное» тело будет падать время:

$$t = \sqrt{2h/g} = 3,348 \text{ (с)}.$$

Ядро отстанет от «идеального» тела на 0,232 (м), пуля – на 1,341 (м). Следовательно, при падении с Пизанской башни, ядро

опередело бы пулю более, чем на 1,1 м, т.е. намного больше ожидаемой Галилеем пяди (пядь – расстояние между концами большого и указательного пальца, когда они разведены, примерно 15–20 см) [170, 176].

Однако такое вполне заметное расстояние не означает большой разницы *во времени* падения. При падении с 55 м оба тела развили бы скорость примерно 30 м/с. Следовательно, разница во времени падения составила бы менее 0,04 с [170, 176], что находится на пределе человеческой реакции. Поэтому кто-то из зрителей мог посчитать, что ядро упало раньше, а кто-то, что оба тела упали одновременно. К тому же не описано как именно Галилей обеспечивал одновременность старта, ведь он мог бросить одно тело на долю секунды раньше другого.

Сегодня вопрос о том, какое тело упало быстрее можно было бы решить с помощью фотофиниша по аналогии с тем, как это делают в спорте, чтобы узнать, кто из спортсменов пришел первым: делают снимок, на котором видно, кто первый, кто второй [161, 162, 170, 176]. Но в те времена фотокамер не было.

В качестве дополнительной задачи можно предложить ученикам рассчитать разницу во времени падения тел, если бы Галилей бросал ядро и такого же размера деревянный шар (одна из версий легенды) [170, 176].

Заметим, что формулой (3.20) нужно пользоваться очень осторожно. Если бы Галилей взял шарик для пинг-понга (радиус 1,88 см, масса – 1,75 г), у которого коэффициент  $\beta/m - 0,16 \text{ м}^{-1}$ , в 1000 раз больше, чем у ядра, то по формуле (3.20) такой шарик при падении с Пизанской башни отстал бы от «идеального» тела на 161 м, т.е. больше, чем высота башни! Такой невозможный результат получается потому, что движение шарика для пинг-понга нельзя считать равноускоренным. На последнем участке пути он уже достигнет *установившейся скорости* и будет двигаться практически равномерно [170, 176, 196].

### 3.4.5. Одновременное падение двух тел в воздухе

Рассмотрим возможность проведения эксперимента с одновременным падением двух тел и регистрацией их финиша фотокамерой (фотофиниш). Фотофиниш имеет то преимущество, что он может быть воспроизведен в любом режиме съемки, в том числе в режиме одиночной съемки, которая есть в любом фотоаппарате.

Однако в этом режиме нужно точно выбрать момент спуска затвора, поэтому более желателен режим «серийной съемки». В любом случае нужно выбирать малое время затвора ввиду большой скорости движения тел. По этой причине режим видеозаписи менее удобен [136, 158, 161, 162, 170, 176, 182].

Для удобства одно из тел нужно брать с малым коэффициентом  $\beta$ , так чтобы пренебречь сопротивлением воздуха. Для этого можно воспользоваться свинцовым рыболовным грузилом или стальным шариком. В качестве второго тела можно взять деревянный или пластилиновый шарик. В условиях летней школы можно воспользоваться балконом, при этом нужно соблюдать правила техники безопасности. В учебном году можно использовать стремянку. Важно следить, чтобы при падении шарики рикошетом не отскочили в зрителей, для этого следует использовать демпфер в виде тряпок или пенопласта.

При проведении экспериментов с одновременным падением двух шариков самое сложное – это обеспечить одновременность их старта. Достаточно вспомнить, что разница времен падения ядра и пули с Пизанской башни была менее 0,1 с. В работе [170] предлагается эксперимент: несколько раз вручную «одновременно» бросить со стремянки два одинаковых шарика и посмотреть на видеокамере как они полетят. При этом на видеозаписи видно, при каждом броске шарики разлетаются на разные расстояния.

Одновременность старта можно добиться путем пережигания нитки или лески. Для этого в работе [161] шарики связывали тонкой леской и подвешивали на штативе как показано на рис. 3.8. При пережигании лески шарики начинали одновременно падать.

Поскольку у шариков могут быть различные массы, чтобы леска не скользила, у опор должен быть большой коэффициент трения. Для этого закрепляли в штативе два круглых напильника. Положение шариков выравнивали по нижнему уровню. Затем включали камеру и пережигали нить.

В работе [170] были проведены две серии экспериментов. В первой серии использовали пинг-понговский шарик и свинцовый шарик (маленькое грузило) примерно такой же массы.

Эти эксперименты легко воспроизвести в обычной комнате. Во второй серии высоту падения шариков увеличивали до восьми метров, что позволило зарегистрировать разницу скоростей при падении большого свинцового и деревянного шариков. Шарики сбрасывали с балкона в большой лекционной аудитории. Высоту

точки старта определяли рулеткой с точностью до 1 см. Параметры шариков приведены в таблице 3.7 [170].

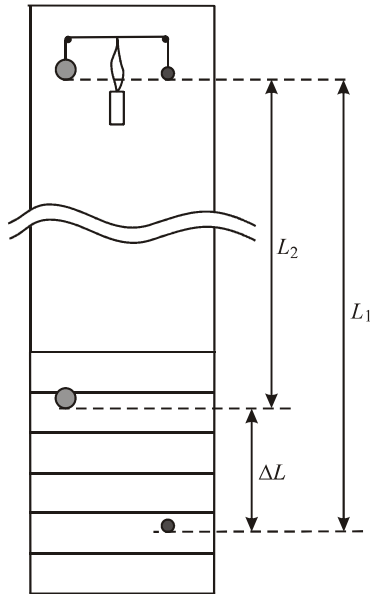


Рис. 3.8

Схема опыта с одновременным падением двух тел

Таблица 3.7. Параметры используемых шариков

шарик	масса $m$ (г)	диаметр $d$ (мм)	$S$ (см <sup>2</sup> )	$\beta$ $10^{-4}$ (кг/м)	$\beta/m$ $10^{-4}$ (м <sup>-1</sup> )
свинцовый (малый)	1,47±0,01	6,2±0,2	0,30±0,02	0,1±0,01	68±7
для пинг-понга	1,75±0,01	37,6±0,2	11,1±0,1	3,61±0,03	2060±30
свинцовый (большой)	25,39±0,01	16,4±0,2	2,11±0,05	0,69±0,02	27±1
деревянный	16,06±0,01	36,6±0,2	10,5±0,1	3,42±0,04	213±3

Прежде всего, выясним, насколько скорость падения маленького свинцового шарика отличается от скорости его падения в вакууме. Скорость падающего свинцового шарика была измерена как описано выше. Погрешность измерения координаты составляла 0,5 см

(с учетом размытости изображения). Таким образом, перемещение шарика между двумя последовательными кадрами (т.е. за 1/25 с) было измерено с точностью 1 см, а погрешность определения скорости составила 0,2 м/с. Полученные результаты для малого свинцового шарика приведены в таблице 3.8 [161, 170].

Видно, что скорость свинцового шарика в пределах погрешности измерения не отличается от скорости, которую он приобрел бы, падая в пустоте. Поэтому время его полета было рассчитано по формуле  $v = \sqrt{2gh}$ . Для большей точности нужно было провести расчет по формуле (3.20), более точной формуле (3.16) или численными методами, как описано в [161, 170, 176, 196].

Таблица 3.8. Результаты измерения скорости свинцового шарика

№	Путь, пройденный шариком $L$ (м)	Измеренная скорость $v$ (м/с)	Вычисленная скорость, (м/с)	Значение скорости без учета сопротивления воздуха, (м/с)
1	2,59±0,01	7,2±0,2	7,11	7,13
2	2,54±0,01	7,1±0,2	7,04	7,06
3	2,52±0,01	7,1±0,2	7,01	7,03

Эксперимент проводился по следующему алгоритму (рис. 3.8.) [170]:

- 1 – измеряем перемещение свинцового шарика от места старта до того места, где его «поймала» фотокамера ( $L_1$ );
- 2 – рассчитываем время полета ( $t_1$ );
- 3 – рассчитываем перемещение второго шарика  $L_2$  за время  $t_1$ ;
- 4 – вычисляем разность  $L_1 - L_2$ ;
- 5 – сравниваем вычисленную разность с измеренной экспериментально.

В таблице 3.9 представлены результаты экспериментов [170]. Точность расчетов численными методами составила 10 мм. В пределах указанной погрешности измерений, вычисленная величина разности координат шариков совпадает с измеренной экспериментально [170].



Таблица 3.9. Результаты эксперимента со свинцовым и пинг-понговым шариками

№	$L_1$ (м)	Время полета, $t$ (с)	$L_2$ (м)	Вычисленная $\Delta L$ (м)	Экспериментальная $\Delta L$ , (м)
1	2,74±0,02	0,750±0,001	2,35±0,01	0,39±0,02	0,41±0,02
2	2,73±0,02	0,749±0,001	2,35±0,01	0,38±0,02	0,40±0,02
3	2,68±0,02	0,742±0,001	2,31±0,01	0,37±0,02	0,35±0,02

Величина разлета шаров получается весьма заметной: 35 – 40 см, так что опыт Галилея в такой постановке позволяет наглядно убедиться в правильности наших расчетов по схеме Эйлера.

Однако, тот факт, что шарик для пинг-понга падает медленнее свинцового, кажется очевидным. Поэтому в работе [170] была проведена еще серия экспериментов, где наблюдалось падение свинцового и деревянного шаров, для которых разница в скорости на глаз неразличима. Для этого высоту падения шаров увеличили до восьми метров. При проведении опыта надо обязательно принять дополнительные меры предосторожности: шарики должны падать на демпфер: пенопласт, песок и т.д., надо следить, чтобы падающий и отскочивший шар не попали в находящихся внизу людей, и чтобы стоящий наверху экспериментатор был застрахован от падения. Результаты второй серии экспериментов представлены в таблице [170].

Таблица 3.10. Результаты эксперимента с падением свинцового и деревянного шариков

№	$L_1$ (м)	Время полета $t$ (с)	$L_2$ (м)	Вычисленная $\Delta L$ (м)	Экспериментальная $\Delta L$ (м)
1	7,16±0,02	1,212±0,001	6,88±0,02	0,28±0,02	0,24±0,02
2	7,25±0,02	1,220±0,001	6,97±0,02	0,28±0,02	0,26±0,02
3	7,45±0,02	1,236±0,001	7,15±0,02	0,30±0,02	0,27±0,02

Видно, что результаты численного расчета прекрасно совпадают с экспериментальными данными.

Такая постановка экспериментов позволяет провести исследовательские работы, связанные с измерением коэффициента лобового сопротивления для тел различных формы. Кроме того,

можно исследовать зависимость силы сопротивления воздуха от типа парашюта [147, 136, 161, 162, 163, 164, 170, 172, 176, 193].

### 3.4.6. Исследование баллистических траекторий

Кроме вертикально движения можно исследовать траектории полета тел, брошенных под углом к горизонту. Заметим, что такие траектории называются *баллистическими* (от греческого «βαλλω» – бросаю, кидаю [23]). Нахождение баллистических траекторий, возможно, является старейшей задачей военной механики. Кроме метания твердых тел можно изучать форму струи воды, направленной под углом к горизонту [233].

Возникает вопрос: существенна ли сила сопротивления воздуха, ведь коэффициент  $\beta/m$  у камня мал? Следует учесть, что, хотя коэффициент  $\beta/m$  мал, скорость метания может быть велика. Оценим для примера силу сопротивления воздуха при выстреле из пневматической винтовки в тире. Примем скорость пули 100 м/с, масса пули типа «Диабло» равна 0,224 г, диаметр – 4,5 мм [176]. Хотя форма пули не строго сферическая, примем коэффициент  $C_x$  равным 0,45 [4, 211]. По формуле (3.7) сила сопротивления равна:  $F = C_x \rho v^2 / 2 \approx 0,04$  (Н).

На первый взгляд, величина небольшая, но сравним ее с весом пули –  $mg \approx 0,002$  (Н). Получается, что сила сопротивления воздуха в 20 раз превышает силу тяжести! Поэтому некоторое недоумение вызывают задачи, когда силой сопротивления воздуха при выстреле предлагают пренебречь [35, 227]. Сразу после выстрела можно, скорее, пренебречь силой тяжести, действующей на пулю, чем силой сопротивления воздуха. Конечно ядро или снаряд тяжелее пули, но и скорость у них несравненно больше, для огнестрельного оружия она больше скорости звука, поэтому сила сопротивления воздуха существенна и для пушечного ядра и для артиллерийского снаряда.

Возникает вопрос, как рассчитать траекторию полета брошенного под углом к горизонту тела? Нужно особо отметить, что если задача расчета вертикального падения тела при наличии сопротивления воздуха, хотя и выходит за рамки школьной программы, но все же имеет решение методами высшей математики, то полет тела под углом к горизонту является классическим примером задачи, не решаемой в аналитическом виде [4, 211]. Школьники могут рассчитать баллистические траектории только путем численного

моделирования как описано в [170, 176].

Если школьники не изучали движения тела, брошенного под углом к горизонту, то начать исследование имеет смысл с самой простой модели – без учета силы сопротивления воздуха [77, 228, 233, 252].

Пусть тело стартует со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 3.9). Найдем параметры траектории и время движения.

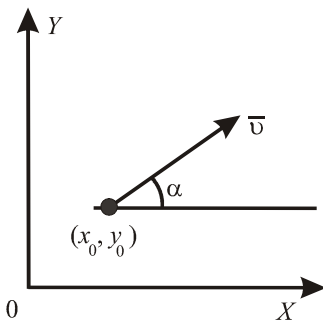


Рис. 3.9

Полет тела под углом к горизонту

Вертикальная составляющая скорости равна  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ , а горизонтальная –  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ .

Как мы уже вычисляли, (см. формулу (3.15), время подъема тела равно времени падения и составляет  $t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ .

Отсюда время полета равно [77, 228, 252]:

$$t_{\text{полета}} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (3.21)$$

Вдоль горизонтальной оси на тело никакие силы не действуют, следовательно, оно будет лететь равномерно прямолинейно, и за это время пролетит расстояние [77, 228, 252]:

$$L = v_0 \cos \alpha (2v_0 \sin \alpha) / g = (2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha) / g. \quad (3.22)$$

Заметим, что в формуле (3.22) для дальности полета в равной степени присутствуют как функция синус, так и функция косинус. Отсюда следует, что дальности полета тел, брошенных под углами  $\alpha$

и  $90^\circ - \alpha$ , одинаковы. поскольку:  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ , а  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .

Отметим, что траектория полета с углом меньшим  $45^\circ$  называется *настильной*, а с углом большим  $45^\circ$  – *навесной* (рис. 3.10).

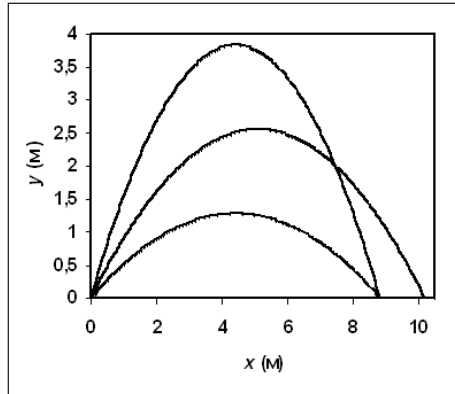


Рис. 3.10

Настильная ( $30^\circ$ ), навесная ( $60^\circ$ ) и оптимальная ( $45^\circ$ ) траектории; начальная скорость – 10 м/с, сопротивления воздуха нет

Вспомяная формулу двойного угла  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ , получим, что дальность полета равна:

$$L = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальное значение синуса равно единице при угле  $90^\circ$ . Следовательно, максимальная дальность полета равна:

$$L_{\max} = v_0^2 / g ,$$

и достигается при угле броска  $45^\circ$  [77, 228, 252].

Здесь можно остановиться и задать ученикам вопрос, не показывает ли опыт другое? Действительно, когда ученики на уроках физкультуры бросают на дальность мяч, то максимальная дальность получается, когда мяч брошен под углом немного меньше  $45^\circ$ . У школьников обычно возникает разумное предположение, что угол

нужно уменьшать из-за сопротивления воздуха. Однако численные расчеты не подтверждают эту гипотезу [176].

Полезно дать возможность школьникам самим выдвинуть гипотезы. Опыт показывает, что гипотезы бывают самыми разными. Среди разумных гипотез – соображения эргономики: может быть дело в том, что бросать под углами  $35^\circ - 40^\circ$ , проще, чем под углом  $45^\circ$ , просто так устроена у человека рука. Но, скорее всего, большинство с такой гипотезой не согласится – они могут с таким же успехом бросить мяч под углом  $45^\circ$ .

Если школьники не догадаются сами, можно им подсказать, что они проводили расчеты для тела, брошенного с *поверхности* земли. А мяч они бросают с высоты своего роста плюс длина согнутой руки, т.е. с высоты примерно два метра [176].

Выдвинутую гипотезу можно проверить экспериментально. Проще всего реализовать полет тела, брошенного под углом к горизонту, с помощью игрушечного пружинного пистолета, стреляющего шариками. При проведении этих экспериментов нужно помнить следующее [176]:

- при выборе пистолета надо следить, чтобы удар по шарiku был центральным, иначе шарик при выстреле получит еще и вращательное движение, которое уже не описывается формулой (3.1);
- чтобы сопротивление воздуха было более заметно, надо, чтобы шарики имели, по возможности, большой размер и малую массу, а скорость вылета из пистолета была, по возможности, больше;
- каждый опыт следует проводить несколько раз, для лучшей воспроизводимости опытов пистолет должен быть закреплен в штативе;
- проводить эксперименты нужно в безветренную погоду или в закрытом помещении.

Для исследования оптимального угла броска даже не нужна фотокамера. Можно закрепить в штативе детский пистолет, стреляющий шариками, похожими на шарики для пинг-понга и произвести несколько выстрелов под разными углами. Дальность в летней школе удобно определять по следу на песке, аналогично тому, как определяют дальность прыжка в длину. В классе можно подкладывать на предполагаемое место падения копировальную бумагу и фиксировать место падения по следу от копирки [176, 178].

Замечание. При выборе пистолета следует убедиться, что шарики при выстреле не закручиваются, для чего нужно нанести на

шарик полосу и посмотреть на фотографиях как ведет себя полоска при выстреле шарика из пистолета.

Эксперимент показывает [176], что когда пистолет располагается на уровне земли, при начальной скорости выстрела 10 м/с, оптимальный угол выстрела составляет  $44^\circ \pm 1^\circ$ . При этом угол вылета определялся по видеозаписи, когда фотокамера крупным планом наводилась на место вылета шарика.

При расположении того же пистолета на высоте 2 м оптимальный угол броска составляет  $39^\circ \pm 1^\circ$ , то есть уже заметно отличается от угла  $45^\circ$ . Таким образом, уменьшение оптимального угла броска происходит по двум причинам, присутствует сопротивление воздуха и мяч бросается не с нулевой высоты. При этом основную роль играет не сопротивление воздуха, а то, что мяч бросают с некоторой высоты [176].

Остается предложить школьникам провести самостоятельно эксперимент: бросить мяч с поверхности земли (например, из окопа). Скорее всего, максимальная дальность будет достигнута при броске под углом  $45^\circ$ . Это опровергнет гипотезу, что изменение оптимального угла связано с устройством человеческой руки, хотя в некоторых случаях, возможность сделать хороший замах играет существенную роль.

Фотокамера позволяет зафиксировать экспериментальную баллистическую траекторию [170, 176]. Для этого нужно использовать пистолет, стреляющий шариками для пинг-понга, поместить фотокамеру на большом расстоянии и снять траекторию полета полностью. Начальную скорость шарика при этом можно определять по первым кадрам. Правда, точность при этом будет существенно меньше, чем в случае, когда камера наведена на пистолет крупным планом. Можно было бы сначала определить скорость выстрела, наведя фотокамеру на пистолет крупным планом, но опыт показывает, что разброс начальной скорости шарика достаточно велик (более 10%), и для достижения большой точности, скорость нужно определять при каждом выстреле.

Поэтому желательно работать одновременно с двумя фотокамерами – одну навести на место старта и максимально точно измерять скорость вылета, а второй отслеживать траекторию полета. Для определения масштаба за пистолетом можно поместить лист ватмана с координатной сеткой.

В работе [170] шарик выстреливали вдоль белой стены, которая служила экраном. Чтобы шарик был хорошо виден на фоне

светлой стены, его окрашивали в синий цвет. Высота крепления пистолета в штативе составляла примерно один метр. Видеокамеру располагали на расстоянии примерно 12 метров от стены, что позволяло отслеживать всю траекторию полета. При этом использовали пистолет стреляющий шариками, похожими на шарики для пинг-понга. Параметры шариков приведены в таблице 3.11 [170].

Таблица 3.11. Параметры шарика для детского пистолета

Масса $m$ (г)	Диаметр $d$ (см)	$S$ ( $\text{см}^2$ )	$\beta$ $10^{-4}$ (кг/м)	$\beta/m$ ( $\text{м}^{-1}$ )
$3,13 \pm 0,01$	$3,48 \pm 0,02$	$9,5 \pm 0,1$	$3,1 \pm 0,1$	$0,100 \pm 0,003$

По первым трем кадрам оцифрованной видеозаписи определяли проекции начальной скорости. По измеренным значениям скорости численными методами рассчитывали баллистическую траекторию шарика как описано в [170].

Для примера на рис. 3.11 представлены результаты одного из подобных экспериментов [170]. Координаты шарика с оцифрованных кадров нанесены в виде треугольников. Вычисленная по схеме Эйлера траектория (кривая 1) изображена сплошной линией. Для сравнения на рисунке приведена траектория полета тела с теми же начальной скоростью и углом, но без учета сопротивления воздуха (кривая 2). Основную погрешность в расчеты по схеме Эйлера вносят погрешности определения проекций начальной скорости тела.

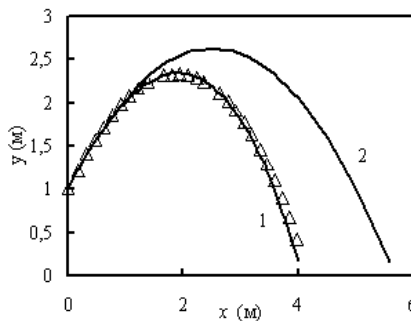


Рис. 3.11

Траектория движения тела с начальными параметрами:

$$v_x=4,4 \text{ м/с}, v_y=5,9 \text{ м/с}, v=7,4 \text{ м/с}, \alpha=55^\circ$$

1 – с учетом сопротивления, 2 – без учета сопротивления воздуха

Из рис. 3.11 видно, что численный расчет прекрасно согласуется с экспериментальными данными, и что баллистическая траектория существенно отличается от идеальной в отсутствие сопротивления воздуха.

Для примера приведем еще результаты расчета численными методами баллистических траекторий для больших скоростей, тогда сила сопротивления воздуха будет более заметной [170, 176, 196]. Проще всего воспользоваться знакомой мушкетной пулей с уже вычисленным значением  $\beta/m$ . Чтобы можно было пользоваться формулой (3.7), возьмем начальную скорость меньше скорости звука – 300 м/с.

Для расчета запишем II-ой закон Ньютона с учетом силы сопротивления воздуха:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{F}_{\text{сопротивл}} = m\bar{g} - \beta\bar{v}|\bar{v}|.$$

Отсюда можно определить проекции ускорений на горизонтальную ( $x$ ) и вертикальную ( $y$ ) оси:

$$a_x = -\beta v_x v/m, \quad a_y = -g - \beta v_y v/m,$$

где  $v$  – модуль скорости тела.

Выберем угол броска –  $45^\circ$ . Чтобы наглядно представить, насколько несимметрична получившаяся баллистическая кривая, построим на том же графике траекторию полета тела, брошенного под тем же углом  $45^\circ$ , но с меньшей скоростью в отсутствие сопротивления воздуха, так, чтобы точки старта и финиша совпали.

Рассчитанные численным методом баллистическая и параболическая траектории приведены на рис. 3.12.

Угол падения пули составляет:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{74,09}{19,45} = 3,81; \quad \operatorname{arctg}(3,81) = 1,31 \text{ (рад)} = 75,3^\circ.$$

Следует обратить внимание школьников, что если увеличить угол стрельбы, то пули или ядра будут падать почти вертикально [176, 196].

При наличии времени можно дать краткую историческую справку. Форму траектории полета ядра изучал в XIV в. Альберт Саксонский. Он описал траекторию полета пушечного ядра, исходя из теории импетуса (первоначального толчка). Пушечное ядро, получив большой импетус, сначала летит по прямой линии. По мере



ослабления импульса, собственная тяжесть ядра заставляет его устремляться к центру Земли, поэтому траектория изгибается, и, когда импульс полностью кончится, то ядро вертикально устремляется вниз...[255]

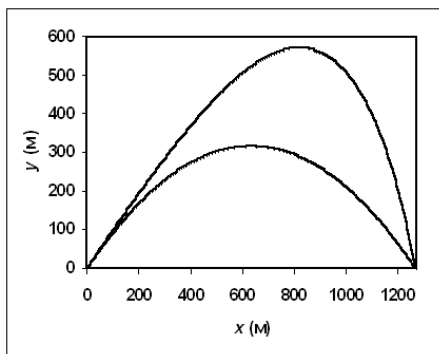


Рис. 3.12.

Баллистическая (сверху) и идеальная траектории, угол броска  $45^\circ$ .

Если подойти к этому тексту с ограниченными знаниями, что тела летят по параболе, то можно посчитать эти наблюдения полной ерундой. Но, исследовав формы баллистических траекторий, можно только удивиться точности наблюдения ученого XIV в. Можно обратить внимание школьников как это знание использовали в средние века. Если стрелять по крепости под малыми углами по настильным траекториям, то пули и ядра не могут достать защитников крепости непосредственно за стеной. Если же стрелять по навесным траекториям, то падающие почти вертикально ядра даже вблизи стены не дадут защитникам покоя [170, 176].

В целом, это расчеты актуальны и для современной артиллерии, хотя скорости снарядов, конечно, превышают скорость звука. Пушки дальнобойной артиллерии наклоняют под углами меньше  $45^\circ$  — так больше дальность стрельбы. С другой стороны, гаубицы для поражения целей, находящихся за высокими укреплениями или углубленных в землю, стреляют под углами больше  $45^\circ$ . В результате сопротивления воздуха угол падения снаряда оказывается больше угла выстрела, приближаясь к вертикальному падению [170, 176].

### 3.4.7. Аналитическое решение задачи о максимальной дальности полета в отсутствии сопротивления воздуха

При наличии времени и желании школьников можно аналитически решить задачу о нахождении оптимального угла полета при броске с высоты  $h_0$  в отсутствие сопротивления воздуха аналитически. Эта задача приводится в сборниках задач повышенной сложности: задача №45 из [17], №1.3.13 из [57], №1.278 из [227] и др... Она не простая, но у школьников 9-го класса достаточно знаний для ее решения.

Начать нужно со вспомогательной задачи.

#### Задача.

На возвышении стоит катапульта, которая должна поразить цель на расстоянии  $L$ . Пусть скорость вылета камня равна  $v_0$ , а высота возвышенности (вместе с высотой катапульти) равна  $h_0$ . Под каким углом нужно метнуть камень, чтобы поразить цель?

Для решения воспользуемся формулами для движения тела, брошенного под углом к горизонту (3.21) – (3.22). Вдоль оси  $x$  движение будет равномерным, а вдоль оси  $y$  – равноускоренным:

$$\begin{aligned}x &= v_{0x} t = v_0 t \cos \alpha ; \\y &= h_0 + v_{0y} t - gt^2 / 2 = h_0 + v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2 .\end{aligned}$$

Поскольку время полета нас сейчас не интересует, то выразим время из первого уравнения:  $t = x / (v_0 \cos \alpha)$ , и подставим во второе:

$$y = h_0 + x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = h_0 + x \operatorname{tg} \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} .$$

Получается квадратный трехчлен, что еще раз подтверждает, что траектория движения – парабола, поскольку зависимость типа  $y = Ax^2 + Bx + C$  задает параболу [116, 228, 233, 252].

По условию, камень должен поразить цель на расстоянии  $L$ , т.е. когда он достигнет поверхности и его координата  $y$  будет равна нулю, координата  $x$  при этом должна быть равна  $L$ :

$$0 = h_0 + L \operatorname{tg} \alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} . \quad (3.23)$$

Получилось уравнение относительно  $\alpha$ .

До уравнения (3.23) школьники могут додуматься самостоятельно, но вряд ли они смогут его решить. На этом этапе им полезно дать подсказку: пусть они преобразуют выражение:  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \quad (3.24)$$

Теперь понятно, как избавиться от функции «косинус» в (3.23):

$$\begin{aligned} 0 &= h_0 + L \operatorname{tg} \alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = h_0 + L \operatorname{tg} \alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \\ &= h_0 - \frac{L^2 g}{2v_0^2} + L \operatorname{tg} \alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Получается квадратное уравнение относительно  $\operatorname{tg} \alpha$ . Преобразуем к более знакомому виду [176, 196]:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{Lg} \operatorname{tg} \alpha - h_0 \frac{2v_0^2}{L^2 g} + 1 = 0.$$

Теперь можно записать решение квадратного уравнения [17, 57]:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{Lg} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{L^2 g^2} + h_0 \frac{2v_0^2}{L^2 g} - 1} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 + 2v_0^2 g h_0 - L^2 g^2}}{Lg}. \quad (3.25)$$

Проанализируем полученный ответ. Прежде всего, заметим, что при  $h_0 = 0$  формула (3.25) примет вид:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - L^2 g^2}}{Lg}.$$

Если величина под корнем (дискриминант) отрицательна, т.е.  $v_0^4 < L^2 g^2$ , то решения не существует. Этот результат мы уже получили раньше – мы доказали, что при броске с поверхности земли максимальная дальность полета равна:  $L = v_0^2 / g$ .

При  $L = v_0^2 / g$  существует единственный корень:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - L^2 g^2}}{Lg} = \frac{v_0^2}{Lg} = 1.$$

Этот результат мы также получили раньше. Максимальная дальность полета достигается при угле броска  $45^\circ$ , т.е. при  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  [77, 228, 252].

Если же величина выражения под корнем положительна, т.е.  $v_0^4 > L^2 g^2$ , то существуют два решения. Этот результат мы тоже получили раньше, если бросить тела под углами  $\alpha$  и  $90^\circ - \alpha$ , то тела улетят на одинаковые расстояния.

Далее можно перейти к анализу формулы (3.25) для броска тела с высоты  $h_0$ . Здесь тоже возможны три случая. Если расстояние  $L$  мало, так что  $L^2 g^2 < v_0^4 + 2v_0^2 gh_0$ , то выражение под корнем больше нуля, и существует два угла, под которыми можно метнуть тело, чтобы поразить цель. Если расстояние  $L$  велико, так что  $L^2 g^2 > v_0^4 + 2v_0^2 gh_0$ , то выражение под корнем меньше нуля, и цель не может быть поражена ни при каком угле метания камня. Значит, максимальная дальность метания камня  $L_{\max}$  соответствует третьему случаю: когда существует единственное решение и значение под корнем равно нулю:  $L_{\max}^2 g^2 = v_0^4 + 2v_0^2 gh_0$ , т.е. максимальная дальность полета камня равна [176, 196]

$$L_{\max} = \frac{\sqrt{v_0^4 + 2v_0^2 gh_0}}{g} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}. \quad (3.26)$$

и достигается при угле броска, который можно найти из формулы (3.25) [17, 57, 227]:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{v_0^2}{L_{\max} g} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}. \quad (3.27)$$

Получив формулу, можно проверить результаты наших вычислений с экспериментом для бросания тела с высоты 2 м со скоростью 10 м/с. В работе [176, 196] получилось, что оптимальный угол броска равен  $39^\circ \pm 1^\circ$ .

Подставим приведенные данные в формулы (3.26) и (3.27)

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}} = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 2 \cdot 9,815 \cdot 2}} = 0,847;$$

$$\operatorname{arctg}(0,847) = 0,703 \text{ (рад)} = 40,2^\circ.$$

То, что эксперимент дает чуть меньший угол объясняется сопротивлением воздуха. Данное обстоятельство подтверждается расчетом численными методами как описано в [170, 176, 196].

### 3.4.8. Исследование затухающих колебаний маятника

В качестве темы исследовательской работы можно предложить исследовать затухающие колебания. Рассмотрим простейший пример затухания математического маятника в воздухе [4, 176, 211].

Выберем оси координат как для обычного математического маятника (рис. 3.13).

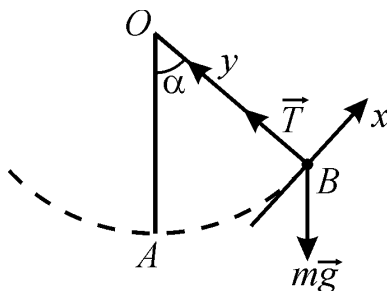


Рис. 3.13. К расчету движения математического маятника

Только раньше ускорение вдоль оси  $x$  определялось только проекцией силой тяжести (проекция силы натяжения равна нулю):

$$a_x = -g \sin \alpha.$$

Теперь же у нас появилась сила сопротивления воздуха, и ускорение будет равно:

$$a_x = -g \sin \alpha - \beta v |v| / m.$$

Следует обратить внимание учеников, что запись с модулем скорости необходима для учета того факта, что маятник может

двигаться как налево, так и направо, и сила сопротивления должна препятствовать движению в обе стороны.

Движение маятника может быть рассчитано численными методами. Результаты расчетов приведены на рис. 3.14 [176].

Получается убывающая кривая, похожая на «синусоиду». Заметим, что, строго говоря, эта функция не является периодичной, но при малом затухании колебания называют *квазипериодичными* от латинского «квази» – «как бы». Можно выделить условный период – время одного качания маятника, т.е. когда маятник возвращается в положения максимального отклонения. Можно определить период как время между прохождениями положения равновесия, но при этом следует помнить, что за период маятник дважды проходит через положение равновесия. Заметим, что период хотя и не сильно, но зависит от коэффициента затухания – чем больше отношение  $\beta/m$ , тем больше период качания маятника и тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний.

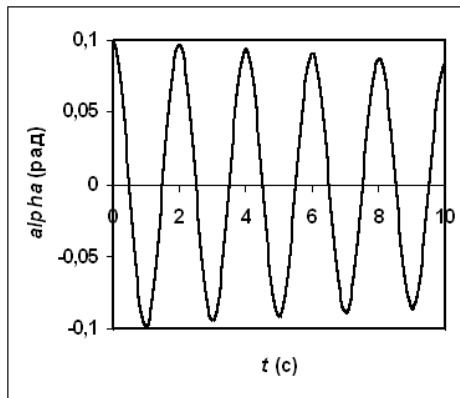


Рис. 3.14. Затухающие колебания маятника

Расчеты можно проверить экспериментально. При проведении эксперимента следует иметь в виду, что затухание вызвано не только силой сопротивления воздуха, но и деформацией нити в месте крепления, поэтому коэффициент  $\beta/m$  должен быть достаточно большим. Поэтому лучше брать шарик для пинг-понга или воздушный шарик. Опыт показывает, что лучше использовать бифилярный подвес. Наведя фотокамеру в нижнюю точку траектории, можно исследовать зависимость координаты от времени [176].

Кроме затухания в воздухе, можно исследовать затухающие колебания в воде, масле, глицерине др. жидкостях. Кроме того, можно исследовать затухающие колебания пружинного маятника.

Заметим, что если коэффициент  $\beta/m$  достаточно большой, то колебания вообще не возникнут (рис. 3.15) [176].

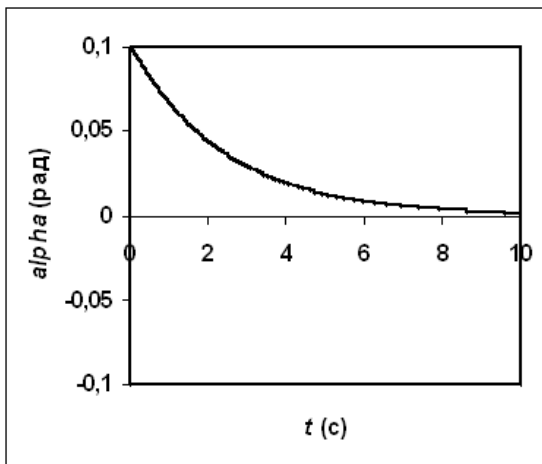


Рис. 3.15  
Затухающие колебания маятника в глицерине

Можно также предложить школьникам самостоятельно определить при каких условиях начнутся колебания, а при каких – их не будет. Для изменения коэффициента  $\beta/m$  можно разводить глицерин водой как описано в [170], или брать масла с разной вязкостью.

### 3.4.9. Возможные направления исследовательских работ

Приведенные примеры, конечно не описывают все направления исследований движения в вязкой среде. Можно предложить еще много возможных направлений.

1) Исследование зависимости силы сопротивления воздуха от формы тела. Здесь для школьников будет неожиданным резкое

уменьшение силы сопротивления для тел каплевидной формы по сравнению с телами сферической формы, так же неожиданным будет то, что у тел каплевидной формы при падении острым концом вниз сила сопротивления будет больше, чем при падении тупым концом вниз [4, 211, 136]).

2). Исследование затухающих колебаний связанных маятников, когда один или несколько маятников погружены в вязкую жидкость [176].

3) Исследование зависимости силы сопротивления от свойств среды, например, вязкости глицерина от температуры, количества добавленной воды и др. Вязкость можно измерять по времени падения шариков или путем увлечения неподвижного цилиндра, диска или пластины, подобно тому, как это делал Ньютон [4, 211].

4) Исследование «крученных» мячей. Выше мы обсуждали необходимость следить, чтобы мяч после вылета из пистолетика не крутился. Можно, напротив, сделать интересную исследовательскую работу рассматривая движение «крученных» мячей, где будет действовать дополнительная сила, которая в первом приближении может быть получена из уравнения Бернулли [4, 211]. Можно также рассмотреть сложные движения легких цилиндров после их скатывания с наклонной плоскости – Эффект Магнуса [4, 65, 136, 211].

5) Исследование полета бумеранга. Полет бумеранга является эффектным зрелищем, привлекающим внимание школьников. Сделав определенные модельные предположения о зависимости подъемной силы от скорости, можно рассчитать полет бумеранга как указано в работах [164, 166]. Заметим, что в указанных работах для расчета полета бумеранга необходимо учитывать прецессию волчка.



## **Глава 4.**

# **Исследование скатывания тел по наклонной плоскости**

### **4.1. Опыт Галилея с наклонной плоскостью**

Скатывание шарика по наклонной плоскости является прекрасным способом продемонстрировать равноускоренное движение. Простота оборудования, возможность в широких пределах менять величину ускорения, наглядность и хорошее согласование экспериментальных данных с теорией, позволяет использовать скатывание шарика по наклонной плоскости и как прекрасную демонстрацию и как фронтальную лабораторную работу.

Указанный эксперимент можно проводить с полым цилиндром (например, кольцом от обоймы подшипника), сплошным цилиндром (например, деревянным цилиндром из набора детских кубиков), шариком и др. телами вращения. Заметим, что при использовании шарика нужно предпринимать специальные меры, чтобы шарик при движении двигался по прямой, а не съезжал вбок.

При подготовке эксперимента школьникам полезно дать историческую справку, что именно благодаря эксперименту со скатыванием шарика по наклонной плоскости Галилею удалось продемонстрировать равноускоренный характер движения при падении тел [31, 83]. При этом он сконструировал специальный наклонный желоб, чтобы шарик не при движении не съезжал вбок.

Для предотвращения отклонения шарика от прямой можно использовать две сложенные уголком длинные линейки, но проще использовать разборный короб для укладки электрических проводов. Угол наклона задается с помощью обычного лабораторного штатива. Если не требуется большой точности, то можно обойтись ручным секундомером, но более точные результаты дает использование фотокамеры [186].

Заметим, что брать очень маленькие углы нежелательно, поскольку тогда большой вклад в погрешность могут внести малейшие неровности поверхности, прогиб, наличие силы трения качения и др.

Несмотря на свою простоту, данный эксперимент имеет существенные недостатки. Во-первых, поскольку сила трения качения в школе обычно не изучается, ее влияние нельзя даже примерно

оценить и приходится ею просто пренебрегать. Во-вторых, если школьники не знают динамики вращательного движения, то они не могут рассчитать ускорение как функцию угла наклона плоскости.

Впрочем, второй недостаток можно обратить в достоинство работы. Можно предложить провести эксперимент, убедиться в равноускоренности движения шарика и рассчитать ускорение как функцию угла наклона. Наверняка найдутся школьники, которые захотят «подогнать» полученное значение ускорения к  $g \sin \alpha$ . Хотя вследствие вращения ускорение будет меньше. Рассчитаем его в предположении, что нет проскальзывания.

Рассмотрим тело (шар, цилиндр или др. тело вращения) массы  $m$  и моментом инерции  $I$ , катящийся по наклонной плоскости как показано на рис. 4.1 [186].

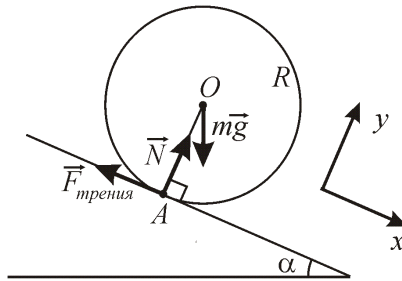


Рис. 4.1  
К решению задачи о скатывающемся шаре

Проще всего найти ускорение тела, записав основное уравнение динамики вращательного движения относительно мгновенной оси  $A$ . Моменты сил трения и реакции опоры равны нулю, а момент силы тяжести равен:  $mg \sin \alpha$ . Тогда основное уравнение динамики вращательного движения запишется в виде:

$$mgR \sin \alpha = I_A \varepsilon, \quad (4.1)$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение цилиндра относительно мгновенной оси вращения, а  $I_A$  – момент инерции тела относительно мгновенной оси, проходящей через точку  $A$  [186]. По теореме Гюйгенса-Штерна  $I_A = I_0 + mR^2$ , где  $I_0$  – момент инерции тела относительно центра масс. Отсюда:

$$\varepsilon = \frac{mgR \sin \alpha}{I_0 + mR^2}.$$

Ускорение центра тела (точка  $O$ ) равно:

$$a = \varepsilon R = \frac{mgR^2 \sin \alpha}{I_0 + mR^2}. \quad (4.2)$$

Подставим в (4.2) значения  $I_0$ :

– для шара –  $I_0 = 2mR^2 / 5$ ,  $a = \frac{5}{7} g$  ;

– для однородного цилиндра –  $I_0 = mR^2 / 2$ ,  $a = \frac{2}{3} g$  ;

– для тонкостенного цилиндра –  $I_0 = mR^2$ ,  $a = \frac{1}{2} g$  ;

Из формулы (4.2) видно, что ускорение катящегося тела меньше ускорения поступательно движущегося тела, например, соскальзывающего по наклонной плоскости кубика при малой силе трения скольжения. Этот факт легко проверить экспериментально без фотокамеры, пустив по наклонной плоскости одновременно шарик, однородный цилиндр, тонкостенный цилиндр (кольцо) и кубик (или игрушечный автомобиль с небольшими по сравнению с массой автомобиля колесами). При малой силе трения кубик должен прийти первым. При проведении этого опыта не следует делать очень большой наклон, иначе шарик может не скатываться, а проскальзывать, что приведет к увеличению ускорения.

Используя основное уравнение динамики вращательного движения можно найти также силу трения между телом и наклонной плоскостью:

$$F_{\text{трения}} = mg \sin \alpha - ma = mg \sin \alpha \left( 1 - \frac{mR^2}{mR^2 + I} \right) = mg \sin \alpha \frac{I}{mR^2 + I}.$$

Поскольку максимальное значение силы трения покоя  $\mu mg \cos \alpha$ , где  $\mu$  – коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью, то проскальзывание будет при условии:

$$mg \sin \alpha \frac{I}{mR^2 + I} > \mu mg \cos \alpha.$$

Отсюда получаем условие, что проскальзывание будет при углах:

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \mu \frac{mR^2 + I_0}{I_0}. \quad (4.3)$$

Подставим в (4.3) значения  $I_0$ :

- для шара –  $I_0 = 2mR^2/5$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_{\text{шара}} = \mu(1+5/2) = 3,5\mu$ ;
- для однородного цилиндра –  $I_0 = mR^2/2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_{\text{цилиндра}} = \mu(1+2) = 3\mu$ ;
- для кольца –  $I_0 = mR^2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_{\text{кольца}} = \mu(1+1) = 2\mu$ .

Заметим, что кубик начнет соскальзывать при  $\operatorname{tg} \alpha = \mu$ .

Таким образом, если, например, коэффициент трения  $\mu = 0,5$ , то:

- кубик начнет скользить при угле примерно  $\operatorname{arctg}(0,5) \cong 26,6^\circ$ ;
- тонкостенный цилиндр (кольцо) –  $\operatorname{arctg}(2 \cdot 0,5) = \operatorname{arctg}(1) \cong 45^\circ$ ;
- однородный цилиндр –  $\operatorname{arctg}(3 \cdot 0,5) = \operatorname{arctg}(1,5) \cong 56^\circ$ ;
- шар –  $\operatorname{arctg}(3,5 \cdot 0,5) = \operatorname{arctg}(1,75) \cong 60^\circ$ .

Важно подчеркнуть, что при проскальзывании тело будет двигаться не только поступательно, но и вращаться с угловым ускорением:

$$\varepsilon_0 = F_{\text{трения}} R / I = \mu g \cos \alpha \frac{mR}{I}. \quad (4.4)$$

Используя фотокамеру, можно исследовать, насколько хорошо выполняются формулы (4.2) – (4.3). Нанеся на скатывающийся шарик полосу, можно также проверить правильность формулы (4.4).

При использовании в качестве наклонной плоскости короба для проводов, следует также учитывать расстояние между стенками (см. рис. 4.2. [186]).

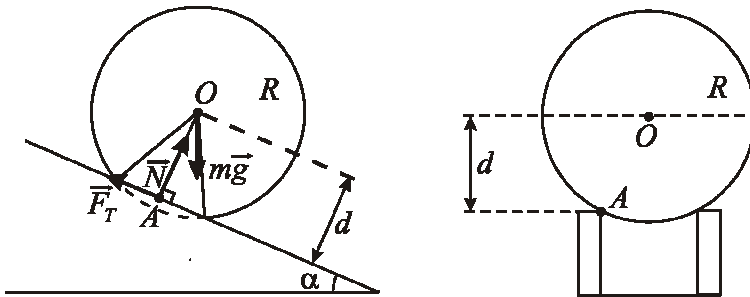


Рис. 4.2. Скатывание шара по коробу, слева – вид сбоку, справа – вид с фронта

Обозначим расстояние от оси вращения до наклонной плоскости –  $d$ . Тогда основное уравнение динамики вращательного движения запишется в виде:

$$mgd \sin \alpha = I_1 \varepsilon = I_1 a / d = (2mR^2 / 5 + md^2) a / d ,$$

где  $I_1$  – момент инерции шара относительно точки А.

Отсюда получаем ускорение центра шарика [186]:

$$a = \frac{mgd^2 \sin \alpha}{2mR^2 / 5 + md^2} . \quad (4.5)$$

Имея набор коробов, можно провести исследование зависимости ускорения шарика не только от угла, но и от расстояния между стенками короба.

Можно предложить школьникам исследовать движение шара при игре в *боулинг*. В боулинге запущенный шар вначале движется почти поступательно, скользя по дорожке и постепенно набирая угловую скорость. При расчетах следует учесть, что часть дорожки может для лучшего скольжения покрываться маслом. Кроме того, шар для игры в боулинг не является однородным, в чем можно убедиться, измерив (например, с помощью трифилярного маятника) момент инерции относительно разных осей [186].

Если школьникам представляется, что изучение движения шарика по прямой – слишком просто для исследовательской работы, то можно предложить изогнуть короб и исследовать движение шарика по окружности. Движение шарика при этом будет происходить по гармоническому закону подобно математическому маятника. Период качания такого маятника будет зависеть от радиуса шарика и радиуса кривизны короба. Можно использовать поверхности других форм, на чем подробнее остановимся ниже.

## 4.2. Задача Бернулли «брахистохронос»

Удобной задачей для проведения исследовательских работ со школьниками является классическая задача «брахистохронос» (от греч. *βραχιστος* – краткий и *χρονος* – время [23]), сформулированная в 1694 г. Иоганном Бернулли (1667-1748). Эта задача удовлетворяет всем условиям, необходимым для проведения исследовательских работ со школьниками [187]:

- задача имеет простую формулировку, доступную для учеников 7-9 классов;
- задача не имеет очевидного решения (иначе ее было бы не интересно решать);
- задача имеет известное решение, полученное методами высшей математики;
- задача может быть решена численно, причем для реализации численных алгоритмов не обязательно знание языков программирования;
- решение может быть проверено экспериментально, причем для проведения эксперимента не требуется специального дорогостоящего оборудования.

Формулировка задачи. Задача «брахистохронос» может быть сформулирована следующим образом.

Пусть имеются две точки в вертикальной плоскости. По какой траектории нужно двигаться из первой точки, чтобы достичь второй за кратчайшее время? Движение происходит под действием силы тяжести без начальной скорости, без учета силы трения.

Задачу «брахистохронос» решили разными методами Якоб Бернулли, Готфрид Лейбниц и Гийом Лопиталь и все они получили, что искомая кривая – циклоида [21].

Поскольку школьники не могут решить задачу «брахистохронос» аналитически, то можно предложить им найти форму кривой с помощью компьютерного моделирования. Форма кривой ищется в виде полинома  $N$ -й степени:

$$y = f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_Nx^N, \quad (4.6)$$

как описано в [187].

Для численного расчета времени движения кривая разбивается на множество отрезков, которые можно считать прямыми, а движение по отрезкам – равноускоренное. При этом можно рекомендовать следующий алгоритм (рис. 4.3) [187].

Пусть движение начинается из точки  $A$  с координатами  $(L, H)$  и заканчивается в точке  $B$  с координатами  $(0, 0)$ . Тогда в (4.6) коэффициент  $A_0 = 0$ . Обратим внимание, что граничное условие:

$$H = A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 + \dots + A_NL^N \quad (4.7)$$

оставляет независимыми только  $N-1$  коэффициентов  $A_i$ .

Разобьем отрезок  $BC$  на большое число  $N$  отрезков длиной  $\Delta x = L/N$ . Рассмотрим первый отрезок, по которому движется тело. Координаты концов этого отрезка равны:  $(L - \Delta x, f(L - \Delta x))$  и  $(L, f(L))$ . Вычислив координаты  $x$  и  $y$ , можно найти длину отрезка  $|AD| = \Delta l$ , его угол наклона  $\alpha$ , и ускорение движущегося тела:  $a = g \cdot \sin \alpha$ . Тогда из формулы равноускоренного движения время движения тела на первом отрезке будет равно:

$$\Delta t = \sqrt{2\Delta l/a}, \quad (4.8)$$

скорость в конце отрезка будет равна:  $v = a \Delta t$ .

Движение по  $i$ -му отрезку длиной  $\Delta l_i$  займет время:

$$\Delta t_i = \frac{\sqrt{2a_i \Delta l_i + v_i^2} - v_i}{a_i}, \quad (4.9)$$

скорость в конце отрезка будет равна:

$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t_i.$$

Следует иметь в виду, что школьники 7-го класса еще не знают квадратных уравнений, и формула (4.8) может оказаться слишком сложной [187]. Поэтому время движения можно считать приближенно по формуле равномерного движения:

$$\Delta t_i = \Delta l_i / \Delta v_i. \quad (4.10)$$

При малых значениях  $\Delta l_i$  расчеты по формулам (4.9) и (4.10) дают практически одинаковые значения за исключением первого участка пути, когда начальная скорость равна нулю, и для вычисления времени движения нужно пользоваться формулой (4.8) [187].

Рассчитать время движение по формулам (4.8) – (4.10) можно с помощью любого языка программирования, однако, поскольку школьники редко умеют программировать, это можно сделать с помощью электронной таблицы *MS Excel* или ее аналога в *Open Office* как описано в [187].

Рассмотрим время спуска для некоторых случаев.

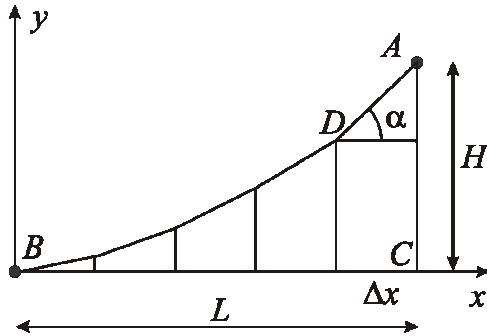


Рис. 4.3  
Пояснение к расчету времени спуска

Прежде всего, убедимся, что прямой путь – самый короткий, но не всегда самый быстрый, кроме того оценим необходимую точность эксперимента. Пусть, например, точка  $B$  находится на 0,5 м ниже и на 1 м левее точки  $A$ . Тогда длина пути равна:

$$\Delta l = \sqrt{1^2 + 0,5^2} = 1,1180 \text{ (м)}.$$

Синус угла наклона равен:

$$\sin \alpha = H / \Delta l = 0,5 / 1,1180 = 0,44721.$$

Ускорение равно:

$$a = g \cdot \sin \alpha = 4,3827 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Отсюда получим время спуска по прямой:

$$t = \sqrt{2\Delta l / a} = 0,71429 \text{ (с)}.$$

Пусть теперь тело движется из  $A$  в  $B$ , по дуге окружности, точка  $B$  является нижней точкой окружности (см. рис. 4.4 [187]). Соскальзывание тела будет эквивалентно колебанию математического маятника. Для рассматриваемой задачи длина маятника составит 1,25 м. Период такого маятника равен:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} = 6,28\sqrt{1,25/9,815} = 2,24114 \text{ (с)}.$$

Движение маятника из  $A$  в  $B$  составит четверть периода или 0,56 с. Здесь, правда, необходимо учесть, что угол отклонения маятника не мал. Использование более точной формулы (2.4) или расчеты численными методами дают результат – 0,59 (с), что все равно меньше времени движения по прямой [187].



При наличии времени можно дать школьникам историческую справку, что еще Галилей доказал, что движение по хорде  $AB$  займет больше времени, чем по дуге  $AB$ . Правда, Галилей ошибся, считая, что это будет самый быстрый путь [31, 83].

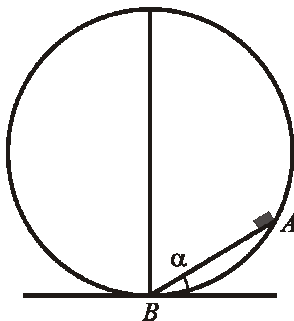


Рис. 4.4  
Спуск по прямой и по дуге окружности

Следующий этап имеет наибольший интерес с точки зрения развития исследовательских способностей школьников. Нужно предложить школьникам подобрать форму короба, чтобы при фиксированных точках начала и конца траектории получить минимальное время движения. Кроме того, можно организовать две или больше команд, и устроить соревнование: кто найдет кривую с наименьшим временем спуска.

Задача «брахистохронос» имеет точное теоретическое решение: кривая наискорейшего спуска – это циклоида [21]. Ответ приходится давать без доказательства, поскольку он требует знаний высшей математики. Но можно численными методами вычислить время спуска по циклоиде и сравнить его со временем спуска по дуге и хорде как описано в [187].

Циклоида – это линия, которую описывает точка закрепленная на ободе катящейся окружности. Она задается параметрически в виде:

$$\begin{aligned} x &= L - R\varphi + R \sin \varphi; \\ y &= H - R(1 - \cos \varphi), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $R$  – радиус катящейся окружности, а параметр  $\varphi$  – угол поворота этой окружности [116]. В уравнении (4.11) учтено граничное условие,

что угол  $\varphi = 0$  соответствует точке  $A$  с координатами  $(L, H)$ . Для нахождения радиуса окружности нужно использовать второе граничное условие [187]:

$$\begin{aligned}0 &= L - R\varphi_1 + R \sin \varphi_1 ; \\0 &= H - R(1 - \cos \varphi_1) .\end{aligned}\quad (4.12)$$

Преобразуя получившуюся систему уравнений (4.12) получаем:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \arccos(1 - H / R) ; \\0 &= L - R \arccos(1 - H / R) + R \sin(\arccos(1 - H / R)) .\end{aligned}\quad (4.13)$$

Полученная система уравнений имеет трансцендентные корни, которые могут быть вычислены численно с помощью электронной таблицы или компьютерной программы, как описано в [187]. В рассматриваемых условиях задачи ( $L = 1$  м,  $H = 0,5$  м) решение системы (4.13) дает результат:  $R = 0,25865$  м,  $\varphi_1 = 3,5094$  рад. На рис. 4.5 представлен вид циклоиды для указанных значений  $L$  и  $H$  [187].

Расчет численными методами времени спуска по циклоиде дает  $0,570$  с, что на  $0,02$  с меньше времени движения по дуге [187]. Время движения вращающегося шарика будет чуть больше, чем поступательно движущегося тела, но порядок величин от этого не меняется.

Таким образом предварительный анализ показывает, что для экспериментального решения задачи «брахистохронос» необходимо иметь возможность фиксировать время с точностью до сотых долей секунды.

Для проведения экспериментов потребуется  $1,5 - 2$  м гибкого короба для укладки проводов, подходящего размера шарик и лабораторные штативы. Зажимая короб в нескольких точках в штативах, можно получить нужную форму кривой. Чтобы закрепить короб в нескольких точках удобно просверлить в его дне несколько дырок, продеть в них нитки и закрепить нитки в штативах [187].

При расчете времени спуска тела следует учитывать вращение шарика, пересчитывая его время движения на время поступательного движения тела.

При проведении эксперимента следует иметь в виду следующие обстоятельства:

- короб имеет ограниченную гибкость и может не позволить реализовать необходимый радиус кривизны;
- циклоида вблизи точки  $A$  образует большой угол наклона, а при большом угле наклона короба шарик может двигаться с

проскальзыванием, что внесет погрешность в определение истинного времени движения тела по кривой «брахистохрон».

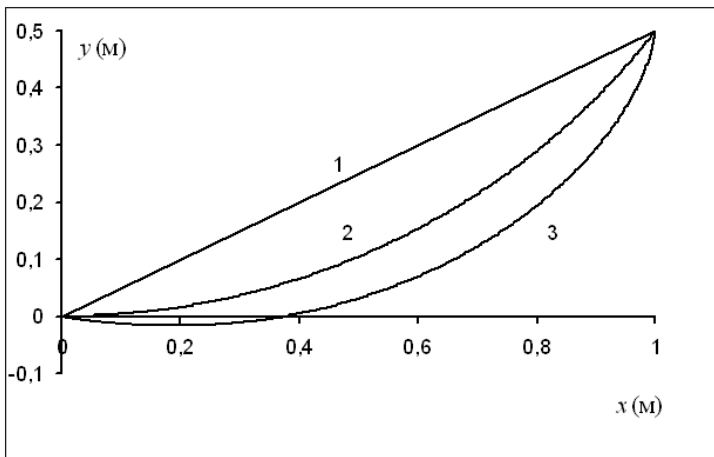


Рис. 4.5  
Траектории спуска: 1 – прямая, 2 – окружность, 3 – циклоида

Заметим, что в этих экспериментах фотокамера выполняет одновременно три функции: с ее помощью можно определить время движения, можно проверить отсутствие проскальзывания шарика и, кроме того, она позволяет зарегистрировать форму дорожки [187].

Рассмотрев несколько направлений исследовательских работ, связанных с движением тел, перейдем к исследованию статических объектов.

## Глава 5.

### Использование фототехники при исследовании статических объектов

#### 5.1. Исследование объектов больших размеров (на примере радуги)

При работе с неподвижными объектами видеорежим уже не нужен, и мы обратимся к экспериментам, где используется фотоаппарат в режиме одиночной съемки.

Сложно перечислить все области, где применяется фотография. Например, современная астрономия немыслима без использования фотографий звездного неба [5, 51, 197]. Вопросу применения фотоаппаратов для исследовательских работ школьников по астрономии и физике космоса посвящено много работ [138, 242]. Мы рассмотрим исследовательские работы по изучению атмосферных оптических явлений. Начнем с хорошо известного явления радуги.

Эта работа интересна по следующим причинам [168].

1) Явление радуги известно всем с самого раннего детства. Увидев после дождя в небе красивую дугу, маленькие дети спрашивают, отчего бывает такая красота? К сожалению, объяснить детям это сложно, тем более что сами родители не всегда знают причины появления радуги. С радугой связано множество народных преданий (зарытые клады и др.), радуга упоминается так же в Ветхом Завете. Изучение народных сказаний о радуге само по себе весьма интересно и может стать темой проектно-исследовательской работы по этнографии или литературоведению.

2) Объяснение явления радуги довольно сложно. Его объяснения нет не только в школьных учебниках, но даже в вузовских учебниках по общей физике [211, 254]. Поэтому даже студенты вузов физико-математического профиля на вопрос о причинах возникновения радуги обычно дают весьма туманные ответы. Конечно, они понимают, что радуга связана с явлением дисперсии, но при этом они не могут ни нарисовать ход лучей, ни рассчитать угловой размер колец радуги.

3) Для понимания этого прекрасного явления природы не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. О радуге можно прочитать в популярной литературе для школьников [221, 222].

Экспериментальное исследование радуги может быть проведено несколькими способами [168]:

- наблюдение за радугой в небе или в брызгах фонтана;
- исследование хода лучей в сферической колбе с водой.

Прежде всего, заметим, что художественные фотографии радуги в книгах и в интернете не всегда годятся для анализа. Это происходит по следующим причинам [168]:

- обычно неизвестно фокусное расстояние объектива, поэтому неясно как перевести размеры рисунка в угловые размеры радуги;
- фотоаппарат наводится горизонтально или даже под некоторым углом над горизонтом, что искажает картину, делая радугу эллиптической;
- при последующем размещении фотографии, ее размеры могли быть непропорционально увеличены, что также делает радугу эллиптической;
- при съемке могли использоваться широкоугольные объективы, вносящие искажения в фотографии.

При фотографировании радуги нужно избегать указанных выше проблем и фотографировать радугу, наводя центр кадра на центр окружности, которую образует радуга (точка  $O$  на рис. 5.1 [168]). При съемке на поверхности земли центр окружности расположен *ниже* уровня горизонта и составляет угол, равный высоте Солнца над горизонтом (угол  $\varphi$  на рис. 5.1). Поэтому радугу лучше наблюдать не днем, а вечером, когда Солнце низко и угол  $\varphi$  мал. При художественной съемке фотограф, скорее, наведет фотоаппарат так, что в центре кадра будет середина отрезка  $BC$  на рис. 5.1, но не центр радуги  $O$ . Заметим, что в горах или с самолета удается наблюдать радугу в виде окружности [221].

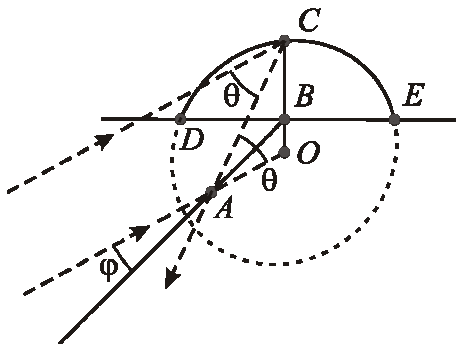


Рис. 5.1. Пояснение к наблюдению радуги

Съемка радуги сопряжена со сложностью выбора экспозиции, поскольку она выглядит достаточно блекло на фоне светлого неба. Особенно сложно фотографировать вторую (внешнюю) радугу, которая в большинстве случаев слабо различима на фоне неба [168].

После того как сделана фотография радуги нужно тем же фотоаппаратом с тем же зум сделать снимок удаленного объекта (чтобы не перенастроился фокус фотоаппарата), чтобы иметь возможность по фотографии определить угловые размеры. Оптимально, чтобы объект известных размеров располагался на той же фотографии, что и радуга.

Далее необходимо найти геометрический центр радуги, для чего нужно выбрать на радуге несколько точек одного цвета, например, зеленого, и восстановить перпендикуляры из середины отрезков, соединяющие эти точки как показано на рис. 5.2 [168]. После этого можно, сравнивая размеры колец радуги на фотографии с угловыми размерами известного объекта, установить угловые размеры радуги.

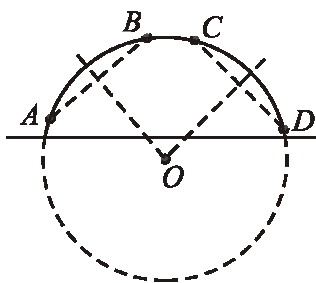


Рис. 5.2. Вычисление углового размера радуги

Теория предсказывает следующие угловые размеры радуги [221, 255]:

- первая радуга, фиолетовое кольцо –  $40,5^\circ$  ;
- первая радуга, красное кольцо –  $42,5^\circ$  ;
- вторая радуга, красное кольцо –  $50^\circ$  ;
- вторая радуга, фиолетовое кольцо –  $53,5^\circ$  .

При наличии поляризационного фильтра можно исследовать степень поляризации радуги. Теория предсказывает, что радуга сильно поляризована [168]. Вторая радуга также поляризована, хотя и не так сильно как основная. К сожалению, ни в одном литературном источнике не удалось найти экспериментальные данные о

поляризации радуги. Собственные наблюдения радуги через поляризационный фильтр подтвердили факт сильной поляризации первой радуги. К сожалению, наблюдать через поляризационный фильтр вторую радугу не удалось ввиду редкости ее появления.

Объяснение радуги было дано еще Р. Декартом и И. Ньютоном [221]. Радуга получается в результате того, что солнечные лучи преломляются и отражаются в многочисленных каплях дождя. Поэтому можно промоделировать ход световых лучей в колбе с водой.

#### **Возможная схема проведения эксперимента.**

Сферическая колба с водой неподвижно крепится в штативе. В другом штативе крепится лазерная указка, луч от которой направлен горизонтально, по плоскости симметрии колбы. Указка передвигается в вертикальном направлении, отраженные и преломленные лучи наблюдаются на столе. Для эксперимента лучше иметь две указки – красную и зеленую. Чтобы луч указки был виден при прохождении в воде, в воду можно добавить немного туши [168].

Появление цветowych дуг связано с явлением дисперсии. Дисперсия изучается обычно в 11-м классе в курсе волновой оптики и определяется как зависимость показателя преломления от длины световой волны. Но явление дисперсии можно объяснять и школьникам 7 – 8 классов при изучении геометрической оптики – как зависимость показателя преломления от цвета луча, т.е. без упоминания о длине волны. Можно использовать следующие значения показателя преломления  $n$  [255].

Таблица 5.1. Показатели преломления воды

№	Цвет	Средний показатель преломления $n$
1	Красный	1,3289
2	Оранжевый	1,3314
3	Желтый	1,3333
4	Зеленый	1,3341
5	Голубой	1,3371
6	Синий	1,3403
7	Фиолетовый	1,3430

Определенная проблема заключается в том, что курс геометрической оптики может изучаться без разбора закона преломления (Снеллиуса) – дается лишь закон отражения, после чего

постулируются свойства тонких линз [148]. Отчасти это обусловлено тем, что к моменту изучения геометрической оптики школьники еще не успевают освоить тригонометрические функции. Поэтому на факультативных занятиях со школьниками 7-го или 8-го класса оптические явления приходится начинать с тригонометрических функций и закона преломления Снеллиуса [254].

Начать исследования хода лучей можно со стандартной задачи по геометрической оптике (или по геометрии).

Найти угол отклонения луча  $\theta_1$ , если угол падения равен  $\alpha$ , а угол преломления –  $\beta$  (рис. 5.3, слева) [168, 221].

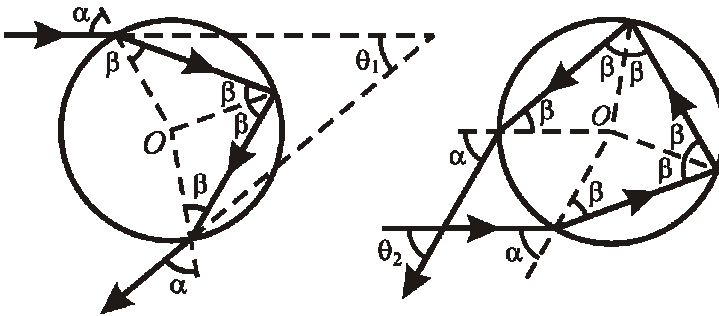


Рис. 5.3  
Ход лучей в капле дождя

Простое геометрическое построение показывает, что острый угол между входящими и выходящими лучами у первой радуги равен:

$$\theta_1 = 4\beta - 2\alpha . \quad (5.1)$$

Развивая эту задачу для второй радуги (два отражения внутри капли), можно получить, что отклонение луча равно (рис. 5.3, справа):

$$\theta_2 = 180^\circ - 6\beta + 2\alpha . \quad (5.2)$$

Учитывая, что согласно закону преломления:

$$\sin \alpha = n \sin \beta ,$$

получим для угла отклонения:

$$\theta_1 = 4\beta - 2\alpha = 4 \arcsin(\sin \alpha / n) - 2\alpha . \quad (5.3)$$



График такой зависимости можно исследовать с помощью любого языка программирования или электронных таблиц *MS Excel* или *OpenOffice.org Calc* [168]. Расчеты показывают, что при  $n = 1,33$  максимальный угол отклонения равен  $\theta = 42,5^\circ$ , который достигается при угле падения  $\alpha = 59,6^\circ$  и угле преломления  $\beta = 40,4^\circ$  (рис. 5.4, слева) [168].

Максимальный угол отклонения может быть также вычислен путем дифференцирования выражения (5.3). Получается, что максимальное отклонение луча достигается при угле падения [221]:

$$\alpha = \arccos \sqrt{(n^2 - 1)/3} . \quad (5.4)$$

Однако, поскольку школьники 7–9 классов еще не умеют дифференцировать, то для них достаточно получить численное решение. Если школьники умеют дифференцировать, то полезно убедиться, что вычисления по формуле (5.4) совпадают с численными расчетами.

Аналогичные вычисления для второй радуги по формуле (5.2), показывают, что при коэффициенте преломления  $n = 1,33$  минимальный угол отклонения равен  $\theta = 50,1^\circ$ , который достигается при угле падения  $\alpha = 71,9^\circ$  и угле преломления  $\beta = 45,6^\circ$  (рис. 5.4, справа). Можно обратить внимание школьников, что вторая радуга получается из лучей, которые падают в нижнюю половину капли. Лучи, у которых угол отклонения  $\theta_2$  получается больше  $90^\circ$ , будут выходить из капли не влево, как показано на рис. 5.3, а вправо [168].

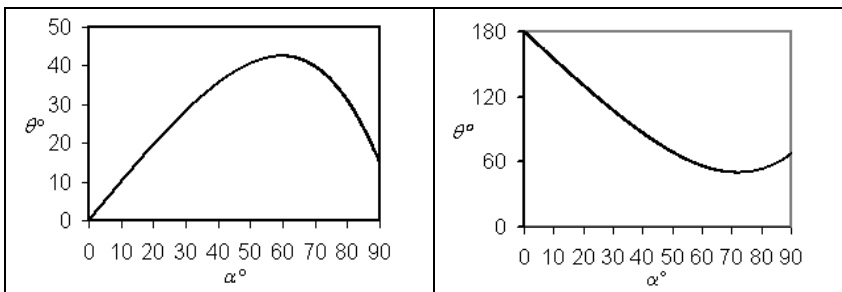


Рис. 5.4  
Зависимость угла отклонения от угла падения  
для первой (слева) и второй (справа) радуг

Экспериментальные данные, полученные при наблюдении радуги в небе и при прохождении лучей через колбу с водой преkrасно подтверждают численные расчеты [221].

Далее осталось объяснить школьникам, что большая часть отклоненных сферической каплей лучей расходится, а радугу создает пучок именно тех лучей, которые лежат вблизи максимального угла отклонения [221]. Кроме того, следует учесть угловые размеры Солнца. Учет угловых размеров Солнца сделает линии, соответствующие одному цвету (показателю преломления) более широкими, но не меняет угловых радиусов колец радуги.

Поскольку наиболее распространены лазерные указки красного и зеленого цвета, то можно проверить расчеты для соответствующих показателей преломления. При наличии источника параллельного пучка света (например, диапроектора) с цветофильтрами, формулы (5.3) – (5.4) можно проверить и для других цветов [168].

Заметим, что для наблюдения радуги нужны капли определенного размера. Слишком мелкие капли тумана (меньше 0,1 мм) не позволяют увидеть радугу ввиду сильной дифракции, а слишком большие капли (более 1 мм), которые могут образовываться, например, в фонтанах, могут иметь эллиптическую форму, что будет искажать наблюдаемую картину радуги.

Кроме радуги можно по фотографиям исследовать другие небесные явления, например, гало [221]. Однако ввиду редкости наблюдаемого явления, придется использовать фотографии, сделанные не школьником, а другими фотографами, что приводит к указанным выше проблемам определения фокусного расстояния объектива и направления на центр фотографии.

## **5.2. Исследование объектов малых размеров**

### **5.2.1. Исследование явлений интерференции и дифракции**

Кроме фотографирования крупных объектов фотоаппарат можно использовать при исследовании, напротив, очень малых объектов. При этом можно пользоваться как собственными режимами фотоаппарата, например, макросъемкой, так и использовать фотоаппарат в качестве насадки к микроскопу [85, 143].

Одним из возможных направлений исследовательских работ – это наблюдение рассеяния света, дифракции и интерференции [20, 123, 126, 137, 143, 150, 169, 180, 184, 196].

В простейшем варианте схема установки для наблюдения дифракции выглядит следующим образом. Луч света от лазерной указки падает на фольгу (или непрозрачную бумагу) в которой делается булавкой небольшое отверстие или прорезается щель лезвием бритвы. Вместо фольги можно также использовать штангенциркуль, разведя его губы на расстояние около 0,1 мм.

За фольгой ставится собирающая линза, в фокусе которой располагается экран, на котором наблюдается дифракционная картина. Дифракционная картина получается достаточно мелкой, поэтому для дальнейшего анализа ее нужно сфотографировать в режиме макросъемки.

Сделав фольгу с двумя прорезями, можно наблюдать дифракцию на двух щелях или интерференцию по схеме Юнга.

Хотя явления дифракции и интерференции относятся к волновой оптике и изучаются только в 11-м классе, опыт показывает, что материал может быть усвоен школьниками уже в 8-9 классах, если для расчета дифракции использовать численные методы [169, 180, 184, 196].

Макросъемка может быть использована также при исследовании других мелких объектов, например, для определения формы кристаллов или анализа оптических свойств вещества [143].

## **5.2.2. Создание голограмм**

При наличии фотокамеры, использующей фотопластинку, можно развить исследовательские работы по получению дифракционных картин и создать голограммы простейших объектов. Поскольку создавать голограмму с реальным объектом является достаточно сложной задачей, то можно численно рассчитать голографический образ фигуры и вывести его на экран компьютерного монитора, как описано в [150]. Далее с помощью фотоаппарата можно сильно уменьшить полученное изображение, спроецировав его на фотопластинку.

После проявления фотопластинки голографическое изображение восстанавливается с помощью лазерной указки. Заметим, что для данной цели нужна именно фотопластинка, а не обычная фотопленка, поскольку в процессе обработки фотопленка

деформируется, что сильно искажает получающееся голографическое изображение.

### 5.3. Исследование нестабильных объектов

#### 5.3.1. Исследование формы мыльных пленок

Фотография бывает полезна, когда нужно определить форму и размер объекта, который в силу своей неустойчивости сложно измерить непосредственно [238, 245]. Выше мы уже описывали применение фотографии для определения размера воздушного шарика, который при непосредственном контакте деформируется. Еще более нестабильным объектом является **мыльная пленка**.

Обычно мы наблюдаем мыльные пленки в виде мыльных пузырей. Хорошо известно, что свободно летающие мыльные пузыри имеют сферическую форму. Это происходит из-за наличия сил поверхностного натяжения, которые стремятся уменьшить площадь поверхности. Впрочем, школьникам 7-9 классов совсем необязательно знать сложную теорию сил поверхностного натяжения. Им достаточно усвоить факт, что мыльная пленка стремится уменьшить площадь своей поверхности.

В качестве исследовательской работы можно рассмотреть колебания мыльных пузырей, которые выдуваются продолговатой формы, а затем постепенно принимают сферическую форму. Однако эта работа сложна для теоретического описания, поэтому можно предложить более простую тему – изучение мыльных пленок на каркасах [65].

Данное направление исследований имеет следующие достоинства [189, 190]:

- для его реализации не требуется специальное оборудование, достаточно изготовить из проволоки каркасы, в качестве жидкости для мыльных пленок можно использовать жидкость для детских мыльных пузырей или раствор моющего средства;
- для объяснения изучаемых явлений не нужно знать сложной теории, объясняющей, почему мыльная пленка стремится уменьшить площадь своей поверхности;
- расчет минимальной площади поверхности мыльной пленки при заданных граничных условиях можно сделать численно, используя электронную таблицу MS Excel или ее аналог в пакете Open Office.

Рассмотрим мыльную пленку между двумя одинаковыми соосными кольцами как показано на рис. 5.5 [189, 190].

Может показаться, что минимальная площадь будет, когда пленка образует боковые стенки цилиндра, как показано на рис. 5.5 пунктиром. Однако эксперимент показывает, что пленка образует поверхность сложной формы, как показано точечным пунктиром.

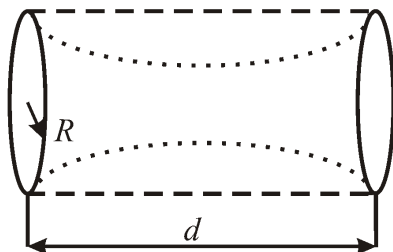


Рис. 5.5  
Форма мыльной пленки

Теория говорит, что пленка принимает поверхность катеноида – тела, образующиеся в результате вращения гиперболического косинуса [21, 116]. Однако, поскольку школьники, скорее всего еще не знают гиперболического косинуса, и тем более не знают, какую форму принимает пленка, то можно решить задачу нахождения минимальной формы поверхности численными методами, аппроксимируя ее четным полиномом  $N$ -ой степени:  $y = A_0 + A_2x^2 + A_4x^4 + \dots$ , как описано в [190]. Проведенные исследования силами учеников 8-го класса показали, что даже полином второй степени прекрасно аппроксимирует форму поверхности мыльной пленки при  $d < R$ .

Для изучения формы пленки можно сделать ее фотографию. При этом основная проблема связана с нахождением оптимальной выдержки, поскольку с силу своей прозрачности пленка плохо видна в кадре. Эксперимент показывает, что оптимально делать снимок сбоку, освещая пленку сверху. Можно также сделать фотографию тени пленки.

Варьируя расстояние между кольцами  $d$ , можно провести исследовательскую работу по изучению зависимости формы пленки от соотношения параметров  $d$  и  $R$ . Заметим, что при  $d > 1,5 R$  мыльная пленка «схлопывается» и существует в виде двух отдельных пленок на кольцах [189, 190].

Возможно также исследовать поверхности мыльных пленок на других каркасах как описано в [65].

Кроме мыльных пленок можно исследовать изменение формы падающих капель в процессе их падения под действием сил поверхностного натяжения.

Эксперимент можно провести, используя, например, медицинскую капельницу. Закрепляя фотоаппарат на разных уровнях можно получить динамику изменения формы капли [192].

Следует заметить, что общепринятое изображение капли воды (рис. 5.6, слева) можно наблюдать только в момент отрыва капли от капельницы. Из-за сил поверхностного натяжения капля воды стремится принять шарообразную форму (рис. 5.6, в центре). Однако в первые доли секунды (примерно 40-50 см ниже точки отрыва) можно наблюдать вытянутую каплю (рис. 5.6, справа [192]). Заметим, что такую форму капли можно наблюдать только в цифровых фотоаппаратах в «ручном» режиме. Автоматические режимы «услужливо поправляют» форму капли, делая ее шарообразной (рис. 5.6, в центре).

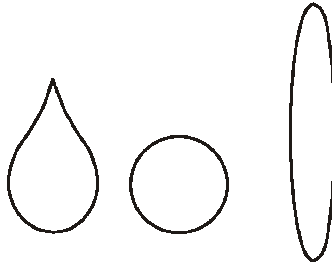


Рис. 5.6  
Формы капли воды

Для решения этой задачи приходится использовать фотоаппарат, поскольку требуются очень малые времена экспозиции.

С исследованием формы поверхности воды связано еще несколько задач, некоторые из которых приведены ниже.

### 5.3.2. Задача Релея со струей воды

Темой для исследовательской работы школьников может послужить задача, предложенная Релеем (см. задачу № 498 в [208]).

Релей обратил внимание, что вытекающая из сосуда струя воды имеет не цилиндрическую форму, а напоминает звенья цепочки (см. рис. 5.7).

Наблюдаемые «перетяжки» возникают в струе воды в силу поверхностного натяжения [192].

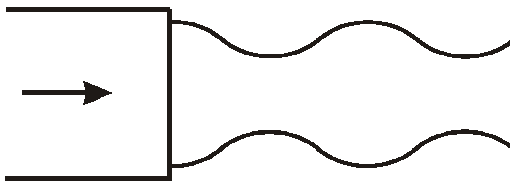


Рис. 5.7  
Форма вытекающей струи воды

Заметим, что форму струи можно промоделировать, используя данные о расстоянии между «выпуклостями». Опыт показывает, что для достаточно хорошей аппроксимации достаточно использовать многочлен 4-й степени:  $y = A_0 + A_2x^2 + A_4x^4$ . Коэффициенты подбираются численно, так, чтобы минимизировать площадь поверхности.

Поскольку струя под действием силы тяжести искривляется вниз, то невозможно указать граничное условие справа, поэтому для простоты можно принять, что «выпуклости» и «узлы» чередуются периодически [192].

Эксперимент может быть реализован с помощью 5 л или 10 л банки с боковым отверстием, в которое можно вставить резиновую пробку со стеклянными трубками разных диаметров. Поскольку объем банки велик, то можно пренебречь незначительным уменьшением уровня воды, и таким образом, скорость вытекающей струи можно считать постоянной. Для регистрации формы струи потребуется фотоаппарат, позволяющий выполнять съемку с короткой экспозицией (от 1/1000 с и меньше). Проведенные учениками 8-го и 9-го классов эксперименты показали удовлетворительное соответствие эксперимента и численных расчетов [192].

С водяной струей можно провести много красивых экспериментальных исследовательских работ. Некоторые направления работ можно найти в [226].

## Заключение

Приведенные примеры отдельных экспериментальных исследовательских работ и общие направления исследований, которые можно проводить со школьниками, показывают, что использование фотокамер в качестве высокоточного универсального доступного физического прибора позволяет решать многие интересные экспериментальные задачи. Таким образом, существующее в настоящее время мнение, что для проведения исследовательских работ со школьниками необходимо дорогостоящее оборудование, свидетельствует только о недостатке методической литературы, посвященной вопросу развития исследовательских способностей школьников в области физики.

Еще раз отметим, что для развития исследовательских способностей необходимо, чтобы школьник понимал как работают используемые им приборы. К сожалению, многие современные учебные лаборатории настолько сложны, что разобраться в них тяжело даже учителям. Также следует подчеркнуть, что для работы желательно использовать как можно более «простые» фотокамеры без дополнительных услуг, связанных с обработкой изображения (эффект «красных глаз», компенсация смазывания при движении и пр.) поскольку для школьника важно получить не эстетически красивую, а как можно более точную информацию об исследуемом объекте.

Предложенная схема проведения исследовательских работ была разработана автором для факультативных занятий со школьниками, которые хотели бы больше узнать о физике, но при этом еще не имеют ярко выраженного интереса к определенной проблеме, то есть в начале занятий тема исследовательской работы еще не может быть сформулирована. Разумеется, если школьник не склонен к проведению исследовательских работ с фотокамерами или вообще не стремится приобщиться к физическому эксперименту, существуют и другие темы работ, о чем подробнее написано в [196]. Еще раз заметим, что исследовательские работы 2-го и 3-го уровней – это путешествие в неизвестное и дать точные указания о методике их выполнения невозможно, а лучше оставить это на усмотрение научного руководителя.

Поэтому автор будет рад, если научным руководителям исследовательских работ школьников окажутся полезными любые выдержки из этой книги. Вопросы, предложения и пожелания можно отправлять автору по адресу: [phys-school@rambler.ru](mailto:phys-school@rambler.ru) с пометкой в Subject «Галилей».



## Список литературы

1. Абасов З.А. Проектирование и организация групповой работы учащихся на уроке. // Наука и школа, 2009, №6, с. 36-37.
2. Аванесов В.С. Президент США объявил о реформе образования. // Исследовательская работа школьников, 2010, №2, с. 13-16.
3. Алехина Т.Н., Силина Л.И. Управление исследовательской деятельностью учащихся в процессе обучения физике в профильных классах. // Физика в школе. 2009, №1, с. 15-18.
4. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика: Учеб. для студ. вузов. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 480 с.
5. Аллен К.У. Астрофизические величины. – М.: Мир. 1977. – 448 с.
6. Альбицкая Н.Е. Технологии развития навыков исследовательской деятельности одарённых школьников. // Исследовательская работа школьников, 2010, №1, с. 90-96.
7. Андреева Н.В. Конструирование фронтальных исследований. // Физика (приложение издательского дома «Первое сентября»). 2010, №16, с.16-18.
8. Андреев Ю.А. Метод размерностей как доступный способ формирования у обучаемых общеобразовательной школы представлений о путях построения единой физики. // Наука и школа, 2009, №6, с. 37-38.
9. Антипова Е.П. Развитие самостоятельности учащихся на основе создания и использования видеозадач в процессе обучения физике. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.п.н. (13.00.02) Екатеринбург. 2007. 21 с.
10. Арнольд В.И. Математическое понимание природы. – М.: МЦНМО, 2009. – 144 с.
11. Бархаев Б.П. Воспитывающая «видеотехнология» // Мир образования. 1997. №6. с. 48–51.
12. Бархаев Б.П. Применение видеотехнологии в развивающем обучении // Педагогика. 1998. №3. с.53–57.
13. Басманова А.В. Научно-исследовательская работа по развитию творческих способностей учащихся. // Учитель в школе. 2010. №4. с. 97–100.
14. Богуславский М.В. Документ, которого ждали. // Народное образование. 2010, №1, с. 17-23.

15. Борисов Ю.А. От проекта до заявки на открытие – один шаг. // Физика (приложение издательского дома «Первое сентября»). 2010. №16. с. 44-46.
16. Браверманн Э.М. Мыслительная сфера учащихся: что и как развивать на занятиях по физике. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 321-323.
17. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
18. Быховский Я.С. Мобильные технологии для школьных исследований. // Школьные технологии, 2008, №5, с. 82-84.
19. Валеева Е.Х., Власова Ю.Ю., Монахов С.В. Образование в контексте приоритетов долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации. // Педагогика. 2009, №7, с. 3-10.
20. Варламов С.Д. Интерференция света, рассеянного частицами. // Физика для школьников. 2010. №3. с. 41-50.
21. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2003. – 432 с.
22. Васильева И.В. Формирование исследовательской компетентности обучающегося при изучении физики в основной школе. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 345-347.
23. Вейсман А.Д. Греческо-русский словарь. // М.: Изд. греко-латинского каб. Ю.А. Шичалина. 1991 (репринт изд. 1899 г).– 1370 с.
24. Видеоматериалы и сетевые видеосервисы в работе учителя: практическое пособие. / Под. ред. Я.С. Быховского. – М.: БИНОМ. 2008. – 90 с.
25. Внуков И.В., Самохвалова Е.В., Чудов В.Л., Щеглова О.А. Государственное образовательное учреждение лицей №1502 при МЭИ. // Физика для школьников. 2010. №1. с. 31-35.
26. Волкова Л.А. Виды, алгоритмы и принципы школьных учебных исследований. // Исследовательская работа школьников, 2009, №4, с. 17-22.
27. Волохов А.Ю., Королев Д.Ю. Из опыта организации учебно-исследовательской работы учащихся в московской гимназии на юго-западе №1543. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 193-194.

28. Всероссийские олимпиады по физике. 1992 – 2004. / Под. ред. С.М. Козела, В.П. Слободянина. – М.: Вербум-М, 2005. – 534 с.
29. Гальперин П.Я. Лекции по психологии. Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 2002. – 400 с.
30. Галилей Галилео. Избранные труды. т. 1. – М.: Наука, 1964 – 640 с.
31. Галилей Галилео. Избранные труды. т. 2. – М.: Наука, 1964 – 571 с.
32. Гамезо М.В., Петрова Е.А., Орлова Л.М. Возрастная и педагогическая психология. Учеб. пособие для студентов всех специальностей педагогических вузов. – М.: Педагогическое общество России, 2003. – 512 с.
33. Глазкова К.Р., Живодробная С.А. Возможности уроков-исследований для развития умения моделирования. // Физика в школе. 2008. №5. с. 31-33.
34. Гликман И.З. Размышления о старой и новой школе. // Инновации в образовании. 2010, №1, с. 107-120.
35. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. – М.: Высшая школа, 1973. – 352 с.
36. Гормакова Л.Д. Совершенствование механизма организации и управления инновационной деятельностью в образовательном учреждении. // Исследовательская работа школьников, 2009, №3, с. 27-34.
37. Грачев А.В., Погожев В.А., Боков П.Ю. Физика. 9 класс. – М.: Вентана-Граф, 2010. – 336 с.
38. Громыко Г.Г. Демонстрационные опыты по физике. – Н. Новгород: ВГИПА, 2002. – 98 с.
39. Грязнов А.Ю., Рыжиков С.Б. Новый многоуровневый мультимедийный учебник по физике для средней школы. // Научная конференция «Ломоносовские чтения. Секция Физики». Тезисы. М.: Изд. физического факультета МГУ. 2006. с. 171-172.
40. Грязнов А.Ю., Рыжиков С.Б. Новый компьютерный тренажер лабораторных работ по физике для средней школы. // Труды IX межд. учебно-методической конф. «Современный физический практикум». С.–Петербург, М.: Издательский дом Московского физического общества, 2006, с. 161.
41. Гулиа Н.В. Удивительная физика. О чем умолчали учебники. – М.: Изд. НИЦЭНАС, 2005. – 416 с.

42. Гусева Л.А. Реализация метода проектов: школьная конференция "фестиваль идей". // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 207-208.
43. Давыдова И.П., Дюнин С.Е. Анимационные технологии и их применение в школе. // Информатика и образование. 2007. №12. с. 35-39.
44. Даминов Р.В. Физический эксперимент. Это просто! – Казань: Центр инновац. технол., 2002. – 129 с.
45. Даминов Р.В. Физический эксперимент – это просто. // Физика для школьников. 2011. №3. с. 43-50.
46. Данилова Л.Н. Одаренные школьники: обучение в германоязычных странах. // Народное образование, 2010, №1, с. 220-223.
47. Дахин А.Н. "В Калифорнии я лучше понял особенности российского образования". // Школьные технологии. 2006, №1, с. 26-33.
48. Демидова М.Ю. Видеоматериалы на уроках физики и астрономии. // Физика (приложение издательского дома «Первое сентября»). 2003, №3, с.17-19.
49. Дягилев Ф.М. Из истории физики и жизни ее творцов. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.
50. Емельянова И.Е. Аспекты организации исследовательского занятия с одаренными детьми. // Исследовательская работа школьников, 2010, №2, с. 37-44.
51. Еремеева А.И., Цицин Ф.А. История астрономии. – М.: МГУ, 1989. – 348 с.
52. Ерохина Р.Я. Школьная конференция как способ реализации метода проектов. // Физика (приложение издательского дома «Первое сентября»). 2010. №18. с. 21-25.
53. Ефлов В.Б. Математическое моделирование в задачах турнира юных физиков. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 409-410.
54. Жильцова О.А., Кузнецова Е.В., Пшеничная Г.Ф., Самоненко Ю.А. Возможности организации проектно-исследовательской деятельности учащихся в средней школе. // Школьные технологии, 2008, №6, с. 100-103.
55. Завада В.Ф. Из опыта организации научно-исследовательской деятельности учащихся лицея № 15, г. Саров. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 191-193.

56. Задачи московских физических олимпиад. Под. ред. С.С. Кротова. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
57. Задачи по физике: Учебное пособие. Под. ред. О.Я. Савченко. – СПб.: Изд. "Лань", 2001. – 368 с.
58. Зайцева Н.В. Перспективные направления поддержки одаренных детей. // Народное образование, 2010, №3, с. 26-28.
59. Зарубина И.Н., Зарубин Н.П. Исследование сложений колебаний с помощью Excel. // Информатика и образование. 2010, №4, с. 52-54.
60. Зачесова Е.В. Написание текстов: рекомендации юным авторам учебных исследований и их руководителям. // Школьные технологии. 2006, №5, с. 105-111.
61. Зеленская Е.В. Поэтапная организация учебной проектной деятельности учащихся. // Школьные технологии. 2009, №5, с. 122-127.
62. Зильберберг Н.И. Этапы включения школьников в исследовательскую деятельность. // Школьные технологии. 2008, №5, с. 76-81.
63. Зильберман А.Р. Школьные физические олимпиады. – М.: МЦНМО, 2009. – 256 с.
64. Иванова Н.Ю. Исследовательская деятельность младших школьников как средство повышения интереса и мотивации к изучению физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 410-412.
65. Иверонова В.И. Лекционные демонстрации по физике. – М.: Наука. 1965. – 572 с.
66. Игонина Е.М. Проектная и исследовательская деятельность членов научного общества учащихся "Лидер" в условиях сельского лицея. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 228-229.
67. Ильина Р.В. Проектно-исследовательская деятельность обучающихся по физике как средство формирования ключевых образовательных компетенций. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 203-205.
68. Инишева О.В. Единство учебной и внеучебной работы по физике в СУНЦ УРГУ – залог успешности учащегося и учителя. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 184-186.
69. Казакова Ю.В. Организация внеурочной исследовательской деятельности учащихся по физике в современных условиях. //

- Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 215-216.
70. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука. 1978. – 512 с.
  71. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом. // Успехи физических наук. 1951, т. 44, №1, с. 7–20.
  72. Каплина Т.В. Урок на тему: «Цифровое видео. Форматы видеофайлов». // Информатика и образование. 2008. №3. с. 17-27.
  73. Капранова И.М. Развитие творческой одаренности школьников через научно-исследовательскую деятельность. // Исследовательская работа школьников, 2010, №2, с. 45-50.
  74. Карпов А.О. Три модели обучения. // Педагогика, 2009, №8, с. 14-26.
  75. Карпов А.О. Теория научного образования: современные проблемы. // Исследовательская работа школьников, 2010, №1, с. 7-25.
  76. Касьянов В.А. Физика. 10 класс. М.: Дрофа. 2003. – 416 с.
  77. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика: Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение. 1998. – 191 с.
  78. Ким В.С. Научное и учебное моделирование в физическом эксперименте. // Наука и школа. 2010, №4, с. 30-34.
  79. Кларин М.В. Характерные черты исследовательского подхода: обучение на основе решений проблем. // Школьные технологии. 2004, №1, с. 11-24.
  80. Кларин М.В. Развитие критического и творческого мышления. // Школьные технологии. 2004. №2, с. 3-11.
  81. Ковалева С.Я. Об исследовательской и проектной деятельности учащихся. // Физика (приложение издательского дома «Первое сентября»). 2010, №18, с. 3-4.
  82. Козырева Н.А. Исследовательская деятельность школьников: подходы и возможности. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 195-196.
  83. Койре А. Очерки истории философской мысли. – М.: Прогресс, 1985. – 288 с.
  84. Колесов А.В. Использование проектных технологий в современном образовании. // Исследовательская работа школьников, 2009, №3, с. 23-26.
  85. Колодкин И. Наблюдение и исследование Броуновского движения. // Физика для школьников. 2010. №2. с. 21-27.

86. Коломин В.И. Компетентностный подход в профессиональной подготовке учителя физики. // Наука и школа, 2008, №1, с. 5–7.
87. Королева Е.В. Формирование новой интеллектуальной элиты России // Исследовательская работа школьников, 2009, №2, с. 5-6.
88. Королева Е.В. Инновационное образование – основа устойчивого инновационного развития экономики России. // Исследовательская работа школьников, 2009, №4, с. 5–6.
89. Королева Е.В. Проектно-исследовательская деятельность учащихся как средство формирования и развития инновационного мышления – генератора инноваций. // Исследовательская работа школьников, 2010, №1, с. 5-6.
90. Косихина О.С., Крутский А.Н. Понятие о психодидактике. // Физика в школе. 2010, №3, с. 30-34.
91. Котельникова Я.А. Некоторые особенности организации и оформления исследовательской работы учащихся. // Исследовательская работа школьников, 2009, №1, с. 49-61
92. Кравец В.В. Эксперимент в естественных науках. // Физика в школе. 2009, №1, с. 22-25.
93. Кравцова А.Ю. Цифровые фотокамеры и их применение в учебном процессе. – М.: Образование и информатика. 2003. – 28 с.
94. Краевский В.В. Методологические характеристики научного исследования. // Народное образование, 2010, №5, с. 135-143.
95. Красин М.С., Мильман О.О. Оценка погрешности измерений при обработке результатов школьного физического эксперимента. Учебно-методическое пособие. – Калуга: Калужский государственный педагогический университет. 2006. – 88 с.
96. Красин М.С., Москвина О.А. Методика использования на уроках физики фотозадач, составленных самими учащимися. // Материалы VII Международной научно-методической конференции «Физическое образование: проблемы и перспективы развития». М.: Московский педагогический государственный университет, 2008, часть 1, с. 134-136.
97. Крысанова О.А. Структура и содержание инновационной деятельности учителя физики в современной школе. // Наука и школа. 2010, №3, с. 45-48.

98. Кудрявцева О.Б. Роль внеклассной работы в исследовательском обучении. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 233-236.
99. Кушнарева Н.Ю. От исследовательской деятельности на уроке – к индивидуальной исследовательской работе ученика. // Исследовательская работа школьников, 2010, №2, с. 30-36.
100. Лебедев В.В. Исследовательская компетентность педагога: технология мыследеятельности. // Наука и школа. 2010, №1, с. 29-35.
101. Лебедева Н.А. Интерес к научным исследованиям нужно прививать в школе. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 208-210.
102. Леонтович А.В. Моделирование исследовательской деятельности учащихся: практические аспекты. // Школьные технологии, 2006, №6, с. 89-98.
103. Леонтович А.В. Современная практика дополнительного образования детей. // Исследовательская работа школьников, 2008, №3, с. 6-18.
104. Леонтович А.В. Принципы системного построения исследовательской деятельности в образовательной системе. // Исследовательская работа школьников, 2009, №3, с. 13-22.
105. Леонтович А.В. Не смейтесь над Фарадеем. // Лицейское и гимназическое образование, 2010, №10, с. 32-33.
106. Леонтович А.В. Исследовательская деятельность школьников: международные проекты. // Народное образование. 2010, №3, с. 253-258.
107. Лобышев В.И. Исследовательская работа учащихся – необходимый элемент образования. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 200-201.
108. Льюис М. История физики. – М.: Мир, 1970. – 463 с.
109. Лымарева Н.А. Физика. 9-11 классы: проектная деятельность учащихся. – Волгоград: Учитель. 2008. – 187 с.
110. Майер В.В., Вараксина Е.И., Демьянова О.И. Повышение интереса к физике при изучении математического маятника. // Физика в школе. 2009, №3, с. 37-39.
111. Майер В.В., Демьянова О.И. Опыты по записи колебаний маятников. // Физика в школе. 2009, №3, с. 39-41.
112. Маковецкий П.В. Смотри в корень.– М.: Наука, 1991. – 350 с.
113. Макотрова Г.В. Формирование учебно-исследовательской культуры учащихся. // Физика в школе. 2009, №8, с. 36-38.



114. Маланцева О. Исследование детской одаренности за рубежом // Исследовательская работа школьников, 2009, №3, с. 5-12.
115. Маракув Н.Н. Галилей. Его жизнь и ученые труды. – М.: Тип-литография Т-ва И.Н. Кушнарв и К. 1907. – 130 с.
116. Математический энциклопедический словарь. / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия. 1988. – 847 с.
117. Матросов В.Л. Новый учитель для новой российской школы. // Педагогика, 2010, №5, с. 3-9.
118. Мельникова И.Ю. Экспериментальные задания по физике как средство развития исследовательских и творческих способностей учеников. // Физика (приложение издательского дома «Первое сентября»). 2010, №18, с. 13-20.
119. Меньшикова Е.А. О психолого-педагогической природе любопытства и любознательности у детей. // Исследовательская работа школьников, 2008, №3, с. 26-31.
120. Митин И.В., Русаков В.С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие. – М.: Физический факультет МГУ. 2004. – 44 с.
121. Москвина А.В. Способен ли ученик сделать научное открытие? // Школьные технологии. 2004, №1, с. 219-228.
122. Мухина В.С. Психологический смысл исследовательской деятельности для развития личности. // Школьные технологии. 2006, №2, с. 19-31.
123. Надольская Я.В. Лазер детям не игрушка? // Физика для школьников. 2009. №3. с. 29-34.
124. Назарова О.В. Из опыта работы школьной видеостудии. // Информатика и образование. 2007, №12, с. 40-43.
125. Наливайко В.П. Об опыте организации исследовательской деятельности учащихся. // Физика в школе. 2009, №1, с. 18-22.
126. Наливайко В.П. Пространственная ориентация по рассеянному солнечному свету. // Физика для школьников. 2009. №1. с. 38-45.
127. Неграш А.С. Анализ размерностей физических величин и подобие физических явлений как метод развития мышления при обучении физике. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. - М.: МГУ, 2011, с. 332-334.
128. Новиков А.М. О предмете педагогики. // Педагогика, 2010, №6, с. 8-14.

129. Оборотова Е.А. Исследовательские методы обучения на уроках физики в школе. // Исследовательская работа школьников, 2008, №4, с. 66-70
130. Обухов А. Социокультурное взаимодействие в системе исследовательской деятельности учащихся. // Народное образование. 2002, №2, с.129-132.
131. Осипенко Л.Е., Слободянюк А.И., Лавриненко А.В. Сказка про горячий чай или как наладить исследовательскую работу в школе. // Физика в школе. 2009, №1, с. 26-35.
132. Остапенко А.А. И ещё раз о знаниях, умениях и навыках или поможет ли этимология разрешить извечную дидактическую путаницу? // Школьные технологии. 2010, №1, с. 183-184.
133. Пентин А.Ю. Исследовательская и проектная деятельности: сущность и форма. // Новые ценности образования. 2006, вып. 1-2, с. 36-41.
134. Перельман Я.И. Занимательная физика. Книга первая. – М.: Наука, 1971. – 216 с.
135. Перельман Я.И. Занимательная физика. Книга вторая. – М.: Наука, 1971. – 264 с.
136. Петрова М.А., Беликов Ю.С., Кыров Е., Ляховец Д., Пупыкин Е. Новые возможности для определения коэффициента лобового сопротивления тел различной формы. // Физика для школьников. 2009, №3. с. 35-39.
137. Петрова М.А., Бритов Д., Ляховец Д. Опыт Тиндаля, или исследование оптических свойств жидкости. // Физика для школьников. 2009, №3. с. 39-44.
138. Пивоваров А.А. Задания многократного использования. // Физика в школе. 1997, №6, с. 65-69.
139. Пивоваров С.С., Зеленин С.П. Образовательная среда одаренных старшеклассников и организация процесса обучения физике. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 212-214.
140. Пигалицын Л.В. Наши успехи за рубежом: международный конкурс научных и инженерных работ школьников. // Физика (приложение издательского дома «Первое сентября»). 2010, №18, с. 35-37.
141. Пигалицын Л.В. Проектная и учебно-исследовательская деятельность школьников – залог успеха российской науки XXI века. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 201-203.

142. Плескова И.А. Проектная и исследовательская деятельность учащихся на уроках физики и во внеурочное время. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 244-246.
143. Поздняков А.В., Позднякова Ю.С. Исследование дисперсионных свойств вещества. // Физика для школьников. 2010. №4. с. 42-44.
144. Полат Е.С. Метод проектов: история и теория вопроса. // Школьные технологии, 2006, №6, с. 43-47.
145. Полякова Е.П. Использование методов исследования на уроках физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 246-248.
146. Прессман Л. Видеозапись на Вашем уроке. // Народное образование. 1995. №6. с. 96–99.
147. Прозаровская Л.А., Ханжина Е.В. Вопросы содержания факультативного курса «Физические основы прыжка с парашютом». // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 249-252.
148. Пурьшева Н.С., Вяжеевская Н.Е., Чаругин В.М. Физика. 9 класс. – М.: Дрофа, 2007. – 285 с.
149. Путеводитель юного исследователя. Научно-образовательный центр ИПФ РАН. – Н. Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 2007. – 92 с.
150. Пятаков А.П., Григал П.П. Лаборатория на коленке. – М.: Бюро квантум (Библиотечка «Квант». Вып. 112). 2009. – 160 с.
151. Разумный Д.В. Видео на уроке: альтернатива традиционным методам. // Директор школы. 2002. №2. с.45-50.
152. Разумный Д.В., Степанов С.В. Демонстрационный эксперимент на видеокассете – новая составная часть средств наглядности. // Наука и школа. 2002. №6. с. 34-37.
153. Разумовский В.Г. Творческие задачи по физике в средней школе. – М.: Просвещение, 1966. – 156 с.
154. Разумовский В.Г. Подготовка современного школьника по физике: проблема повышения качества обучения. // Физика в школе. 2000, №3, с. 3-6.
155. Разумовский В.Г. Проблемы обучения физике и опыт зарубежной школы. // Физика в школе. 2009, №8, с. 9-18.
156. Разумовский В.Г. Майер В.В., Стрелков В.М. Экспериментальное изучение фотоэффекта на основе научного метода познания. // Физика в школе. 2010, №2, с. 38-51.

157. Рашиков В.И., Рошаль А.С. Численные методы решения физических задач. – С.Пб.: Лань, 2005. – 208 с.
158. Ротов А.Ю., Филипова И.Я. Исследование упругих соударений двух тел разной массы с применением видеоанализа. // Физика для школьников. 2011. №3. с. 28-33.
159. Рудой Ю.Г. Размышления о лице «Вторая школа». // Физика в школе. 2008, №3, с. 30-33.
160. Рыбанов А.А. Возможности видеоурока и их использование на уроках информатики. // Школьные технологии 2011, №1, с.118-121.
161. Рыжиков С.Б., Старокуров Ю.В. Реализация классического эксперимента «Опыт Галилея» с помощью техники фотофиниша. // Физическое образование в вузах. 2002, т.8. №3. с. 70-74.
162. Рыжиков С.Б. Два аспекта применения компьютера в преподавании физики на примере решения одной классической задачи. // Труды VII международной конференции «Физика в системе современного образования». СПб. 2003. т.1. с. 116-118.
163. Рыжиков С.Б. Простой опыт, демонстрирующий квадратичный характер зависимости силы сопротивления воздуха от скорости. // Труды VIII международной учебно-методической конференции «Современный физический практикум», М., 2004, с. 86.
164. Рыжиков С.Б. Аэродинамика полета бумеранга. // Материалы VIII международной конференции «Физика в системе современного образования», С.–Петербург: изд. Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2005. с. 607.
165. Рыжиков С.Б. Повышение интереса у школьников к физике путем проведения с ними исследовательских работ на опыте работы Вечерней физической школы при физическом факультете МГУ. // Научная конференция «Ломоносовские чтения. Секция Физики». Тезисы. М.: Изд. физического факультета МГУ, 2006 с. 172-174.
166. Рыжиков С.Б. Компьютерное сопровождение лекционной демонстрации «Полет бумеранга». // Труды IX межд. учебно-методической конф. «Современный физический практикум». С.–Петербург, М.: Издательский дом Московского физического общества, 2006, с. 82-83.

167. Рыжиков С.Б. Беседы и компьютерные расчеты, касающиеся нескольких занимательных задач механики. ч.1. Как Ахиллес и черепахи играли в догонялки. – М.: МГДД(Ю)Т, 2007. – 76 с.
168. Рыжиков С.Б. Компьютерное моделирование образования радуги. // Материалы VI Международной научно-методической конференции "Физическое образование: проблемы и перспективы", М.: Школа будущего, 2007, ч.2., с. 168-170.
169. Рыжиков С.Б. Применение компьютерного моделирования при изучении явления дифракции в средней школе. // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения. Секция физики», М.: Изд. физического факультета МГУ, 2007, с. 151-152.
170. Рыжиков С.Б. Классический опыт Галилея в век цифровой техники. Учебное пособие. – М.: МЦНМО. 2008. – 64 с.
171. Рыжиков С.Б. Навыки исследователя формируются на школьной скамье. // Вестник МГУ, сер. 20 (педагогическая), 2008, №2, с. 65-71.
172. Рыжиков С.Б. Измерение силы сопротивления воздуха. // Физика в школе. 2008, №3, с. 37-40.
173. Рыжиков С.Б., Рыжикова Ю.В. Физический эксперимент по оптике в условиях летней школы. // Труды международной конференции "Современный физический практикум". Астрахань. 2008, с. 256-257.
174. Рыжиков С.Б. Изучение негармонических колебаний маятника с помощью цифровой камеры. // Труды международной конференции «Современный физический практикум». Астрахань. М.: Издательский дом Московского физического общества. 2008. с. 257-258.
175. Рыжиков С.Б. Беседы и компьютерные расчеты, касающиеся нескольких занимательных задач механики. ч.3. Как Галилей и Шерлок Холмс извлекли пользу из умения наблюдать. Учебное пособие. – М.: МГДД(Ю)Т, 2009. – 100 с.
176. Рыжиков С.Б. Беседы и компьютерные расчеты, касающиеся нескольких занимательных задач механики. ч.4. Как Галилей бросал ядра с Пизанской башни. Учебное пособие. – М.: МГДД(Ю)Т, 2009. – 80 с.
177. Рыжиков С.Б. Изучение сложных колебательных движений: численное моделирование и эксперимент. // Материалы VIII Международной научно-методической конференции «Физическое образование: проблемы и перспективы развития»,

- М.: Московский педагогический государственный университет, 2009. с. 147-148.
178. Рыжиков С.Б., Рыжикова Ю.В. Особенности проведения практических занятий по механике с учащимися 7-9 классов в условиях летней школы. // Материалы X международной конференции "Физика в системе современного образования". С-Петербург. 2009. с. 119.
179. Рыжиков С.Б. Демонстрация диффузии паров воды. // Тезисы докладов конференции «Ломоносовские чтения 2009. Секция физики», М.: Изд. физического факультета МГУ, 2009, с. 201-202.
180. Рыжиков С.Б. Расчет дифракционных картин от простейших объектов с применением численного моделирования в 9 классе средней школы. // Материалы IX Международной научно-методической конференции «Физическое образование: проблемы и перспективы развития» – М.: МПГУ, 2010, Ч. 3, с. 92-94.
181. Рыжиков С.Б. Проектно-исследовательские работы – как способ развития интереса к физике у школьников 7-9 классов. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. - М.: МГУ, 2011, с. 205-207.
182. Рыжиков С.Б. Использование цифровых камер для проведения лабораторных и проектно-исследовательских работ с одаренными школьниками. // Материалы всероссийской научно-практической конференции – IX Емельяновские чтения «Физика и ее преподавание в школе и в вузе», Йошкар-Ола: Марийский государственный университет, 2011, с. 217-221.
183. Рыжиков С.Б. Проведение проектно-исследовательских работ со старшеклассниками с использованием эксперимента и компьютерного моделирования на примере исследования колебаний двойного маятника. // Материалы XI Международной конференции «Физика в системе современного образования», Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2011, т. 2, с. 135-138.
184. Рыжиков С.Б. В каком классе можно рассказывать школьникам о проблемах нанотехнологий? // Вестник МГУ, серия 20 (педагогическая), 2011, №3, с. 20-23.
185. Рыжиков С.Б. Изучение динамики вращательного движения в средней школе на примере экспериментального и теоретического решения задачи Эйлера с вращающимся

- диском. // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения. Секция физики». М.: Изд. физического факультета МГУ, 2011, с. 156-159.
186. Рыжиков С.Б. Беседы и компьютерные расчеты, касающиеся нескольких занимательных задач механики. ч.5. Как Галилей. Учебное пособие. – М.: МГДД(Ю)Т, 2011. – 84 с.
187. Рыжиков С.Б. Развитие исследовательских компетенций школьников на примере решения классической задачи «брахистохронос». // Школа будущего, 2011, №4, с. 76-80.
188. Рыжиков С.Б. Основные проблемы, затрудняющие преподавание физики одаренным школьникам, и пути их преодоления. // III Международная научно-практическая конференция «Модернизация российского образования: проблемы и перспективы». Краснодар. 2012. с. 109-111.
189. Рыжиков С.Б. Развитие исследовательских способностей школьников 8-9 классов, обучающихся в вечерней физической школе, при изучении молекулярной физики. // Научная конференция «Ломоносовские чтения». Секция физики. Сборник тезисов докладов. М.: Физический факультет МГУ. 2012. с. 86-88.
190. Рыжиков С.Б. Проведение исследовательских работ с одаренными школьниками на примере изучения формы поверхности мыльной пленки. // Материалы XI Международной научно-методической конференции «Физическое образование: проблемы и перспективы развития». М.: МПГУ. 2012, часть 2, с. 18-20.
191. Рыжиков С.Б. Олимпиады и проектно-исследовательские работы – два направления обучения одаренных школьников физике. // Материалы V Международной научно-практической конференции «Новые педагогические технологии». М.: Изд. «Спутник +». 2012. с. 194-196.
192. Рыжиков С.Б. Пути преодоления пропасти между «меловой физикой» и современной наукой. // Сборник материалов XV Международной научно-практической конференции «Наука и современность – 2012». Новосибирск: Изд. НТГУ. 2012. Часть 3. с. 92-94.
193. Рыжиков С.Б. Проведение исследовательских работ по механике и молекулярной физике с одаренными школьниками с использованием цифровых фотоаппаратов. // Психология и педагогика: методика и проблемы практического применения.

- Сборник материалов XXIV Международной научно-практической конференции. Новосибирск. Изд. Новосибирского государственного технического университета. 2012. Часть 2, с. 128-130.
194. Рыжиков С.Б. Обучение одаренных школьников 8–9 классов на физическом факультете МГУ: успехи и перспективы. // Материалы конференции «Новые образовательные программы МГУ и школьное образование». М.: МГУ, 2012, с. 179-181.
  195. Рыжиков С.Б. Развитие интереса школьников к физике путем чтения популярных лекций с демонстрацией экспериментов на физическом факультете МГУ. // Материалы конференции «Новые образовательные программы МГУ и школьное образование». М.: МГУ, 2012, с. 181-182.
  196. Рыжиков С.Б. Развитие исследовательских компетенций школьников при выполнении исследовательских работ по физике с использованием численного моделирования. Монография. М.: Школа будущего. 2012. – 232 с.
  197. Рябов Ю.А. Движение небесных тел. М.: Наука, 1988. – 240 с.
  198. Савенков А.И. Одаренные дети в детском саду и школе. Учебное пособие. – М.: Академия, 2000. – 232 с.
  199. Савенков А.И. Психологические основы исследовательского подхода к обучению. Учебное пособие. – М.: Ось-89, 2006. – 480 с.
  200. Савенков А.И. Психологические основы исследовательского обучения школьников. // Школьные технологии, 2008, №1, с. 11-20.
  201. Савенков А.И. Психология детской одаренности. Учебное пособие. – М.: Генезис, 2009. – 440 с.
  202. Савенков А.И. Педагогическая психология. Учебник. – М.: Академия. 2009. т. 1. – 416 с.
  203. Савенков А.И. Педагогическая психология. Учебник. – М.: Академия. 2009. т. 2. – 240 с.
  204. Самарский А.А. Введение в численные методы: Учеб. пособие для вузов. – СПб.: Лань, 2005. – 288 с.
  205. Самоненко Ю.А. Современные обучающие технологии в преподавании физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. - М.: МГУ, 2011, с. 318-320.
  206. Самсонова Л.В. Проектная деятельность учащихся на уроках физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 198-200.



207. Сборник задач по общему курсу физики. Том I. Механика. / Под ред. Д.В. Сивухина. – М.: Лань. 2006. – 240 с.
208. Сборник задач по общему курсу физики. Том II. Термодинамика и молекулярная физика. / Под ред. Д.В. Сивухина. – М.: Лань. 2006. – 176 с.
209. Семенов М.В., Рыжиков С.Б., Якута А.А. Некоторые замечания к решению задачи о падении тела в воздухе. // Труды международной конференции «Проблемы физического образования в средней и высшей школе». Рязань. 2002. с. 133-134.
210. Семенова И.Ю. Некоторые формы творческой внеурочной работы по физике: опыт работы в советском районе г. Новосибирска. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 210-212.
211. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5 т. Том I. Механика. М.: Лань. 2005. – 560 с.
212. Сидорчук Т.А. Проблемные ситуации и творческие задания как средство формирования исследовательских навыков обучающихся. // Исследовательская работа школьников, 2009, №3, с. 35-39.
213. Скворцов А.И., Фишман А.И. Цифровые образовательные ресурсы (ЦОР) по физике: опыт создания и идеи развития. // Материалы X международной конференции «Физика в системе современного образования». С.–Петербург: изд. Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, 2009. том 2. с. 222-224.
214. Слепцов А.И. Методика включения учащихся в научно – исследовательскую деятельность. – Новосибирск: Изд. НИПКиПРО, 2007. – 52 с.
215. Слепцова Р.Р. Обучение учащихся навыкам исследовательской работы. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 343-345.
216. Слободецкий И.Ш., Орлов В.А. Всесоюзные олимпиады по физике: Пособие для учащихся 8-10 кл. сред. школы. – М: Просвещение, 1982. – 256 с.
217. Слободянюк А.И., Пролиско Т.С. Остановись, мгновение... // Физика для школьников. 2009. №2. с. 26-35.
218. Софронова Е.А. Организация проектной деятельности на уроках физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 264-266.

219. Суербаев А.Х. Экспериментально – исследовательские умения учащихся по физике и их развитие в системе дополнительного образования. Монография. – Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2009. – 280 с.
220. Сульянова М.М. Метод проектов в преподавании физики. // Физика (приложение издательского дома «Первое сентября»). 2010. №18. с. 5-6.
221. Тарасов Л.В., Тарасова А.Н. Беседы о преломлении света. М.: Наука. 1982. – 176 с.
222. Тарасов Л.В. Физика в природе. – М.: Вербум-М. 2002. – 352 с.
223. Теория и методика обучения физики в школе: Частные вопросы: Учебное пособие. / Под ред. С.Е. Каменецкого. – М.: Изд. центр «Академия», 2000. – 384 с.
224. Тихонова И.В. Организация работы научного общества учащихся. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 254-256.
225. Трополева О.Л. Создание центров поддержки физико-технического образования как реализация инновационной структуры сетевого взаимодействия ученики – вузы. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 190-191.
226. Уокер Дж. Физический фейерверк. – М.: Мир, 1988. – 298 с.
227. Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 2000. – 672 с.
228. Физика: Механика. 10 класс. / Под ред. Г.Я. Мякишева – М.: Дрофа. 2002. – 496 с.
229. Физика: Учеб. для 10 кл. с углубл. изучением физики. / Под ред. А.А. Пинского, О.Ф. Кабардина. – М.: Просвещение, 2005. – 332 с.
230. Физические величины: Справочник. / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мелихова. – М.: Энергоатомиздат. 1991. – 1232 с.
231. Фирсова М.М. Исследовательская деятельность учащихся гимназии. // Педагогика, 2003, №8, с. 26-31.
232. Хаммэль Ч. Дело Галилея. – М.: Триада, 1998. – 360 с.
233. Ханнанова Т.А., Ханнанов Н.К., Бубнов А., Кукушкин П. Параболы вокруг нас. // Физика для школьников. 2009. №4. с. 42-45.
234. Хоютанова М.И. Исследовательская работа школьников: проблемы, подходы, перспективы. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 388-391.

235. Хуторской А.В. Метод Сократа. // Школьные технологии. 2008, №6, с. 26-31.
236. Хуторской А.В. «Великая дидактика» Коменского. // Школьные технологии. 2009, №6, с. 64-76.
237. Хуторской А.В. Система обучения М.В. Ломоносова. // Школьные технологии. 2010, №4, с. 86-88.
238. Чернецкий И.С. Использование муар-эффекта для измерения малых углов и смещений и имитации физических явлений. // Физика. Все для учителя! 2011. №3. с. 4-7.
239. Черныш Г.Н. Обучение через науку и творческое проектирование. //Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 259-260.
240. Чудов В., Кокшарова Н., Лаврушко О. Проектно-исследовательская деятельность школьника. // Народное образование, 2005, №1, с. 133-140.
241. Чупрова Н.А. Методические рекомендации по организации исследовательской работы школьников. // Исследовательская работа школьников, 2010, №2, 51-56.
242. Шаронова Н.В, Эткина Е.В. Особенности преподавания физики в гимназии. // Творчество учителя как необходимое условие совершенствования учебно-воспитательного процесса. – М.: ЧеРо, 1996, вып. 5, с. 98-110.
243. Шатилова В.П. Учебно-исследовательская деятельность учащихся 5 классов. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 260-262.
244. Шестакова Л.А. Использование видеоматериалов на уроках физики как способ повышения самоэффективности личности школьника. // Физика в школе, 2011, №8, с. 40-42.
245. Шефер Н.И., Анникова О.Г. Кристаллы из... мыла. // Физика для школьников. 2010. №3. с. 8-13.
246. Шишкин Ф.Т. Компетентия и компетентность как ключевые понятия компетентного подхода в образовании. // Наука и школа, 2008, №4, с. 5-8.
247. Шиян Н.В., Шиян А.А. Метод проектов в физическом образовании. //Физика в школе. 2005, №5, с. 33-36.
248. Шиян О.А. Исследовательский метод обучения учителей в США. // Новые ценности образования. 2006, вып. 1-2, с. 265-271.

249. Шмачилина С.В. Мониторинг исследовательской культуры старшеклассника. // Народное образование, 2010, №2, с. 139-144.
250. Шмырев А.А. Школьный цифровой банк видеоматериалов – основа непрерывности и индивидуализации образования. // Информатика и образование. 2008. №7. с. 68–70.
251. Шноль Д.Э. О типологии исследовательских работ школьников // Исследовательская работа школьников, 2009, №1, с. 44-48.
252. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. / Под ред. Г.С. Ландсберга: Т. 1. – М.: Наука, Физматлит, 1995. – 608 с.
253. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. / Под ред. Г.С. Ландсберга: Т. 2. – М.: Наука, Физматлит, 1995. – 480 с.
254. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. / Под ред. Г.С. Ландсберга: Т. 3. – М.: Наука, Физматлит, 1995. – 656 с.
255. Энциклопедия для детей. (Том 16) Физика. Часть 1. – М.: Мир энциклопедий Аванта+. 2000. – 448 с.
256. Янюшкина Г.М., Буйлина О.М. Участие школьника в проектно-исследовательской деятельности как необходимое условие их развития. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ. 2011. с. 221-223.
257. Яроцкая И.С. Об участии молодых исследователей Северо-Западного федерального округа в Российской научно-социальной программе для молодёжи и школьников «Шаг в будущее» // Исследовательская работа школьников. 2009. №1, с. 83-90.
258. Dicks M.J. Show me the way. // Education leadership. – 2005 – Vol. 63. N3. P.78-80.
259. Finn L. Using video to reflect on curriculum. // Education leadership. – 2002. Vol. 59. N6. P. 72-74.
260. Zhang M., Lundeberg M., Eberhardt J. Seeing what you normally don't see. // Phi Delta Kappan. – New York – 2010. Vol.91. N6. P. 60-65.

## Содержание

Введение	3
Глава 1. Общие принципы проведения исследовательских работ	8
1.1. Особенности проведения исследовательских работ по сравнению с другими формами обучения	8
1.2. Особенности проведения работ в летних школах	10
1.3. Общие рекомендации по планированию исследовательской работы от постановки задачи до подготовки доклада на конференции	10
1.4. Основные направления использования фото- и видеотехники при обучении физике	12
1.5. Возможности использования фото- и видеотехники в качестве измерительного инструмента	13
1.6. Особенности использования фото- и видеотехники для регистрации движения	14
1.7. Определение погрешности измерений	16
1.8. Учет параллакса	19
1.9. Особенности работы с видеокамерами с чересстрочной разверткой	20
1.10. Общие замечания о планировании и проведении экспериментов	21
Глава 2. Использование фото- и видеотехники при исследовании колебательных процессов	22
2.1. Исследование колебаний математического маятника	23
2.1.1. Планирование экспериментов с математическим маятником	24
2.1.2. Возможные схемы экспериментов с математическим маятником	25
2.1.3. Некоторые дополнительные проблемы при экспериментах с математическим маятником	27
2.2. Исследование колебаний пружинного маятника	28
2.3. Исследование некоторых сложных колебательных систем	30
2.3.1. Сложный пружинный маятник	30
2.3.2. Двойной математический маятник	32
2.3.3. Маятник Гюйгенса	37
2.3.4. Пружинный маятник на рельсе	38
2.3.5. Маятник Капицы	38
2.4. Исследование связанных колебательных систем	39
2.4.1. Два связанных математических маятника	39

2.4.2. Нахождение собственных мод колебаний	44
2.4.3. Три связанных математических маятника	48
2.4.4. Система из большого числа связанных математических маятников	52
2.5. Исследование физических маятников и крутильных колебаний	52
2.5.1. Общие подходы к изучению динамики вращательного движения	52
2.5.2. Исследование колебаний физических маятников	55
2.5.3. Исследование движения маятника Максвелла (игрушки «йо-йо»)	57
2.5.4. Исследование крутильных колебаний	59
Глава 3. Исследование движения в вязкой среде	63
3.1. Определение круга исследовательских задач по теме «вязкое трение» (сопротивление среды)	63
3.1.1. Постановка задачи учета сопротивления воздуха на примере классического опыта Галилея	63
3.2. Сопротивление среды при ламинарном и турбулентном течении	66
3.3. Исследование ламинарного движения	70
3.3.1. Нахождение объектов для наблюдения ламинарного движения	70
3.3.2. Исследование движения с установившейся скоростью, формула Стокса	72
3.3.3. Зависимость скорости и координаты от времени при ламинарном движении	77
3.4. Исследование турбулентного движения	79
3.4.1. Вертикальное движение тел в воздухе, качественный подход	79
3.4.2. Вертикальное падение тел, установившаяся скорость	81
3.4.3. Исследование зависимости силы сопротивления от скорости	85
3.4.4. Анализ опыта Галилея методом неявного интегрирования	89
3.4.5. Одновременное падение двух тел в воздухе	93
3.4.6. Исследование баллистических траекторий	98
3.4.7. Аналитическое решение задачи максимальной дальности полета в отсутствии сопротивления воздуха	106
3.4.8. Исследование затухающих колебаний маятника	109
3.4.9. Возможные направления исследовательских работ	111

Глава 4. Исследование скатывания тел по наклонной плоскости	113
4.1. Опыт Галилея с наклонной плоскостью	113
4.2. Задача Бернулли «брахистохронос»	117
Глава 5. Использование фототехники при исследовании статических объектов	124
5.1. Исследование объектов больших размеров (на примере радуги)	124
5.2. Исследование объектов малых размеров	130
5.2.1. Исследование явлений интерференции и дифракции	130
5.2.2. Создание голограмм	131
5.3. Исследование нестабильных объектов	132
5.3.1. Исследование формы мыльных пленок	132
5.3.2. Задача Релея со струей воды	134
Заключение	136
Список литературы	137

Научное издание

*Рыжиков Сергей Борисович*

**РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ  
СПОСОБНОСТЕЙ ОДАРЕННЫХ ШКОЛЬНИКОВ  
ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ  
РАБОТ ПО ФИЗИКЕ С ПРОВЕДЕНИЕМ  
ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА БАЗЕ ФОТО– И ВИДЕО  
ТЕХНИКИ**

Издатель:

Федеративный комитет «Школа Будущего»  
105 318, Москва, ул. Тацкая, д. 19.

Типография:

ООО «Эдитус»  
Москва, ул. Академика Королева, 13, стр. 1

Тираж 1000 экз.

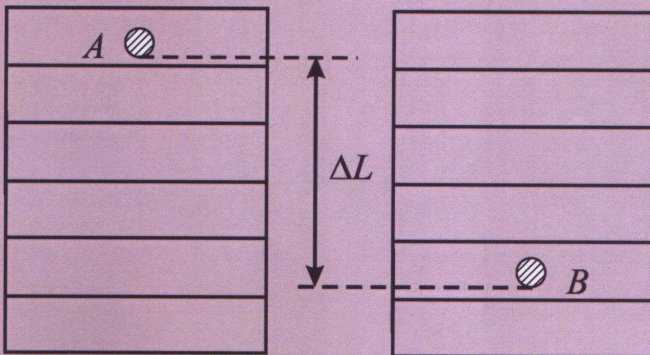
Объем – 9,2 усл. п. л.





Рыжиков С. Б.

**Развитие исследовательских  
способностей одаренных  
школьников при выполнении  
исследовательских работ  
по физике с проведением  
экспериментов на базе фото-  
и видео техники**





**Рыжиков  
Сергей  
Борисович**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, директор Вечерней физической школы при МГУ, секретарь оргкомитета Московской городской олимпиады по физике.